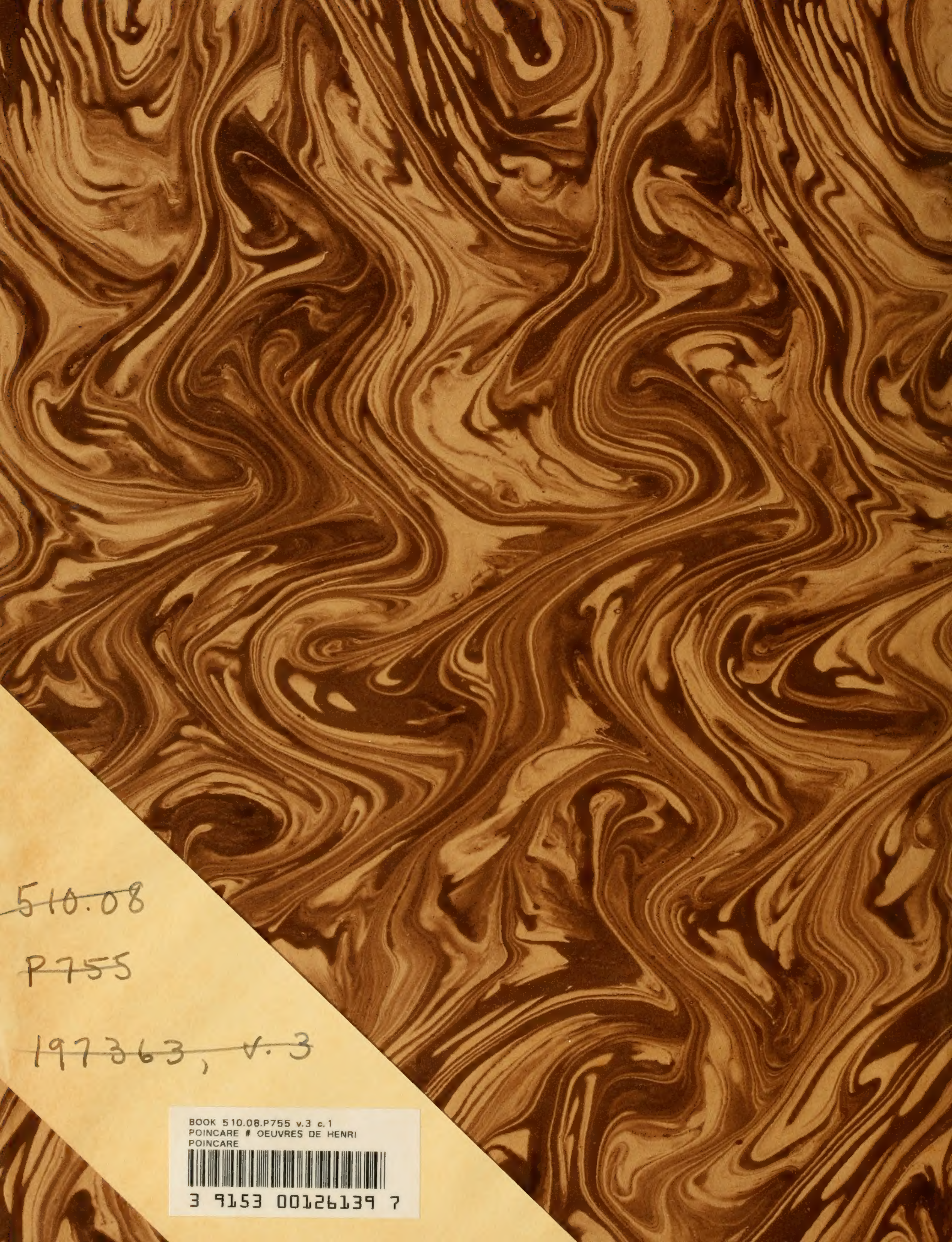




Date Due
Demco 293-5

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.
84505-34

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME III

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

JULES DRACH

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1934

SUR

UN THÉORÈME DE M. FUCHS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 99, p. 75-77 (14 juillet 1884).

M. Fuchs a présenté dernièrement à l'Académie de Berlin un travail où il étudie les conditions pour que les intégrales d'une équation différentielle algébrique n'aient qu'un nombre fini de points singuliers qui soient les mêmes pour toutes les intégrales. On comprend aisément quel intérêt il y a à rechercher s'il existe de pareilles équations et à les former, si elles existent. En effet, les procédés qui permettent d'intégrer les équations linéaires par le moyen des fonctions fuchsiennes leur seraient applicables, et l'on serait ainsi conduit à une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables à l'aide des nouvelles transcendantes.

M. Fuchs donne, pour les équations du premier ordre, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des points singuliers des intégrales soit fini. Il commence ensuite une discussion à laquelle je voudrais ajouter quelques remarques. Si l'on met l'équation sous la forme

$$(1) \qquad F\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

et si l'on regarde un instant la variable indépendante z comme une constante, la relation algébrique entre y et $\frac{dy}{dz}$ aura un certain genre que j'appelle p.

Dans le cas où $p = 0$, M. Fuchs montre que l'équation se ramène à celle de Riccati, et par conséquent aux équations linéaires. Je n'ai rien à ajouter sur ce cas.

Si l'on a $p = 1$, M. Fuchs montre que l'équation peut se ramener à la forme

$$(2) \qquad \frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 \sqrt{R(t)}$$

où les A sont des fonctions de z et où R est un polynome du quatrième degré en t dont les coefficients sont des fonctions de z et qui satisfait à une relation

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) + (B_0 + B_1 t)R \tag{3}$$

[où B_0 et B_1 sont des fonctions de z].

Il est possible de simplifier encore cette équation. Posons, en effet,

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de z; les équations (2) et (3), où t sera remplacé par u, conserveront la même forme; mais on aura pu choisir α, β, γ et δ de telle façon que le nouveau polynome R,

$$R = u^4 + 2Cu^2 + 1,$$

C étant une fonction de z. Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$\frac{du}{dz} = A_3\sqrt{R}, \qquad \frac{dC}{dz} = 0,$$

ce qui montre que C, et par conséquent le module des fonctions elliptiques dérivées du radical $\sqrt{R}$, sont des constantes absolues indépendantes de z. L'intégration de ces équations se ramène à de simples quadratures.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat et poursuivre la discussion pour le cas de $p > 1$, par le moyen suivant.

Soient y_0 et y'_0 les valeurs d'une intégrale y et de sa dérivée $\frac{dy}{dz}$ pour $z = z_0$; soient y_1 et y'_1 les valeurs de cette même intégrale y et de sa dérivée pour $z = z_1$; il est aisé de voir que y_1 et y'_1 sont des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0, et réciproquement. Ainsi les deux surfaces de Riemann

$$F\left(z_0, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0, \tag{S_0}$$

$$F\left(z_1, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0, \tag{S_1}$$

où z_0 et z_1 sont regardés comme des constantes, et où les variables sont y et $\frac{dy}{dz}$, ont non seulement même genre, mais encore mêmes modules. *Les modules de la surface de Riemann représentée par l'équation (1) sont donc constants et indépendants de z.*

Cela posé, ou bien la surface S_1 ne pourra dériver de la surface S_0 par une transformation birationnelle que d'un nombre fini de manières; dans ce cas, on

pourra déterminer ces transformations, et par conséquent l'intégrale générale de l'équation (1) par des procédés purement algébriques; cette intégrale sera donc algébrique; ou bien les deux surfaces pourront dériver l'une de l'autre par une infinité de transformations birationnelles, ce qui signifie que l'une d'elles, S_0 par exemple, sera reproduite par une infinité de pareilles transformations. Mais cela ne peut jamais avoir lieu si $p > 1$. Dans le cas de $p = 1$, on retrouverait d'ailleurs aisément le résultat énoncé plus haut.

En résumé, on peut tirer du beau théorème de M. Fuchs les conséquences suivantes, en laissant de côté le cas de $p = 0$, complètement traité par le savant géomètre de Berlin.

Si les conditions énoncées par M. Fuchs sont remplies pour une équation du premier ordre, et si $p = 1$, l'équation est intégrable par quadratures. Si $p > 1$, l'intégrale est algébrique.

Il serait intéressant de rechercher si, dans le cas des équations d'ordre supérieur, on arrive à des théorèmes analogues, ou si, au contraire, on est conduit à une classe essentiellement nouvelle d'équations intégrables par les fonctions fuchsiennes.

SUR

UN THÉORÈME DE M. FUCHS

Acta mathematica, t. 7, p. 1-32 (1885).

Les équations différentielles linéaires jouissent d'une propriété remarquable : les points singuliers sont les mêmes pour toutes les intégrales. C'est ainsi que pour les équations dont les coefficients sont des polynomes entiers en x, les points singuliers sont les valeurs de x qui annulent le premier coefficient. C'est sur cette circonstance qu'est fondée la méthode d'intégration de ces équations par les fonctions zétafuchsiennes.

Les équations non linéaires ne jouissent pas, du moins en général, de la même propriété. Ainsi l'équation très simple

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = \sqrt{c^2 - x^2},$$

c étant une constante d'intégration. Et les points singuliers $x = \pm c$ dépendent de cette constante et ne sont par conséquent pas les mêmes pour toutes les intégrales.

On est ainsi conduit à rechercher s'il existe, en dehors des équations linéaires, d'autres classes d'équations différentielles dont toutes les intégrales particulières aient les mêmes points singuliers. C'est ce problème que M. Fuchs a très élégamment résolu dans un Mémoire intitulé : *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* et inséré aux Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin (séance du 26 juin 1884).

Je rappelle succinctement les notations employées par le savant géomètre de Berlin et les résultats qu'il a obtenus.

(1) Imprimé le 11 février 1885.

M. Fuchs considère une équation du premier ordre

$$(A) \qquad F(z, y, y') = 0,$$

où z est la variable indépendante et y' la dérivée $\frac{dy}{dz}$ et dont le premier membre est un polynome entier en y et en y', ayant pour coefficients des fonctions *quelconques* de z.

Si l'on considère un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique entre y et y'. On appelle p le genre de cette relation.

L'équation

$$(C) \qquad D(z, y) = 0$$

est celle que l'on obtient en éliminant y' entre l'équation (A) et la suivante

$$(B) \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

M. Fuchs arrive d'abord à un résultat général qu'il énonce ainsi :

« Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden.

» 1. Die Gleichung (A) hat die Form

$$(F) \qquad y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \ldots + \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

» 2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C) für welche die durch (F) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt so ist η ein Integral der Gleichung (F). In der y' als algebraische Function von y darstellenden Riemann'schen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

» 3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$F(z, y, \zeta) = 0$$

mit der Unbekannten y. »

En d'autres termes, l'équation (A) devra satisfaire aux conditions suivantes :

1° La fonction y' définie par cette équation ne pourra devenir infinie que lorsque y sera lui-même infini, ou pour certaines valeurs particulières de z.

2° Si l'on pose $y_1 = \frac{1}{y}$, $y'_1 = \frac{dy_1}{dz}$, l'équation (A) deviendra

$$(A_1) \qquad F_1(z, y_1, y'_1) = 0;$$

y'_1 ne devra pouvoir devenir infinie, si y_1 est nul, que pour certaines valeurs particulières de z.

3° Les équations

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

devront définir des intégrales singulières de l'équation (A).

4° En différentiant l'équation (A), on trouve

$$\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz} + \frac{dF}{dz} = 0.$$

On devra avoir identiquement

$$\frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz} = PF + Q\frac{dF}{dy'},$$

P et Q étant des polynomes entiers en y et en y', ayant pour coefficients des fonctions de z.

Il est aisé de comprendre l'importance de ces résultats. Supposons en effet que F soit un polynome entier, non seulement par rapport à y et à y', mais encore par rapport à z. Alors, si les conditions précédemment énoncées sont remplies, le nombre des points singuliers est fini et ces points peuvent même être regardés comme donnés, de sorte que la méthode d'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsiennes est applicable, au moins dans ses traits essentiels. On pourrait donc ainsi concevoir l'espoir de découvrir une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables par ces transcendantes. Dans le cas même où F n'est pas un polynome entier par rapport à z, le résultat reste fort important.

Mais pour en tirer tous les fruits, il est indispensable de faire des conditions précédemment énoncées une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée et poussée assez loin par M. Fuchs et je désirerais ici la pousser plus loin encore, afin d'arriver à des conclusions définitives [1].

---

[1] Voir aux Notes.

Le nombre que nous avons appelé plus haut p joue dans cette étude un rôle capital.

1° Supposant d'abord $p = 0$, M. Fuchs pose

$$x = \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_0(t)}, \qquad y = \frac{\Phi_2(t)}{\Phi_0(t)},$$

Φ_0, Φ_1 et Φ_2 désignant des polynomes entiers en t, dont les coefficients dépendent de z. Il arrive ainsi à l'équation

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2,$$

où A_0, A_1, A_2 sont des fonctions de z. C'est l'équation de Riccati qu'il est aisé de ramener, comme on sait, aux équations linéaires du second ordre. Ainsi dans le cas de $p = 0$, on n'obtient pas de classe réellement nouvelle d'équations différentielles satisfaisant aux conditions énoncées.

Dans ce premier cas, je n'ai rien à ajouter aux résultats obtenus par M. Fuchs.

2° Ce savant géomètre, examinant ensuite le cas de $p = 1$, pose

$$x = \frac{\Phi_1 + \Psi_1\sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0\sqrt{R(t)}}, \qquad y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2\sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0\sqrt{R(t)}},$$

les Φ, les Ψ et R étant des polynomes entiers en t avec des coefficients dépendant de z, et R en particulier étant du quatrième degré en t.

L'équation (A) est alors ramenée à la forme

$$(1) \qquad \frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda\sqrt{R(t)},$$

où les A et λ sont des fonctions de z.

On déduit alors de l'énoncé de M. Fuchs, cité plus haut, la condition suivante :

$$(2) \qquad \frac{dR}{dz} + \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = 2(B_0 + B_1 t)R(t),$$

B_0 et B_1 étant des fonctions de z.

On peut pousser plus loin encore l'étude de cette condition, à laquelle s'arrête le célèbre analyste que nous citons.

Soit

$$(3) \qquad R(t) = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \delta).$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de z. Posons

$$(4) \qquad t = \frac{au + b}{cu + d},$$

a, b, c, d étant des fonctions de z que nous déterminerons plus complètement dans la suite et auxquelles nous imposerons d'abord la condition

$$ad - bc = 1.$$

Les équations (1), (2) et (3) vont se transformer. En posant

$$\alpha = \frac{a\alpha' + b}{c\alpha' + d}, \qquad \beta = \frac{a\beta' + b}{c\beta' + d}, \qquad \gamma = \frac{a\gamma' + b}{c\gamma' + d}, \qquad \delta = \frac{a\delta' + b}{c\delta' + d},$$

on aura

$$R(t) = \frac{(u - \alpha')(u - \beta')(u - \gamma')(u - \delta')}{(cu + d)^4(c\alpha' + d)(c\beta' + d)(c\gamma' + d)(c\delta' + d)} = \frac{R_1}{(cu + d)^4 M},$$

M étant une fonction de z,

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = \frac{A''_0 + A''_1 u + A''_2 u^2}{(cu + d)^2}, \qquad B_0 + B_1 t = \frac{B'_0 + B'_1 u}{cu + d},$$

les A″ et les B′ étant des fonctions de z. Il vient ensuite

$$\frac{dt}{dz} = \frac{du}{dz(cu + d)^2} + \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2}{(cu + d)^2},$$

d'où, en posant

$$A'_0 = -C_0 + A''_0, \qquad A'_1 = -C_1 + A''_1, \qquad A'_2 = -C_2 + A''_2,$$

on tirera

$$\frac{du}{dz} = A'_0 + A'_1 u + A'_2 u^2 + \lambda' \sqrt{R_1},$$

et l'on trouverait aisément

$$\frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_1}{du}(A'_0 + A'_1 u + A'_2 u^2) = (B'_0 + B'_1 u) R_1.$$

Ainsi la forme des équations (1), (2) et (3) n'est pas changée par la transformation (4), ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir.

Nous déterminerons a, b, c, d en fonction de z par les conditions

$$d\alpha - b = (c + d)\beta - (a + b) = (d - c)\gamma - (b - a) = 0$$

qu'il est toujours possible de remplir et qui entraînent

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \gamma' = -1.$$

D'où la conclusion suivante :

Il est toujours permis de supposer

$$R(t) = t(t^2-1)(t-\delta),$$

δ étant une fonction de z qui définit le module des fonctions elliptiques engendrées par $\sqrt{R}$. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais.

L'équation (2) devient alors

$$t(1-t^2)\frac{d\delta}{dz} + \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t)R.$$

Faisons successivement dans cette équation

$$t = 0, \quad t = 1, \quad t = -1,$$

elle deviendra

$$\frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = 0 \qquad (t = -1, 0, 1).$$

Mais $\frac{dR}{dt}$ ne saurait s'annuler pour une de ces trois valeurs de t, sans quoi δ serait égal à -1, à 0 ou à 1, et le nombre p ne serait plus égal à 1, mais à 0. On a donc

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = 0 \qquad (t = -1, 0, 1),$$

d'où

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0.$$

L'équation (2) se réduit alors à

$$t(1-t^2)\frac{d\delta}{dz} = (B_0 + B_1 t)R.$$

Si dans cette équation on fait $t = \delta$, il reste

$$\frac{d\delta}{dz} = 0.$$

Ainsi δ *est une constante.*

Si l'on regarde un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique de genre p. Cette relation définit une certaine surface de Riemann S qui dépend de z. Ici $p = 1$; donc à chacune de ces surfaces de Riemann correspond un système de fonctions elliptiques et le module de ces fonctions pourra s'appeler le module de la surface S.

Il résulte de ce qui précède que le module de la surface S *est invariable.*

Cela posé, l'équation (1) devient

$$\frac{dt}{dz} = \lambda\sqrt{R}.$$

ou

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = \lambda\, dz.$$

R ne dépend que de t et λ ne dépend que de z; les variables sont donc séparées.

Posons $\lambda = \frac{d\mu}{dz}$, μ étant une fonction de z. L'inversion de la relation

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = d\mu$$

donnera

$$t = \varphi(\mu + c),$$

φ étant l'algorithme d'une fonction doublement périodique et c la constante d'intégration.

Les points singuliers de la fonction t seront ceux de la fonction μ; ils seront donc indépendants de la constante d'intégration et seront les mêmes pour toutes les intégrales.

Ainsi dans le cas de $p = 1$, comme dans celui de $p = 0$, nous ne sommes pas conduits à une classe réellement nouvelle d'équations différentielles.

3° Il reste à examiner le cas de $p > 1$, laissé de côté par M. Fuchs.

Une petite digression sur les surfaces de Riemann est ici nécessaire.

Soit

$$f_0(y_0, y'_0) = 0$$

une relation algébrique de genre p, définissant une surface de Riemann S_0.

Soit

$$f_1(y_1, y'_1) = 0$$

une relation de même genre définissant une surface de Riemann S_1.

Les deux surfaces S_0 et S_1 seront dites *équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, c'est-à-dire en établissant entre les deux points analytiques (y_0, y'_0), (y_1, y'_1) une relation telle que y_1 et y'_1 puissent s'exprimer rationnellement en fonction de y_0 et y'_0; et réciproquement.

On sait qu'il y a certains invariants qui ne sont pas altérés par les transformations birationnelles; ce sont les *modules*. Il y a $3p - 3$ modules pour une surface de Riemann de genre $p > 1$ et *un* module pour une surface de genre *un*. Deux surfaces de Riemann équivalentes ont donc mêmes modules.

Reprenons maintenant l'équation (A) et considérons-la comme représentant

une surface de Riemann S variable avec z. Je dis que *les modules de cette surface* S *seront constants et indépendants de* z.

En effet partons de la valeur initiale z_0 de z, à laquelle correspond une certaine surface de Riemann S_0. Soient y_0 et y'_0 les valeurs initiales d'une certaine intégrale de l'équation (A) et de sa dérivée; le point analytique (y_0, y'_0) appartiendra à la surface S_0.

Allons ensuite du point z_0 au point z_1 *en suivant un chemin déterminé.* La surface de Riemann, que nous avons appelée S et qui pour $z = z_0$ se réduisait à S_0, variera avec z et pour $z = z_1$ se réduira à S_1. Pour $z = z_1$, l'intégrale considérée et sa dérivée se réduiront à y_1 et y'_1 et le point analytique (y_1, y'_1) appartiendra à la surface S_1.

Faisons maintenant varier sur la surface S_0 le point analytique (y_0, y'_0) qui définit les valeurs initiales correspondant à l'intégrale envisagée, mais conservons des valeurs invariables à z_0 et à z_1 et ne faisons pas varier non plus le chemin qui mène de z_0 à z_1. Dans ces conditions, les surfaces S_0 et S_1 ne varieront pas, mais l'intégrale considérée variera et dépendra des valeurs initiales y_0 et y'_0 que l'on aura choisies. Par conséquent y_1 et y'_1 seront des fonctions de y_0 et de y'_0.

Je dis que ce seront des fonctions uniformes et continues du point analytique (y_0, y'_0). En effet si l'on se donne les valeurs initiales y_0 et y'_0, l'intégrale qui correspondra à ces valeurs initiales sera entièrement déterminée. Cette intégrale considérée comme fonction de z, peut prendre pour $z = z_1$ des valeurs différentes. Mais parmi elles, il y en a une, qui est celle que nous avons appelée y_1 et qui est celle que l'on obtient en allant du point z_0 au point z_1 par le chemin particulier que nous avons choisi. Cette valeur y_1 ainsi définie est parfaitement déterminée. C'est donc une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0).

Cette fonction uniforme pourrait toutefois être discontinue. Voyons comment cela pourrait arriver, par un exemple simple. Reprenons l'équation

$$z\,dz + y\,dy = 0$$

et son intégrale

$$y = \sqrt{c^2 - z^2}.$$

Soient $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et allons du point 0 au point 1 par la droite qui joint ces deux points. Il viendra

$$y_0 = c$$

et

$$y_1 = \sqrt{c^2 - 1} = \sqrt{y_0^2 - 1}.$$

Ainsi y_1 est exprimé en fonction de y_0. Il reste toutefois pour le définir complètement à décider si l'on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$. Supposons d'abord que la partie imaginaire de y_0 soit positive. Posons

$$2y_0 = \left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\varphi,$$

t et φ étant des quantités réelles et telles que

$$0 < \varphi < \pi, \qquad t > 1.$$

Cela est toujours possible et d'une seule manière, sauf une exception dont nous parlerons plus loin. Il viendra

$$2\sqrt{y_0^2 - 1} = \pm\left[\left(t - \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\varphi\right].$$

Cela posé, pour déterminer le signe qu'il faut prendre, faisons varier z de 0 à 1, en suivant la droite qui joint ces deux points.

Nous écrivons

$$2y_0 = \left(u + \frac{z^2}{u}\right)\cos\psi + i\left(u - \frac{z^2}{u}\right)\sin\psi$$

$$(0 < \psi < \pi,\ u > z);$$

ψ devra se réduire à φ et u à t pour $z = 1$. Il viendra

$$2\sqrt{y_0^2 - z^2} = \pm\left[\left(u - \frac{z^2}{u}\right)\cos\psi + i\left(u + \frac{z^2}{u}\right)\sin\psi\right]$$

et comme cette expression devra se réduire à $2y_0$ pour $z = 0$, il faudra prendre le signe $+$ et il viendra

$$2y_1 = \left(t - \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\varphi.$$

Cette expression n'est pas une fonction continue de y_0. Soit en effet

$$t = 1 - \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit. Les deux valeurs de $2y_0$

$$\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon}\right)\cos\varphi + i\left(1 - \varepsilon - \frac{1}{1 - \varepsilon}\right)\sin\varphi = 2\cos\varphi + \text{inf. petit}$$

et

$$\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right)\cos(-\varphi) + i\left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right)\sin(-\varphi) = 2\cos\varphi + \text{inf. petit}$$

sont infiniment voisines, tandis que les valeurs correspondantes de $2y_1$

$$\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos\varphi+i\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin\varphi=2i\sin\varphi+\text{inf. petit}$$

et

$$\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos(-\varphi)+i\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin(-\varphi)=-2i\sin\varphi+\text{inf. petit}$$

ne sont pas infiniment voisines comme elles devraient l'être si y_1 était fonction continue de y_0.

A quoi tient ce fait? Supposons que y_0 soit réel et compris entre -1 et $+1$. Alors il faudra prendre $t=1$. Et pour l'angle φ nous aurons deux valeurs distinctes satisfaisant toutes deux à la condition

$$\cos\varphi=y_0.$$

D'ailleurs rien dans les hypothèses faites jusqu'ici ne nous permettra de décider entre ces deux valeurs de φ qui conduisent pour y_1 à deux valeurs égales et de signe contraire. Rendons-nous compte de la raison d'être de cette anomalie. Supposons que nous ayons donné à y_0 une valeur réelle comprise entre -1 et $+1$. L'intégrale correspondante

$$y=\sqrt{y_0^2-z^2}$$

présentera un point de ramification

$$z=y_0$$

situé sur la droite qui joint le point $z=0$ au point $z=1$, c'est-à-dire sur le chemin même que nous sommes convenus de suivre pour aller du premier de ces points au second. Quand la variable z, en suivant ce chemin, aura franchi ce point de ramification, rien dans les hypothèses faites ne nous permettra de décider quel signe il faut attribuer au radical $\sqrt{y_0^2-z^2}$.

Je suis entré dans d'assez longs détails sur ce cas simple et j'espère avoir fait comprendre comment y_1 pourrait être une fonction discontinue de y_0.

Cela arriverait si l'un des points du chemin que nous suivons pour aller de z_0 à z_1 était un point de ramification pour l'une des intégrales. Mais rien de pareil n'est à craindre dans le cas qui nous occupe. Nous avons supposé en effet que les points de ramification étaient les mêmes pour toutes les intégrales et par conséquent qu'il ne pouvait y avoir de points de ramification des intégrales que pour certaines valeurs particulières de z.

Or nous aurons toujours pu choisir le chemin qui va de z_0 à z_1 de telle sorte qu'il ne passe par aucune de ces valeurs particulières.

Donc y_1 est une fonction uniforme et continue de y_0 et y'_0.

Il est aisé de voir que cette fonction n'a d'autres singularités que des pôles (¹).

Donc y_1 est une fonction rationnelle de y_0 et y'_0.

Pour la même raison, y'_1 est une fonction rationnelle de y_0 et y'_0; et de même y_0 et y'_0 sont des fonctions rationnelles de y_1 et y'_1.

Donc on peut passer de S_0 à S_1 par une transformation birationnelle.

Donc ces deux surfaces de Riemann ont mêmes modules.

Donc les modules de la surface S sont indépendants de z.

C. Q. F. D.

C'est le résultat que nous avions obtenu plus haut pour le cas de $p = 1$ et qui est étendu ainsi au cas général.

Pour pousser plus loin cette étude, il est nécessaire de dire quelques mots des transformations birationnelles des surfaces de Riemann en elles-mêmes.

Une surface de genre o peut se transformer en elle-même par une infinité de transformations birationnelles formant un groupe continu à trois paramètres. Soient en effet

$$(5) \qquad f(x, y) = 0$$

une relation algébrique de genre o et S la surface de Riemann correspondante, on peut poser

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

φ et ψ étant rationnels [et t s'exprimant rationnellement en x, y]. Si ensuite on prend

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

α, β, γ et δ étant des constantes quelconques, puis

$$x' = \varphi(t'), \qquad y' = \psi(t'),$$

x' et y' seront fonctions rationnelles de x et y et réciproquement, on aura ainsi une triple infinité de transformations birationnelles de la surface S en elle-même.

Les transformations birationnelles d'une surface de genre 1 en elle-même

(¹) Voir aux Notes.

forment encore un groupe continu, mais ce groupe ne contient plus qu'un seul paramètre. Supposons en effet que la relation (5) et par conséquent la surface S soit de genre 1 et non plus de genre 0. Nous poserons

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques avec les périodes ω et ω'. Soient

$$x' = \varphi(t'), \qquad y' = \psi(t')$$

un autre système de valeurs satisfaisant à la relation (5) et supposons que x' et y' puissent s'exprimer rationnellement en x et y, et réciproquement. On verra :

1° Que t' est une fonction entière de t;

2° Que t est une fonction entière de t';

3° Que l'on a entre t et t' une relation de la forme

$$\alpha t' + \beta t + \gamma = 0,$$

α, β et γ étant des constantes;

4° Que lorsque t augmente d'une période, t' doit augmenter aussi d'une période et réciproquement. Si par exemple t augmente de ω, t' devra augmenter de $m\omega + n\omega'$, m et n étant des entiers. Il vient donc

$$\alpha\omega + \beta(m\omega + n\omega') = 0$$

et de même

$$\alpha\omega' + \beta(m'\omega + n'\omega') = 0,$$
$$\alpha(m_1\omega + n_1\omega') + \beta\omega = 0,$$
$$\alpha(m_1'\omega + n_1'\omega') + \beta\omega' = 0.$$

Les deux dernières équations sont des conséquences des deux premières pourvu que l'on suppose $mn' - m'n = 1$. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que les quatre équations soient compatibles. Nous remplacerons donc nos quatre équations par les trois suivantes :

$$(\alpha + \beta m)\omega + \beta n\omega' = \beta m'\omega + (\alpha + \beta n')\omega' = 0,$$
$$mn' - m'n = 1.$$

Ces équations peuvent être satisfaites de trois manières :

1° En faisant

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1, \qquad m = n' = 1, \qquad m' = n = 0,$$

d'où

$$t' = t - \gamma.$$

On est ainsi conduit à une infinité de transformations de la surface S en elle-même, dépendant d'un seul paramètre γ et formant un groupe continu.

2° Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est donné par l'équation

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(m+n)=0.$$

De plus ce rapport ne doit pas être réel (si on laisse de côté le cas que nous venons de traiter et celui que nous allons traiter plus loin), sans quoi le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ serait lui-même réel. On devra donc avoir

$$(m+n)^2<4,$$

d'où

$$m+n=0,\ 1\ \text{ou}\ -1.$$

Il est aisé de déduire de là que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ doit avoir une des valeurs

$$(6)\qquad \frac{\lambda e^{\frac{ki\pi}{6}}+\mu}{\lambda' e^{\frac{ki\pi}{6}}+\mu'},$$

$k, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant des entiers tels que

$$\lambda\mu'-\lambda'\mu=1,\qquad k\equiv 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\ \text{ou}\ 10\pmod{12}.$$

Ce cas ne pourra donc se présenter que pour certaines valeurs particulières du module de la surface S. Pour ces valeurs, la surface S admettra, outre le groupe continu trouvé plus haut, une autre transformation dont la puissance 3e, 4e ou 6e se confondra avec la transformation identique, ainsi que les diverses puissances de cette transformation et les combinaisons de ces puissances avec les diverses transformations du groupe continu.

3° On peut enfin satisfaire à nos trois équations en faisant

$$t=-t',$$
$$\alpha=1,\qquad \beta=1,\qquad m=n'=-1,\qquad m'=n=0.$$

On est ainsi conduit à une transformation T de la surface S en elle-même. Si l'on appelle τ une transformation quelconque du groupe continu trouvé plus haut, toutes les transformations birationnelles de la surface S en elle-même sont comprises dans l'une des formules

$$\tau\quad\text{et}\quad\tau T.$$

Il n'y a d'exception que si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ prend l'une des valeurs (6). Les consi-

dérations qui précèdent ne présentent aucune difficulté, je les ai pourtant développées avec détail parce que j'ai l'intention d'appliquer une méthode tout à fait analogue à la recherche des transformations des surfaces de genre $p > 1$.

Ces surfaces ne peuvent être transformées en elles-mêmes que d'un nombre fini de manières.

Ce théorème était soupçonné depuis longtemps, mais la démonstration a longtemps arrêté les géomètres. Elle a été trouvée il y a quelques années par M. Klein.

Voici en effet ce que ce géomètre me fit l'honneur de m'écrire à la date du 3 avril 1882 :

« Eine Reihe von Theoremen über algebraische Functionen beweist man vermöge der neuen η Function sofort (fonction intimement liée aux fonctions fuchsiennes). Zum Beispiel den Satz, den ich in meiner Schrift über Riemann nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, dass nämlich eine Fläche $p > 1$ niemals unendlich viele discrete eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge deren sie in eine ∞ Zahl äquivalenter Fundamentalpolygone zerlegt erscheinen würde). »

Il est facile de reconstituer dans tous ses détails la démonstration de M. Klein.

Reprenons en effet la relation (5) et supposons que cette relation et par conséquent la surface S soient de genre $p > 1$. Nous poserons

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant des fonctions fuchsiennes dont le polygone générateur R_0 aura $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués. Tous les sommets formeront un seul cycle et la somme des angles sera égale à 2π [cf. *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. 1, p. 23 et 42); et *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. 1, p. 256 et suiv.) (1)]. Cela est toujours possible [cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, p. 272 et 276) (2)].

Soient

$$x' = \varphi(t'), \quad y' = \psi(t')$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 129-130 (Exemples III, IV), p. 149, puis p. 222 et suivantes.

(2) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 363 et p. 368.

et supposons que x' et y' soient fonctions rationnelles de x et de y, et réciproquement. Qu'arrivera-t-il si l'on étudie t' comme fonction de t? En premier lieu, tant que t reste intérieur au cercle fondamental, t' est une fonction holomorphe de t.

De plus t' reste intérieur au cercle fondamental.

Réciproquement, quand t' reste intérieur au cercle fondamental, t est fonction holomorphe de t' et reste intérieur au cercle fondamental.

On en déduit aisément (cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires*, p. 231) [1] que

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

la substitution

$$\sigma = \left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

conservant le cercle fondamental.

Soit maintenant G le groupe des fonctions fuchsiennes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. Je dis qu'il est permutable à la substitution σ. Soit en effet τ une substitution quelconque du groupe G : je dis que $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fera aussi partie de ce groupe. En effet, τ faisant partie de G, on aura

$$x = \varphi(t) = \varphi(t, \tau), \qquad y = \psi(t) = \psi(t, \tau),$$

d'où

$$R[\varphi(t), \psi(t)] = R[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)],$$

R étant l'algorithme d'une fonction rationnelle quelconque. D'autre part on a, par hypothèse,

$$x' = \varphi(t, \sigma) = R_1[\varphi(t), \psi(t)],$$
$$y' = \psi(t, \sigma) = R_2[\varphi(t), \psi(t)]$$

et de même

$$\varphi(t, \tau, \sigma) = R_1[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)],$$
$$\psi(t, \tau, \sigma) = R_2[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)],$$

d'où

$$\varphi(t\tau\sigma) = \varphi(t\sigma), \qquad \psi(t\tau\sigma) = \psi(t\sigma)$$

ou en changeant t en $t\sigma^{-1}$

$$\varphi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \varphi(t), \qquad \psi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \psi(t).$$

Donc la substitution $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fait partie du groupe G. C. Q. F. D.

Les substitutions linéaires permutables au groupe G et conservant le cercle

---

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 325 et 327.

fondamental forment un groupe G′. Ce groupe G′ contient évidemment le groupe G; en d'autres termes G est un sous-groupe de G′, et l'on voit aisément qu'à toute substitution de G′, n'appartenant pas à G, correspondra une transformation birationnelle de la surface S en elle-même.

Remarquons de plus que, d'après la définition même de G′, G est un sous-groupe « distingué » [ou invariant] de G′.

Mais il y a deux espèces de sous-groupes : les sous-groupes d'*indice fini* (qui sont tels qu'on obtient toutes les substitutions du groupe principal, en prenant la résultante des diverses substitutions du sous-groupe et *d'un nombre fini* d'autres substitutions) et les sous-groupes d'*indice infini*.

Je me propose de démontrer que G est un sous-groupe d'indice fini, et par conséquent que la surface S n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même.

J'établirai d'abord que G′ est un groupe fuchsien, c'est-à-dire un groupe proprement discontinu. En effet, s'il ne l'était pas, il serait ou bien continu (c'est-à-dire qu'il contiendrait des substitutions infinitésimales), ou bien improprement discontinu [cf. *Théorie des groupes kleinéens* (*Acta mathematica*, t. 3, p. 57) (1)].

1° Il ne peut être continu, car s'il contenait une substitution infinitésimale σ, cette substitution serait permutable, non seulement au groupe G, *mais à toutes les substitutions de ce groupe*.

Soient en effet

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_p$$

les substitutions fondamentales de G. D'après les hypothèses faites, les substitutions

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma, \quad \sigma^{-1}\tau_2\sigma, \quad \ldots, \quad \sigma^{-1}\tau_p\sigma$$

feront également partie du groupe G. Mais ces substitutions diffèrent infiniment peu de

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_p$$

puisque σ est infinitésimale. Mais le groupe G étant discontinu ne devra contenir aucune substitution infinitésimale, il ne pourra donc contenir deux substitutions distinctes, mais différant infiniment peu l'une de l'autre. Donc on a

$$\tau_i = \sigma^{-1}\tau_i\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 266.

Donc σ est permutable aux substitutions fondamentales de G; elle est donc permutable à *toutes* les substitutions de ce groupe, qui n'en sont que des combinaisons.

Mais je dis qu'on ne saurait trouver de substitution linéaire permutable à toutes les substitutions de G. En effet pour que deux substitutions linéaires Σ et Σ' soient permutables, il faut et il suffit, ou bien qu'elles aient mêmes points doubles (les deux points doubles pouvant dans certains cas se confondre en un seul), ou bien qu'elles aient toutes deux pour multiplicateur -1 et que les quatre points doubles soient conjugués harmoniques.

Nous n'avons pas besoin de nous inquiéter de ce second cas de permutabilité. En effet une substitution infinitésimale ne peut avoir pour multiplicateur -1. Si donc le groupe G′ contenait une substitution infinitésimale σ, toutes les substitutions de G devraient avoir mêmes points doubles que σ; elles seraient donc toutes permutables entre elles, ce qui n'a pas lieu.

Donc G′ ne peut être continu.

2° G′ ne peut pas non plus être improprement discontinu. J'ai démontré en effet (*Groupes kleinéens*, p. 58) (¹) que tout groupe formé de substitutions linéaires conservant le cercle fondamental, et ne contenant pas de substitution infinitésimale, est proprement discontinu à l'intérieur du cercle fondamental.

Donc G′ est un groupe fuchsien.

Il aura donc un polygone générateur R'_0, et l'indice de G considéré comme sous-groupe de G′ sera égal à la S de R_0 (polygone générateur de G) divisée par la S de R'_0 [cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, p. 285) (²)]. Or la S de R_0 est finie, donc G est un sous-groupe d'indice fini. C. Q. F. D.

En général, le groupe G′ ne diffère pas du groupe G, de sorte que la surface S n'admet aucune transformation birationnelle en elle-même. Elle ne peut en avoir que dans des cas exceptionnels qui correspondent évidemment aux différents cas de symétrie que peut présenter le polygone R_0.

Soient maintenant deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 équivalentes, et de genre p.

Si l'on peut passer de l'une à l'autre par deux transformations birationnelles T et U, la transformation TU^{-1} changera en elle-même la surface S_0.

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 265.
(²) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 378.

D'où les conclusions suivantes :

1° Si $p = 0$, on peut passer de S_0 à S_1 par une triple infinité de transformations birationnelles.

2° Si $p = 1$, on peut passer de S_0 à S_1 par une simple infinité de transformations birationnelles.

3° Si $p > 1$, il n'y a en général qu'une seule transformation birationnelle qui permette de passer de S_0 à S_1, et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.

Grâce à ces propositions, il est aisé de retrouver les résultats que nous avons démontré plus haut pour les cas de $p = 0$ et de $p = 1$, et de traiter complètement le cas de $p > 1$.

I. Reprenons en effet l'équation

$$\text{(A)} \qquad F(y', y, z) = 0$$

et soit d'abord $p = 0$. On pourra poser

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles de t dont les coefficients dépendent de z.

Soient $y_0 = \varphi(t_0)$, $y'_0 = \psi(t_0)$ les valeurs initiales d'une certaine intégrale et de sa dérivée pour $z = z_0$, et

$$y_1 = \varphi(t_1), \qquad y'_1 = \psi(t_1)$$

les valeurs de cette même intégrale et de sa dérivée pour $z = z_1$. On a vu que y_1 et y'_1 doivent être fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 et réciproquement. On aura donc

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}.$$

Les coefficients de cette substitution linéaire α, β, γ, δ dépendent évidemment de z_0 et de z_1. Nous regarderons z_0 comme une constante, et z_1 sera la variable indépendante; nous supprimerons donc l'indice 1 de t_1, z_1, y_1, y'_1 et nous aurons

$$(6) \qquad t = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta},$$

où t_0 sera la constante d'intégration et où α, β, γ, δ seront des fonctions de z. Si α', β', γ', δ' sont les dérivées de ces fonctions; il viendra

$$(7) \qquad \frac{dt}{dz} = \frac{(\alpha' t_0 + \beta')(\gamma t_0 + \delta) - (\gamma' t_0 + \delta')(\alpha t_0 + \beta)}{(\gamma t_0 + \delta)^2},$$

En éliminant t_0 entre (6′) et (7) on retomberait sur l'équation de Riccati, ce qui confirme le résultat obtenu plus haut.

Si l'on remplace t par sa valeur (6′) dans l'expression

$$y = \varphi(t),$$

on trouve pour l'intégrale générale de l'équation (A)

$$y = \mathrm{R}(t_0),$$

R étant une fonction rationnelle de la constante d'intégration t_0 et dont les coefficients dépendent de z.

Réciproquement si l'on a une fonction y de t_0 et de z, rationnelle par rapport à t_0, et que l'on forme la dérivée $y' = \frac{dy}{dz}$, on obtiendra par l'élimination de t_0 une équation différentielle de la forme (A) entre y, y' et z.

Si en particulier l'équation (A) est algébrique, non seulement par rapport à y et à y', mais encore par rapport à z, l'équation de Riccati à laquelle on sera conduit aura ses coefficients algébriques en z, et par conséquent l'intégration de l'équation (A) sera ramenée à celle des équations linéaires du second ordre à coefficients algébriques.

II. Supposons maintenant $p = 1$. Nous pourrons poser

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques de t dont les coefficients dépendent de z. Conservons aux notations

$$z_0 = z, \quad y_0 = \varphi(t_0), \quad y'_0 = \psi(t_0), \quad y_1 = \varphi(t_1), \quad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. On sait que y_1 et y'_1 doivent être des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 et réciproquement. Donc d'après ce qu'on a vu plus haut sur les transformations des surfaces de genre 1 en elles-mêmes, on devra avoir

$$t_1 = \alpha t_1 + \beta,$$

α étant égal à l'une des quantités

$$1, \quad -1, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad -e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad \pm i.$$

Comme α et β doivent être des fonctions continues de z_1 et que t_1 doit se réduire à t_0 pour $z_0 = z_1$, on aura

$$\alpha = 1, \quad t_1 = t_0 + \beta.$$

Considérons z_0 comme constant, z_1 comme variable et supprimons l'indice 1 de z_1, t_1, y_1, y'_1.

β sera une fonction de z et l'intégrale générale de l'équation (A) sera

$$y = \varphi(t_0 - \beta),$$

φ étant une fonction doublement périodique dont les coefficients dépendront de z, β une fonction de z, et t_0 la constante d'intégration.

Si l'équation (A) est algébrique en z, les coefficients de la fonction doublement périodique $\varphi(t)$ dépendent *algébriquement* de z; et la fonction β de z s'obtient par une simple quadrature. Posons

$$u = \operatorname{sn}(t).$$

y sera une fonction algébrique de u et de z, si l'équation (A) est algébrique en z. Si l'équation (A) n'est pas algébrique en z et si elle s'écrit

$$\Sigma A_{mp} y^m y'^p = 0,$$

où les coefficients A_{mp} sont des fonctions non algébriques de z, y sera une fonction algébrique de u et des coefficients A_{mp}. Dans tous les cas on aura

$$u = \operatorname{sn}(t_0 - \beta),$$

t_0 étant la constante d'intégration. On reconnaît là le résultat obtenu plus haut.

III. Arrivons enfin au cas de $p > 1$. Faisons d'abord $z = z_0$ dans l'équation (A); cette équation représentera une certaine surface de Riemann S_0. Si l'on y fait $z = z_1$, on aura une surface équivalente S_1. Cette seconde surface dérive de la première par une seule transformation birationnelle ou par un nombre fini de pareilles transformations.

Soient

$$(A_0) \qquad F_0(y_0, y'_0) = 0,$$
$$(A_1) \qquad F_1(y_1, y'_1) = 0$$

les équations de ces deux surfaces de Riemann. On passera de l'une à l'autre en posant

$$(8) \qquad y_1 = R(y_0, y'_0), \quad y'_1 = R_1(y_0, y'_0),$$

R et R_1 représentant des fonctions rationnelles. Ces fonctions rationnelles R et R_1 sont telles que l'élimination de y_0, y'_0 entre l'équation (A_0) et les équations (8) conduit à l'équation (A_1). D'après ce que nous venons de voir, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions rationnelles qui jouissent de la même propriété.

Donc quand on connaîtra les équations (A_0) et (A_1) on pourra trouver les deux fonctions rationnelles R et R_1 *par des procédés purement algébriques.*

Comme les coefficients de (A_0) et (A_1) dépendent de z_0 et de z_1, il en sera de même des coefficients de R et R_1. Si nous regardons z_0 comme une constante, z_1 comme la variable indépendante, puis que nous supprimions l'indice 1 dans z_1, t_1, y_1, y'_1, il viendra, pour l'intégrale générale de (A),

$$y = R(y_0, y'_0),$$

R étant une fonction rationnelle des deux constantes d'intégration y_0 et y'_0, fonction rationnelle dont les coefficients dépendent de z. Les deux constantes d'intégration y_0 et y'_0 ne sont d'ailleurs pas indépendantes, car elles sont liées entre elles par l'équation (A_0).

Si en particulier l'équation (A) est algébrique en z, les coefficients de R dépendront algébriquement de z, et l'intégrale générale de l'équation (A) sera algébrique.

Si au contraire l'équation (A) s'écrit

$$\Sigma A_{mp} y^m y'^p = 0,$$

les coefficients A_{mp} étant des fonctions non algébriques en z, l'intégrale générale

$$y = R$$

sera une fonction algébrique non seulement de y_0, mais des coefficients A_{mp}.

Dans tous les cas, l'équation (A) s'intègre par des procédés purement algébriques.

On arrive d'ailleurs au même résultat par l'emploi des fonctions fuchsiennes. Écrivons encore l'équation (A) sous la forme

$$\Sigma A_{mp} y^m y'^p = 0.$$

Nous pourrons poser

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t),$$

φ et ψ étant deux fonctions fuchsiennes dont les coefficients dépendent de z. Soient ξ et η deux fonctions fuchsiennes, indépendantes de z et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura

$$y = R(\xi, \eta), \qquad y' = R_1(\xi, \eta),$$

R et R_1 étant des fonctions rationnelles de ξ et de η. Les coefficients de ces fonctions rationnelles dépendent de z, et il est aisé de voir de quelle manière : ce sont des fonctions algébriques des coefficients A_{mp}.

Conservons aux notations

$$z_0, \quad z_1, \quad y_0 = \varphi(t_0), \quad y'_0 = \psi(t_0), \quad y_1 = \varphi(t_1), \quad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. Le point analytique (y_1, y'_1) devra être lié au point analytique (y_0, y'_0) par une transformation birationnelle. On aura donc

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta},$$

la substitution

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

appartenant au groupe appelé plus haut G′.

Les coefficients α, β, γ, δ dépendent de z_0 et de z_1, mais ne peuvent être que des fonctions continues de z_1; de plus pour $z_1 = z_0$ on a $t_1 = t_0$. Mais le groupe G′ est discontinu. Donc on a *quels que soient* z_1 et z_0

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0,$$
$$t_1 = t_0.$$

Ainsi *t est une constante* et il en est par conséquent de même de ξ et de η qui ne dépendent que de t. L'intégrale générale de l'équation (A) est donc

$$y = R(\xi, \eta),$$

où l'on doit regarder ξ et η comme deux constantes d'intégration liées entre elles par une relation algébrique.

C'est le même résultat que plus haut.

Il reste deux questions à résoudre.

On peut se demander en premier lieu *s'il existe effectivement des équations intégrables algébriquement par le procédé que nous venons d'indiquer*, c'est-à-dire des équations algébriques de la forme (A), de genre $p > 1$ et satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

La réponse à cette première question doit être affirmative.

Soit en effet

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{9}$$

une relation algébrique quelconque de genre $p > 1$ dont les coefficients sont constants. Soient

$$x = \varphi(\xi, \eta), \qquad y = \psi(\xi, \eta), \tag{10}$$

où φ et ψ sont des fonctions rationnelles de ξ et de η dont les coefficients dépendent de z. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'ils en dépendent algébriquement. L'élimination de ξ et de η entre les équations (9) et (10) donnera une relation

$$(11) \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

où Φ est un polynome entier en x et y dont les coefficients dépendent de z. Considérée comme une relation entre x et y seulement, la relation (11) définit une surface de Riemann de genre p, qui reste équivalente à elle-même quand on fait varier z.

Différentions les relations (10) par rapport à z (c'est-à-dire en y regardant ξ et η comme des constantes), il viendra

$$\frac{dx}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{d\psi}{dz}.$$

$\frac{d\psi}{dz}$ est une fonction rationnelle de ξ et de η. Maintenant, des relations (9) et (10) on peut déduire les suivantes

$$(12) \qquad \xi = \varphi_1(x, y), \qquad \eta = \psi_1(x, y),$$

φ_1 et ψ_1 étant des fonctions rationnelles de x et de y dont les coefficients dépendent de z. Il viendra donc

$$(13) \qquad \frac{dy}{dz} = R(x, y),$$

R étant une fonction rationnelle de x et de y dont les coefficients dépendent de z. En éliminant x entre les équations (11) et (13) on arrivera à une équation de la forme (A), satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

On arriverait au même résultat en éliminant ξ et η entre les trois relations

$$F(\xi, \eta) = 0, \qquad y = \psi(\xi, \eta), \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{d\psi}{dz}.$$

Soit par exemple

$$(14) \qquad F(u, v, w) = 0$$

une équation dont le premier membre est un polynome entier homogène du quatrième degré en u, v, w.

Faisons-y

$$(15) \qquad \begin{cases} u = ax + by + c, \\ v = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ w = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases}$$

où les a, les b et les c sont des fonctions algébriques de z. Nous écrirons l'équation

$$F(ax + by + c, a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2) = 0.$$

Nous appellerons A, A_1, A_2, B, ... les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Il viendra

$$y = \frac{Bu + B_1 v + B_2 w}{Cu + C_1 v + C_2 w}$$

ou en différentiant par rapport à z et appelant B', B'_1, ... les dérivées de B, B_1, ... par rapport à z

$$(16) \quad \frac{dy}{dz} = \frac{(B'u + B'_1 v + B'_2 w)(Cu + C_1 v + C_2 w) - (C'u + C'_1 v + C'_2 w)(Bu + B_1 v + B_2 w)}{(Cu + C_1 v + C_2 w)^2}.$$

L'élimination de u, v, w et x entre les équations (14), (15) et (16) donnera une équation différentielle de la forme (A) satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

Passons à la seconde question qu'il nous restait à résoudre :

Étant donnée une équation différentielle algébrique (A), *de genre* $p > 1$, *satisfaisant aux conditions de M. Fuchs et que l'on sait par conséquent intégrable algébriquement, comment effectuer réellement cette intégration.*

On a vu d'après ce qui précède que cette question se ramène à la suivante :

Etant données deux surfaces de Riemann équivalentes, trouver la transformation birationnelle qui permet de passer de l'une à l'autre.

Le problème ainsi posé présente la plus grande analogie avec le problème de la réduction des formes arithmétiques. On conviendra de dire qu'une équation algébrique

$$F(x, y) = 0$$

est réduite lorsqu'on l'aura ramenée par une transformation birationnelle à une forme que l'on regardera comme plus simple que toutes les autres. Il faudrait choisir les conditions de réduction de façon :

1° Que l'on puisse toujours trouver la transformation birationnelle qui réduit une surface de Riemann donnée;

2° Qu'il n'y ait *en général* qu'une seule surface réduite équivalente à une surface de Riemann donnée et qu'il n'y en ait jamais qu'un nombre fini.

Alors on réduira les deux surfaces S_0 et S_1 que l'on veut transformer l'une dans l'autre : si les deux surfaces sont équivalentes, on devra parvenir à la même réduite et, comme on connaîtra la façon de transformer S_0 en la réduite et la réduite en S_1, on connaîtra aussi la transformation qui change S_0 en S_1.

Il est évidemment possible de trouver de pareilles conditions de réduction, ce qui rendrait complète l'analogie avec la théorie des formes arithmétiques. Mais cela n'est pas nécessaire ; on peut se contenter de conditions de réduction telles que la surface réduite ne dépende plus que d'un nombre fini de paramètres.

Par exemple, Clebsch démontre qu'une courbe de genre p

$$F(x, y) = 0$$

peut toujours être ramenée au degré $p+1$ (*Abel'sche Functionen*, p. 65). Après cette réduction, elle dépend encore de $p-1$ paramètres.

Soient donc

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(x', y') = 0$$

deux courbes de genre p qu'il s'agit de ramener l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Je ramènerai la première au degré $p+1$ par une transformation convenablement choisie ; elle deviendra

$$F_1(x_1, y_1) = 0. \tag{17}$$

Je pourrai trouver ensuite, par la méthode de Clebsch, une infinité de transformations birationnelles dépendant de $p-1$ paramètres arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$, qui ramèneront la seconde courbe au degré $p+1$. Après l'application d'une de ces transformations, l'équation de cette courbe deviendra

$$F_2(x_1, y_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) = 0, \tag{18}$$

où j'ai mis en évidence les paramètres α. Si les deux surfaces de Riemann sont équivalentes, on pourra disposer des α de façon à identifier les équations (17) et (18) et l'on connaîtra du même coup la transformation qui fait passer d'une surface à l'autre.

On peut ainsi ramener la recherche des transformations birationnelles qui changent S_0 en S_1 à l'étude de l'équivalence des formes algébriques, c'est-à-dire de la transformation d'une telle forme en une autre par une substitution linéaire.

Soient

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x_1, y_1) = 0$$

deux équations qui représenteront deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 et en même temps deux courbes algébriques C_0 et C_1. Soient m_0 et m_1 les degrés de ces deux courbes qui auront le même genre p. Soit

$$(19) \qquad A_1 \varphi_1(x, y) + A_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + A_p \varphi_p(x, y) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_0 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_0. Soit de même

$$(20) \qquad B_1 \psi_1(x_1, y_1) + B_2 \psi_2(x_1, y_1) + \ldots + B_p \psi_p(x_1, y_1) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_1 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_1. Soient

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$
$$\Theta_1(B_1, B_2, \ldots, B_p) = 0$$

les deux relations algébriques et homogènes par rapport aux A et aux B qui expriment, la première que la courbe (19) est tangente à C_0, la seconde que la courbe (20) est tangente à C_1. Si, d'autre part, x et y sont les coordonnées du point de contact des deux courbes (19), et C_0, si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact de (20) et de C_1, on aura

$$x = R(A_1, A_2, \ldots, A_p), \qquad y = R'(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$x_1 = R_1(B_1, B_2, \ldots, B_p), \qquad y_1 = R'_1(B_1, B_2, \ldots, B_p),$$

les fonctions R, R', R_1, R'_1 étant rationnelles.

Si les deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 ont mêmes modules, les deux formes algébriques Θ et Θ_1 seront algébriquement équivalentes, c'est-à-dire qu'on pourra passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire, ou en posant

$$A_i = \Sigma_k \alpha_{ik} B_k,$$

les α_{ik} étant des coefficients constants.

La transformation birationnelle qui change S_0 en S_1 sera alors facile à trouver. On aura en effet

$$(21) \qquad \begin{cases} x = R(\Sigma \alpha_{1k} B_k, \Sigma \alpha_{2k} B_k, \ldots, \Sigma \alpha_{pk} B_k), \\ y = R'(\Sigma \alpha_{1k} B_k, \Sigma \alpha_{2k} B_k, \ldots, \Sigma \alpha_{pk} B_k) \end{cases}$$

avec les conditions

$$(22) \qquad F_1(x_1, y_1) = 0, \qquad \Sigma B_i \psi_i(x_1, y_1) = 0, \qquad \Sigma B_i \theta_i(x_1, y_1) = 0,$$

où l'on a posé

$$\Theta_i = \frac{d\psi_i}{dx_1}\frac{dF_1}{dy_1} - \frac{d\psi_i}{dy_1}\frac{dF_1}{dx_1}.$$

On pourra toujours trouver p fonctions rationnelles de x_1 et de y_1

$$\rho_1(x_1, y_1), \quad \rho_2(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad \rho_p(x_1, y_1),$$

qui, substituées à la place de $B_1, B_2, \ldots, B_p$, satisfont aux relations (22). On remplacera alors B_i par $\rho_i(x_1, y_1)$ dans les équations (21) et l'on obtiendra ainsi la transformation birationnelle qui change S_0 en S_1.

Les invariants qui restent arbitraires dans la forme algébrique Θ sont au nombre de $3p-3$ et ils doivent être regardés comme les modules de la surface de Riemann S_0.

Il est une circonstance sur laquelle je désirerais maintenant attirer l'attention et qui facilite singulièrement la recherche des conditions d'équivalence des deux formes Θ et Θ_1 et de la substitution linéaire qui les transforme l'une dans l'autre.

Parmi les courbes (19), il y en a $2^{p-1}(2^p-1) = P$ qui sont $p-1$ fois tangentes à C_0; nous les appellerons les courbes k_0; de même il y aura, parmi les courbes (20), P courbes k_1 qui seront $p-1$ fois tangentes à C_1. La substitution linéaire

$$A_i = \Sigma \alpha_{ik} B_k$$

qui change Θ en Θ_1 devra transformer les P courbes k_0 dans les P courbes k_1. Il pourrait y avoir, dans le problème général, une assez grande indétermination; car on pourrait se demander quelle est celle des P courbes k_0 qui se transformera dans une courbe k_1 donnée. Il y aurait $\underline{|P}$ combinaisons logiquement possibles, ce qui obligerait à faire un nombre très considérable d'essais inutiles.

D'autres considérations viendraient, il est vrai, réduire le nombre des combinaisons logiquement possibles; telle serait par exemple, pour $p=3$, la distribution des 28 tangentes doubles en 64 systèmes de 4. Mais ce nombre n'en resterait pas moins très grand.

Fort heureusement, dans le problème particulier qui nous occupe, cette indétermination n'existe pas. Quelle est celle des courbes k_0 qui se transforme dans une courbe donnée k_1? La réponse est simple : c'est la courbe k_0 à laquelle se réduit la courbe donnée k_1 quand z_1 se réduit à z_0.

On arrive même ainsi, presque immédiatement, à déterminer un grand nombre d'intégrales particulières de l'équation (A).

En effet, soit l'équation

$$\text{(A)} \qquad F(y, y', z) = 0$$

pour $z = z_1$, elle représente une courbe C_1, qui est tangente en $P(p-1)$ points aux courbes k_1. Considérons y, y' et z_1 comme les coordonnées d'un point dans l'espace; lorsqu'on fera varier z_1, les $P(p-1)$ points de contact (y, y') de C_1 avec les P courbes k_1 décriront dans l'espace $P(p-1)$ courbes qui seront des intégrales particulières de l'équation (A).

Il n'y a donc aucune difficulté à craindre dans les calculs algébriques qui conduisent à l'intégration de l'équation (A).

Remarquons en passant que la considération des P courbes k_0 nous conduit à une seconde démonstration de ce théorème, qu'une surface de Riemann ne peut jamais être transformée en elle-même par une infinité de transformations birationnelles.

J'arrive à la conclusion définitive de ce travail. *Les équations du premier ordre qui satisfont aux conditions de M. Fuchs ne constituent pas des classes réellement nouvelles d'équations différentielles.*

Dans le cas de $p = 0$, *elles se ramènent aux équations linéaires;*

Dans le cas de $p = 1$, *elles s'intègrent par une simple quadrature;*

Enfin dans le cas de $p > 1$, *elles s'intègrent par des procédés purement algébriques.*

Nous devons donc renoncer à l'espoir de rencontrer parmi elles des classes essentiellement nouvelles d'équations intégrables par les transcendantes fuchsiennes. Tout au plus pourrions-nous supposer qu'il en existe de pareilles, parmi les équations d'ordre supérieur; mais on ne pourra s'en assurer que par une discussion spéciale, analogue à celle qui précède.

Le beau résultat de M. Fuchs en perd-il pour cela son intérêt? Je ne le crois pas. Il nous fournit en effet une classe très nombreuse d'équations différentielles intégrables algébriquement. Les conditions de M. Fuchs sont très simples et il suffit d'un examen assez rapide pour reconnaître si elles sont remplies. On reconnaît du même coup l'intégrabilité algébrique, qui sans cette circonstance aurait pu passer inaperçue.

De plus, on peut fonder sur ce théorème une méthode pour trouver les modules d'une surface de Riemann; mais c'est là un point que je ne puis développer en ce moment.

Paris, 15 novembre 1884.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 761-764 (13 avril 1891).

La question de l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle le méritait. La voie a été ouverte, il y a vingt ans, par un admirable travail de M. Darboux; mais les analystes ont été fort longtemps sans s'y engager, et ce n'est que tout récemment que le problème a été repris par MM. Painlevé et Autonne, dans deux Mémoires que l'Académie vient de récompenser. L'importance du sujet me décide à publier quelques résultats qui s'y rapportent, bien qu'ils soient fort incomplets.

J'écrirai l'équation différentielle sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant trois polynomes entiers, homogènes et de degré m en x, y et z. Le nombre m s'appellera la *dimension* de l'équation.

Si l'intégrale générale est algébrique, elle s'écrira

$$f + C\varphi = 0,$$

C étant une constante arbitraire, et f et φ étant deux polynomes homogènes d'ordre p en x, y et z. J'appellerai *remarquables* les valeurs de C pour lesquelles le polynome $f + C\varphi$ n'est pas irréductible. Si l'intégrale générale algébrique a été mise sous sa forme la plus simple, ce que nous supposerons, le nombre des valeurs remarquables est fini.

Le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles serait résolu si l'on avait, dans tous les cas, une limite supérieure du nombre p.

Les points singuliers de l'équation différentielle sont donnés par les équations

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}.$$

Ils sont au nombre de $m^2 + m + 1$; *nous les supposerons tous distincts.*

Soit alors x_0, y_0, z_0 un de ces points singuliers; dans le voisinage de ce point, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$X_1 X_2^S = \text{const.},$$

S étant une constante, et X_1, X_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0}$, $\frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0}$, s'annulant au point singulier.

Il y a quelques cas d'exception : s'ils se présentaient, on serait certain que l'équation n'est pas intégrable algébriquement; on en serait certain également si, pour un des points singuliers, l'exposant S n'était pas réel et commensurable.

Supposons donc que S soit réel et commensurable; nous appellerons *nœuds* les points pour lesquels cet exposant est positif, *cols* ceux pour lesquels il est négatif.

Nous poserons $S = \frac{\mu}{\nu}$ pour les nœuds, $S = -\frac{\mu}{\nu}$ pour les cols, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux.

J'envisage un nœud et je suppose que la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

ait en ce nœud λ branches distinctes; ce nœud sera d'ailleurs, en général, un point singulier pour chacune de ces branches.

Je démontre que l'on a

$$p^2 \geq S\lambda^2\mu\nu, \qquad (m+2)p \geq S\lambda(\mu+\nu),$$

les sommations du second membre devant être étendues à tous les nœuds.

M. Painlevé a posé le problème suivant : *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation différentielle est une courbe algébrique de genre donné*, et il a énoncé un certain nombre de remarquables propositions qui peuvent aider à trouver la solution, au moins dans certains cas particuliers.

Je trouve, en appelant q le genre,

$$q = 1 + S\frac{\lambda}{2}\left[(\mu - 2)\frac{m-1}{m-2} - 1\right];$$

cette formule contient la solution du problème de M. Painlevé toutes les fois que $m > 4$.

Considérons une valeur remarquable de C et supposons que $f + C\varphi$ ne se réduise pas à une puissance d'un polynome irréductible; je démontre que la courbe $f + C\varphi = 0$ va alors passer par un col.

Je montre encore que le nombre total des valeurs remarquables ne peut dépasser le nombre des cols de plus de deux unités.

Voici quelques autres résultats :

Si tous les nœuds ont pour exposant $S = -1$, le nombre de ces nœuds est au moins égal à $\frac{(m-2)^2}{4}$.

Si l'on a $S = +1$ pour tous les nœuds et $S = -1$ pour tous les cols, le nombre des nœuds est précisément égal à $\frac{(m+2)^2}{4}$.

Si, pour les cols, on a $S = -1$, on a la formule

$$\alpha_1\alpha_2(m-2) = p(\alpha_1 + \alpha_2),$$

α_1 et α_2 étant deux entiers premiers entre eux.

Cette formule limite le nombre p et, par conséquent, résout complètement le problème dans ce cas particulier.

Le principe qui m'a conduit à ce résultat est peut-être susceptible d'être étendu à des cas plus généraux; j'espère que plus d'un chercheur s'y efforcera dès que mes démonstrations seront publiées.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

ET DU PREMIER DEGRÉ [1].

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 5, p. 161-191 (1891).

Introduction.

Pour reconnaître si une équation différentielle du premier ordre et du premier degré est intégrable algébriquement, il suffit évidemment de trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale; il ne reste plus ensuite qu'à effectuer des calculs purement algébriques.

C'est là un problème qui, semble-t-il, aurait dû tenter les géomètres, et cependant ils s'en sont fort peu occupés. Depuis l'œuvre magistrale de M. Darboux, publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, la question a été négligée pendant vingt ans et il a fallu, pour attirer de nouveau sur elle l'attention qu'elle méritait, que l'Académie des Sciences la proposât comme sujet du concours pour le Grand Prix des Sciences mathématiques. Deux Mémoires furent récompensés, M. Painlevé obtint le prix et M. Autonne une mention honorable : l'un de ces deux Mémoires a été publié dans les *Annales de l'École Normale supérieure* et l'autre dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Les inégalités et les égalités ajoutées par ces deux savants à celles que M. Darboux nous avait fait connaître faisaient faire à la question un progrès très important, mais elles ne pouvaient suffire à l'épuiser complètement. Sup-

(1) Présenté le 26 avril 1891, imprimé le 8 mai 1891.

posons, en effet, que l'intégrale générale s'écrive

$$F = \text{const.},$$

F étant une fraction rationnelle; on obtiendra une autre forme de l'intégrale générale en égalant à une constante un polynome entier quelconque par rapport à F. Il en résulte qu'on ne peut trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale générale algébrique, à moins qu'on ne trouve un moyen quelconque d'exprimer, dans les inégalités, que cette intégrale est irréductible.

C'est ce moyen que je me suis proposé de trouver.

M. Painlevé a parfaitement aperçu cette difficulté, mais il n'a pu en triompher; aussi n'a-t-il pu résoudre le problème dans toute sa généralité, mais seulement démontrer, dans un certain nombre de cas, que l'intégrale ne peut être algébrique.

Je n'apporte pas non plus une solution générale, et je me suis encore borné à un cas particulier; mais j'ai lieu d'espérer que ce problème tentera les chercheurs et qu'ils parviendront d'ici peu à généraliser le procédé qui m'a réussi.

M. Painlevé a posé le problème suivant : reconnaître si une équation différentielle donnée admet une intégrale algébrique de genre donné; et il a obtenu divers résultats qui peuvent, dans certains cas, en faciliter la solution. Je donne plus loin une formule qui contient la solution complète du problème de M. Painlevé, toutes les fois que la dimension de l'équation différentielle est supérieure à 4.

J'ai démontré quelques propriétés des équations intégrables algébriquement. De pareils résultats n'ont pas pour le moment grande valeur; mais ils pourraient en acquérir le jour où l'on pourra reconnaître si ces propriétés s'étendent aux équations non intégrables, ou si elles ne sont pas toujours vraies pour ces équations; dans le premier cas, en effet, on aurait un théorème général applicable à toutes les équations différentielles, et dans le second cas on posséderait un critérium permettant de démontrer que les équations de certaines catégories ne sont pas intégrables.

En ce qui concerne la limitation du degré, qui était mon but principal, je me suis borné au cas où l'exposant de tous les cols est égal à -1.

Résultats de M. Darboux.

Adoptons les notations de M. Darboux et écrivons l'équation différentielle sous la forme homogène, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des polynomes entiers, homogènes et de degré m en x, y, z. Le nombre m est ce qu'on appelle la *dimension* de l'équation différentielle.

Si cette équation est intégrable algébriquement, l'intégrale générale s'écrira

$$(2)\qquad f - \mathrm{C}\varphi = 0,$$

f et φ étant deux polynomes homogènes d'ordre p en x, y et z, et C une constante arbitraire. On déduit de l'équation (2) l'équation différentielle suivante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L}_1 & \mathrm{M}_1 & \mathrm{N}_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\mathrm{L}_1 = \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz}, \qquad \mathrm{M}_1 = \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\mathrm{N}_1 = \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Si donc on appelle Δ le premier membre de (1), et Δ_1 celui de (3), on aura identiquement

$$\Delta_1 = \mathrm{F}.\Delta,$$

F étant un polynome homogène en x, y, z. Soit h le degré de ce polynome, on aura

$$2p - 2 = m + h.$$

Comment formerons-nous ce facteur F? M. Darboux nous l'apprend également.

Il peut arriver que pour certaines valeurs de C, que nous appellerons *valeurs remarquables*, la courbe

$$f - \mathrm{C}\varphi = 0$$

soit décomposable. Il pourra arriver que pour certaines valeurs remarquables

de C que nous appellerons *critiques*, on ait

$$f - C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k},$$

les u_i étant des polynomes entiers homogènes, et les exposants α_i n'étant pas tous égaux à 1.

On aura alors

$$F = \Pi\, u_i^{\alpha_i - 1},$$

le produit désigné par la lettre Π étant étendu à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i (ceux dont l'exposant est plus grand que 1 interviendront seuls, car, pour les autres, $\alpha_i - 1$ s'annule et le facteur correspondant se réduit à l'unité).

On a donc, si n_i est le degré de u_i,

$$h = \Sigma(\alpha_i - 1)n_i,$$

d'où

(2) $$m + ([illegible])\,p = \Sigma(\alpha_i - 1)n_i,$$

la sommation représentée par la lettre Σ étant étendue à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i.

On aura, d'autre part,

(3) $$p = \mathbf{S}\,\alpha_i n_i,$$

la sommation représentée par la lettre **S** étant étendue à une seule valeur remarquable ou critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur.

Des points singuliers.

Les points singuliers de l'équation (1) sont donnés par les équations

(4) $$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}.$$

M. Darboux a montré que ces points singuliers sont au nombre de

$$m^2 + m + 1.$$

Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que ces $m^2 + m + 1$ points singuliers sont tous distincts.

Formons l'équation suivante en S,

$$(5)\qquad \left(z\frac{dL}{dx}-x\frac{dN}{dx}-N-S\right)\left(z\frac{dM}{dy}-y\frac{dN}{dy}-N-S\right) \\ -\left(z\frac{dL}{dy}-x\frac{dN}{dy}\right)\left(z\frac{dM}{dx}-y\frac{dN}{dx}\right)=0,$$

où l'on donne à x, y, z les valeurs qui correspondent à un point singulier.

On démontre que si S_1 et S_2 sont les racines de cette équation en S, l'intégrale générale peut dans le voisinage du point singulier être mise sous la forme

$$(6)\qquad X_1^{S_1}X_2^{S_2}=\text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{x}{z}-\frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z}-\frac{y_0}{z_0}$, en appelant x_0, y_0, z_0 le point singulier considéré.

Il pourrait y avoir une exception dans divers cas :

1° Si l'équation (5) se réduit à une identité. Cela n'arrivera pas si, comme nous l'avons supposé, les m^2+m+1 points singuliers sont distincts.

2° Si l'équation (5) a une racine nulle. Cela n'arrivera pas non plus si les m^2+m+1 points singuliers sont distincts.

3° Si l'on a $S_1=S_2$. Il arrivera alors, en général, que l'intégrale générale pourra se mettre sous la forme suivante

$$\frac{X_2}{X_1}+A\log X_1=\text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées selon les puissances croissantes de $\frac{x}{z}-\frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z}-\frac{y_0}{z_0}$ et A une constante numérique. Le point singulier est alors un point *logarithmique*. Dans certains cas la constante A est nulle; le point singulier est alors ce que M. Autonne appelle un point *dicritique*.

4° Si le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est réel négatif. Le point singulier s'appelle alors un *col*. Il arrive, en général, que l'intégrale générale ne peut pas se mettre sous la forme (6); le col est alors *irrégulier;* mais il peut arriver également, dans certains cas particuliers, que l'intégrale générale puisse se mettre sous la forme (6), le col est alors *régulier*.

Pour que l'équation (1) soit intégrable algébriquement, il faut (mais il ne suffit pas) : 1° que pour les points singuliers le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ soit réel et commen-

surable; 2° que, si pour certains points ce rapport est égal à 1, ces points soient dicritiques et non logarithmiques; 3° et enfin que tous les cols soient réguliers.

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ s'appellera l'*exposant* du point singulier.

Les points singuliers pour lesquels ce rapport est réel et positif s'appelleront des *nœuds* (les points dicritiques sont donc des nœuds). Ceux pour lesquels ce rapport est réel et négatif s'appelleront des *cols*.

Si l'exposant d'un nœud est commensurable et égal à $\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les *entiers caractéristiques* du nœud.

De même, si l'exposant d'un col est commensurable et égal à $-\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les entiers caractéristiques de ce col.

Si l'équation (1) est intégrable algébriquement, tous les points singuliers sont des nœuds ou des cols.

Des nœuds dicritiques.

Nous venons de définir plus haut les points singuliers dicritiques qui sont toujours des nœuds. En un nœud dicritique la courbe

$$f - C\varphi = 0$$

présente en général un point multiple d'ordre λ dont les tangentes sont distinctes. Mais il peut arriver que pour les valeurs remarquables de C, deux ou plusieurs de ces tangentes se confondent.

Soit C_1 une valeur remarquable de C, de telle sorte que

$$f - C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_k^{\alpha_k}.$$

Supposons que pour la courbe $u_i = 0$ le nœud dicritique considéré soit un point multiple d'ordre λ_i; la courbe $u_i = 0$ étant indécomposable, les λ_i tangentes seront distinctes. D'autre part, les courbes $u_i = 0$ et $u_j = 0$ étant distinctes, les λ_i tangentes à $u_i = 0$ seront distinctes des λ_j tangentes à $u_j = 0$.

On aura d'ailleurs

$$\lambda = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_k\lambda_k,$$

ou, en conservant à la lettre S la même signification que plus haut,

$$(7) \qquad \lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i\lambda_i.$$

Le nœud dicritique considéré est pour Δ_1 un point d'ordre

$$2\lambda - 1$$

et pour F un point d'ordre

$$\Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Il doit être pour $\Delta = \frac{\Delta_1}{F}$ un point d'ordre 1, ce qui nous donne la relation

$$(\delta) \qquad 2 = 2\lambda - \Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Examinons en particulier le cas où *tous les nœuds sont dicritiques.*

Deux courbes

$$f + C_0\varphi = 0, \qquad f + C_1\varphi = 0$$

correspondant à deux valeurs C_0 et C_1 de C ne peuvent avoir d'autre point commun que les nœuds; de plus, si l'on considère un nœud dicritique, les λ tangentes à la première courbe différeront des λ tangentes à la seconde courbe, de sorte que ce nœud comptera pour λ^2 points d'intersection. Il vient donc

$$(6) \qquad p^2 = S\lambda^2,$$

le signe S signifiant que la sommation doit être étendue à tous les nœuds que nous supposons tous dicritiques.

Un point multiple d'ordre λ, dont les tangentes sont distinctes, a pour effet d'abaisser le genre de $\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$ unités.

On a donc pour le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$

$$(7) \qquad q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - S\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}.$$

D'autre part, envisageons l'intersection de la courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

avec la courbe $u_i = 0$ qui est un facteur de $f + C_1\varphi$, C_1 étant une valeur remarquable de C. La première est d'ordre p, la seconde d'ordre n_i, et le nombre des intersections doit être pn_i.

D'ailleurs le nombre des intersections situées en un nœud dicritique est $\lambda\lambda_i$, ce qui donne

$$(8) \qquad pn_i = S\lambda\lambda_i.$$

Comparons maintenant les relations (α), (β), (γ), (δ), (6), (7), (8).

Multiplions la relation (8) par $(\alpha_i - 1)$ et faisons la somme de toutes les relations analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les fac-

teurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1 ; il viendra

$$p\,\Sigma(\alpha_i - 1)n_i = S\lambda\,\Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i$$

ou bien

$$p(2p - m - 2) = S\lambda(2\lambda - 2);$$

d'où une première remarque : si m n'est pas pair, p doit être pair. L'équation nous donne d'ailleurs

$$2p^2 - (m + 2)p = 2S\lambda^2 - 2S\lambda,$$

d'où

$$(m + 2)p = 2S\lambda.$$

Mais nous avons écrit

$$q = \frac{p^2}{2} - \frac{3p}{2} + 1 - \frac{S\lambda^2}{2} + \frac{S\lambda}{2} = \left(\frac{m + 2}{4} - \frac{3}{2}\right)p + 1,$$

ou enfin

(9) $$q = \frac{m - 4}{4}p + 1.$$

Cela prouve :

1° Que p ou m doivent être divisibles par 4, ou qu'ils doivent être tous deux pairs ;

2° Que si $m = 4$, le genre est égal à 1 ;

3° Que si $m < 4$, le genre est égal à 0 ; donc $p = \frac{4}{4 - m}$, d'où $p = 2$ pour $m = 2$, $p = 4$ pour $m = 3$;

4° Que si $m > 4$, le genre est plus grand que 1.

Des nœuds monocritiques. — Abandonnons maintenant le cas particulier où tous les nœuds sont dicritiques. Un nœud *monocritique* (c'est-à-dire dont l'exposant n'est pas égal à 1) est pour chacune des branches de courbe qui y passent un point multiple d'ordre μ, μ étant le plus petit des deux entiers caractéristiques μ et ν.

Il y a exception pour deux branches de courbes remarquables, à savoir pour les branches de courbe

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0;$$

pour ces deux branches le nœud est un point simple.

Considérons la courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

et supposons qu'elle admette λ branches de courbe passant par le nœud considéré. Cherchons quel est l'abaissement correspondant du genre et le nombre

des points d'intersection de deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$ qui se trouvent au nœud considéré.

Pour cela, il nous faut d'abord connaître le nombre des points d'intersection de deux branches de courbe.

Les équations de ces deux branches de courbe pourront s'écrire

$$X_1^\mu = \gamma X_2^\nu, \qquad X_1^\mu = \gamma' X_2^\nu,$$

γ et γ' étant deux constantes; or, en combinant ces deux équations linéairement entre elles, on trouve

$$X_1^\mu = 0, \qquad X_2^\nu = 0,$$

ce qui montre que le nombre cherché est égal à $\mu\nu$.

Considérons alors les deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$; chacune des λ branches de la première coupe chacune des λ branches de la seconde en $\mu\nu$ points confondus. Le nœud compte donc en tout pour $\lambda^2\mu\nu$ intersections.

Il en résulte que la formule (6) doit être remplacée par la suivante

$$p^2 = S\lambda^2\mu\nu. \tag{6 bis}$$

Passons à l'abaissement du genre.

En appliquant une règle connue, on trouve que cet abaissement est égal à

$$\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}(\mu + \nu),$$

de sorte que la formule (7) devient

$$q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - S\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} - S\frac{\lambda}{2}(1 - \mu - \nu). \tag{7 bis}$$

Considérons maintenant les valeurs remarquables de C; soit C_1 une de ces valeurs, et soit

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_h^{\alpha_h}.$$

Nous dirons qu'un facteur u_i est *singulier* par rapport au nœud monocritique considéré, s'il s'annule identiquement pour $X_1 = 0$ ou pour $X_2 = 0$.

Si le facteur u_i est singulier et s'annule identiquement pour $X_1 = 0$, son exposant α_i doit être divisible par μ. S'il s'annule identiquement pour $X_2 = 0$, l'exposant α_i devra être divisible par ν.

Mais il peut arriver que le facteur u_i soit *doublement singulier* et qu'il s'annule identiquement tant pour $X_1 = 0$ que pour $X_2 = 0$. Dans ce cas l'exposant α_i est divisible par $\mu\nu$.

Enfin, il peut se faire qu'un même facteur u_i soit singulier par rapport à plusieurs nœuds monocritiques.

Pour chaque nœud monocritique, il existe toujours deux facteurs singuliers (ou un seul facteur doublement singulier) correspondant soit à une même valeur remarquable de C, soit à deux valeurs remarquables différentes de C ; et il n'en existe que deux.

On peut faire une distinction de plus ; supposons $\mu < \nu$; nous dirons que le facteur u_i est *critique* s'il s'annule pour $X_1 = o$ et *hypercritique* s'il s'annule pour $X_2 = o$.

Cherchons d'abord quel est, en un nœud monocritique, le nombre des points d'intersection d'une courbe indécomposable

$$f + C\varphi = o$$

et d'une courbe $u_i = o$.

Soit λ_i le nombre des branches de la courbe $u_i = o$ qui passent par le nœud considéré. Pour chacune de ces branches le nœud sera un point multiple d'ordre μ (je suppose toujours $\mu < \nu$) sauf pour une d'entre elles (pour laquelle le nœud sera un point simple) si le facteur u_i est singulier et pour deux d'entre elles s'il est doublement singulier.

Pour deux branches de courbes quelconques, le nombre des points d'intersection confondus avec le nœud est égal à $\mu\nu$; il y a exception si l'une des branches de courbe est $X_1 = o$, ou $X_2 = o$. Si c'est $X_1 = o$, le nombre des intersections est égal à ν, et pour $X_2 = o$ il est égal à μ.

Donc, pour nos deux courbes le nombre total des intersections confondues avec le nœud sera

$\lambda\lambda_i\mu\nu$	si le facteur u_i n'est pas singulier,
$\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda(\mu - 1)\nu$	s'il est critique,
$\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda(\nu - 1)\mu$	s'il est hypercritique,
$\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda[(\mu - 1)\nu + (\nu - 1)\mu]$	s'il est doublement singulier.

Que devient la formule (γ) ?

Le nœud est pour la courbe $u_i = o$ un point multiple d'ordre

$\lambda_i\mu$	si le facteur u_i n'est pas singulier,
$(\lambda_i - 1)\mu - 1$	s'il est singulier,
$(\lambda_i - 2)\mu + 2$	s'il est doublement singulier.

D'autre part, soit C_1 une valeur remarquable de C. Le nœud sera pour la courbe $f + C_1\varphi = o$, un point multiple d'ordre $\lambda\mu$ si aucun des facteurs

de $f + C_1\varphi$ n'est hypercritique (ou doublement singulier), mais si l'un des facteurs est hypercritique et que son exposant soit égal à α_1, ce sera un point multiple d'ordre $\lambda\mu + \frac{\alpha_1}{\nu}(\nu - \mu)$. D'où les équations suivantes qui sont les différentes formes de l'équation (γ) :

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i$ s'il n'y a aucun facteur singulier,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)$ s'il y a un facteur critique d'exposant α_1,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur hypercritique d'exposant α_1,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur critique d'exposant α_1 et un facteur hypercritique d'exposant α_2,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_1\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur doublement singulier d'exposant α_1.

Le nœud sera pour F un point multiple d'ordre

$$\Sigma(\alpha - 1)\lambda\mu - (\alpha_1 - 1)(\mu - 1) - (\alpha_2 - 1)(\nu - 1),$$

en appelant α_1 et α_2 les exposants des deux facteurs critique et hypercritique qui existent toujours.

Le nœud sera aussi pour Δ_1 un point multiple, mais de quel ordre?

Le déterminant fonctionnel de f et de φ par rapport à z et à y par exemple (que nous avons appelé L_1) est égal au produit du déterminant de f et de φ par rapport à X_1 et à X_2, multiplié par le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à z et à y.

Il importe de remarquer que les deux séries X_1 et X_2 ne sont pas entièrement déterminées. En effet, nous les avons définies en écrivant que dans le voisinage du nœud l'intégrale de notre équation s'écrit

$$X_1^\mu = \text{const.}\, X_2^\nu.$$

Si Y est une série quelconque ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud, on peut remplacer X_1 et X_2 par

$$X_1 Y^\nu \text{ et } X_2 Y^\mu.$$

Parmi toutes ces déterminations de X_1 et de X_2 on peut en choisir une, telle que f et φ soient des polynomes homogènes d'ordre λ en X_1^μ et X_2^ν.

Alors le déterminant fonctionnel de f et φ par rapport à X_1 et X_2 est un

polynome homogène d'ordre $2\lambda - 2$ en X_1^μ et X_2^ν, que j'appellerai P, multiplié par $X_1^{\mu-1}$ et $X_2^{\nu-1}$.

Le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à y et à z ne s'annule pas en général et en tout cas les trois déterminants

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)}, \qquad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(z, x)}, \qquad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annulant pas à la fois, on peut toujours supposer que le premier n'est pas nul au nœud. On a alors

$$L_1 = \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)} P X_1^{\mu-1} X_2^{\nu-1}.$$

Pour P le nœud est un point multiple d'ordre $(2\lambda - 2)\mu$ si ce polynome ne s'annule pas pour $X_2 = 0$, mais cela n'arrive que si $\alpha_2 = \nu$; dans le cas contraire c'est pour P un point multiple d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu - \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu),$$

pour L_1 il est d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + (\mu - 1) + (\nu - 1) - \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu)$$

et pour Δ_1 d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 - \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu).$$

Mais nous savons que ce doit être un point simple pour Δ, il vient donc

$$(2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 - \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu)$$
$$= \Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i\mu - (\alpha_1 - 1)(\mu - 1) - (\alpha_2 - 1)(\mu - 1) + 1;$$

ou, en divisant par μ,

(9) $$(2\lambda - 2) + \alpha_1\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Que devient maintenant la formule (8)?

Quel est le nombre total des points d'intersection de la courbe indécomposable $f + C\varphi = 0$ avec $u_i = 0$?

J'appelle ε_i un nombre relatif à u_i et à un des nœuds. Ce nombre sera nul si u_i n'est pas singulier par rapport à ce nœud; il sera égal à $(\mu - 1)\nu$ s'il est critique, à $(\nu - 1)\mu$ s'il est hypercritique, à $(\mu - 1)\nu + (\nu - 1)\mu$ s'il est doublement singulier. Il vient

$$pu_i = S(\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda\varepsilon_i).$$

Multiplions cette relation par $\alpha_i - 1$ et faisons la somme de toutes les rela-

tions analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les facteurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1 ; il vient

$$p\,\Sigma(\alpha_i-1)\,u_i = S\,[\lambda\,\mu\,\nu\,\Sigma(\alpha_i-1)\,\lambda_i] - S\,\lambda\,\Sigma(\alpha_i-1)\,\varepsilon_i.$$

Mais d'après la signification de ε_i et en appelant encore α_1 et α_2 les exposants des facteurs critiques et hypercritiques, on a

$$\Sigma(\alpha_i-1)\,\varepsilon_i = (\alpha_1-1)(\mu-1)\nu + (\alpha_2-1)(\nu-1)\mu.$$

D'autre part

$$\mu\,\nu\,\Sigma(\alpha_i-1)\,\lambda_i = (2\lambda-2)\,\mu\,\nu + \alpha_1\nu(\mu-1) + \alpha_2\,\mu(\nu-1).$$

Il vient alors

$$p(2p-m-2) = S\,\lambda\,\mu\,\nu(2\lambda-2) + S\,\lambda_i(\mu-1)\,\nu + S\,\lambda(\nu-1)\,\mu,$$

ou

$$(10)\qquad (m+2)\,p = S\,\lambda(\mu+\nu).$$

Or

$$q = \frac{p^2-3p+2}{2} - S\,\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} - S\,\frac{\alpha}{2}(1-\mu-\nu) - 1 = -\frac{3p}{2} + S\,\frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1),$$

d'où

$$(11)\qquad q = 1 + S\,\frac{\lambda}{2}\left(\mu+\nu-1-\frac{3(\mu+\nu)}{m+2}\right).$$

Si, par exemple, $m=4$, il vient

$$q = 1 + S\,\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\mu+\nu}{2}-1\right).$$

On voit ainsi que pour $m=4$, et *a fortiori* pour $m>4$, le genre est toujours plus grand que 1.

Quelle est la condition pour qu'on puisse reconnaître si l'équation différentielle comporte une solution générale algébrique de genre donné? C'est que tous les coefficients du second membre de (11) soient de même signe ; c'est-à-dire que

$$(\mu+\nu)\left(1-\frac{3}{m+2}\right) > 1;$$

ce qui a toujours lieu pour $m>4$.

Des cols. — Nous distinguerons trois genres de cols :

1° Ceux du *premier genre* seront les points doubles d'une courbe indécomposable

$$f - C\varphi = 0,$$

ou d'une courbe

$$u_i = 0.$$

u_i étant un des facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_k^{\alpha_k}$$

pour une valeur remarquable de C.

Tous ceux de ces points doubles qui ne sont pas des nœuds sont des cols.

Pour un col du premier genre les deux entiers caractéristiques sont égaux à 1.

2° Ceux du *second* et du *troisième genre* sont les points d'intersection de deux courbes

$$u_i = 0, \qquad u_j = 0,$$

u_i et u_j étant deux facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_k^{\alpha_k}$$

pour une même valeur remarquable de C.

Tous ceux de ces points d'intersection qui ne sont pas des nœuds sont des cols. Les deux entiers caractéristiques μ et ν, qui sont premiers entre eux, seront entre eux dans le même rapport que les deux exposants α_i et α_j.

Si $\alpha_i = \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu = \nu = 1$, le col sera du deuxième genre.

Si $\alpha_i \gtrless \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu < \nu$, $\nu > 1$, le col sera du troisième genre.

L'équation différentielle étant donnée, on connaît les entiers caractéristiques. On peut donc distinguer les cols du premier et du second genre de ceux du troisième genre, mais non ceux du premier de ceux du second.

Propriétés diverses. — Quelques-unes des formules précédentes peuvent être simplifiées si l'on adopte les notations suivantes :

Soit ζ_i un nombre égal à 1 si u_i n'est pas singulier par rapport au nœud considéré, à μ si u_i est critique, à ν s'il est hypercritique, à $\mu\nu$ s'il est doublement singulier.

A chaque facteur u_i et à chaque nœud monocritique correspond ainsi un nombre ζ_i.

Soit alors h_i le plus petit commun multiple de tous les nombres ζ_i correspondant à un même facteur u_i et à tous les nœuds monocritiques. Ce nombre h_i est donc égal à 1 si u_i n'est singulier par rapport à aucun nœud.

Il est clair que α_i est divisible par h_i; nous poserons donc

$$v_i = u_i^{h_i}, \qquad \alpha_i = h_i \alpha'_i.$$

d'où

$$u_i^{\alpha_i} = v_i^{\alpha'_i}.$$

Nous appellerons $n'_i = n_i h_i$ le degré de v_i.

La courbe $v_i = 0$ se compose de h_i courbes confondues avec $u_i = 0$. J'appellerai λ'_i le nombre des branches de la courbe $v_i = 0$ qui passent en un nœud monocritique. Chaque branche de $u_i = 0$ comptera pour h_i branches de $v_i = 0$, sauf s'il y a lieu celle qui s'annule pour $X_1 = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\mu}$ branches, et celle qui s'annule pour $X_2 = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\nu}$ branches. On aura donc

$\lambda'_i = h_i \lambda_i$ si le facteur u_i n'est pas singulier,

$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$ s'il est critique,

$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ s'il est hypercritique,

$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(2 - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)$ s'il est doublement singulier.

Le nombre des points d'intersection de

$$v_i = 0 \quad \text{et} \quad f - C\varphi = 0$$

est alors dans tous les cas $\lambda \lambda'_i \mu \nu$.

Celui de deux courbes

$$v_i = 0, \qquad v_k = 0$$

correspondant à deux facteurs

$$v_i = u_i^{h_i}, \qquad v_k = u_k^{h_k}$$

sera $\lambda'_i \lambda'_k \mu \nu$.

L'équation (γ) s'écrira dans tous les cas

$$\lambda = S \alpha'_i \lambda'_i.$$

Examinons maintenant la question suivante :

Soit, pour une valeur remarquable de C,

$$f - C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_k^{\alpha_k} = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \dots v_k^{\alpha'_k}.$$

Est-il possible que les deux courbes

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0$$

n'aient d'autres points d'intersection que des nœuds?

Appelons h le nombre des points d'intersection de ces deux courbes situés en dehors des nœuds, nous aurons évidemment

$$n'_1 n'_2 = S\lambda'_1\lambda'_2\mu\nu + h.$$

Supposons d'abord que nous n'ayons que deux facteurs et que l'on ait

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2},$$

nous aurons les relations

$$p^2 = S\lambda^2\mu\nu, \qquad pn'_1 = S\lambda\lambda'_1\mu\nu, \qquad \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 = p, \qquad \alpha'_1\lambda'_1 + \alpha'_2\lambda'_2 = \lambda;$$

d'où l'on peut déduire

$$\alpha'_1 n'^2_1 + \alpha'_2 n'_1 n'_2 = \alpha'_1 S\lambda'^2_1\mu\nu + \alpha'_2 S\lambda'_1\lambda'_2\mu\nu,$$
$$\alpha'_1 n'_1 n'_2 + \alpha'_2 n'^2_2 = \alpha'_1 S\lambda'_1\lambda'_2\mu\nu + \alpha'_2 S\lambda'^2_2\mu\nu.$$

Si l'on avait $h = 0$ et par conséquent $n'_1 n'_2 = S\lambda'_1\lambda'_2\mu\nu$, il viendrait

$$n'^2_1 = S\lambda'^2_1\mu\nu, \qquad n'^2_2 = S\lambda'^2_2\mu\nu,$$

et pour des valeurs quelconques de x et de y

(1) $$(n'_1 x - n'_2 y)^2 = S\mu\nu(\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2.$$

Si l'on fait $y = n'_1$, $x = n'_2$, le premier membre s'annule, ce qui exige que

$$\lambda'_1 x = \lambda'_2 y.$$

Le rapport $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$ est donc constant et égal à $\frac{n'_1}{n'_2}$.

Rien dans le raisonnement qui précède ne suppose que les facteurs u_1 et u_2 sont irréductibles. Si donc on a

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \ldots v_i^{\alpha'_i} v_{i+1}^{\alpha'_{i+1}} \ldots v_k^{\alpha_k}$$

et si les courbes

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad v_i = 0$$

n'ont en dehors des nœuds aucun point commun avec les courbes

$$v_{i+1} = 0, \qquad v_{i+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad v_k = 0,$$

on pourra regarder $f + C\varphi$ comme le produit des deux facteurs

$$v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \ldots v_i^{\alpha'_i} \quad \text{et} \quad v_{i+1}^{\alpha'_{i+1}} v_{i+2}^{\alpha'_{i+2}} \ldots v_k^{\alpha'_k}$$

et l'on aura pour tous les nœuds monocritiques

$$\frac{\alpha'_1\lambda'_1 + \alpha'_2\lambda'_2 + \ldots + \alpha'_i\lambda'_i}{\alpha'_{i+1}\lambda'_{i+1} + \alpha'_{i+2}\lambda'_{i+2} + \ldots + \alpha'_k\lambda'_k} = \frac{\alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 + \ldots + \alpha'_i n'_i}{\alpha'_{i+1} n'_{i+1} + \alpha'_{i+2} n'_{i+2} + \ldots + \alpha'_k n'_k}.$$

Revenons au cas où le nombre des facteurs est égal à 2 et où, par conséquent,

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2},$$

mais ne supposons plus $h = 0$; la formule (1) deviendra

$$(n'_1 x - n'_2 y)^2 = S\,\mu\nu(\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2 - h\,\frac{(\alpha'_2 x - \alpha'_1 y)^2}{\alpha'_1 \alpha'_2}.$$

Si nous faisons en particulier

$$y = n'_1, \qquad x = n'_2,$$

il vient

$$(2) \qquad h p^2 = \alpha'_1 \alpha'_2 S\,\mu\nu(\lambda'_1 n'_2 - \lambda'_2 n'_1)^2.$$

Supposons de nouveau que nous ayons deux facteurs et que nous écrivions

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2},$$

et supposons de plus $h = 0$.

Je dis que la courbe $f + C\varphi = 0$ *ne sera indécomposable pour aucune valeur de* C.

Soit, en effet, δ le plus grand commun diviseur de n'_1 et de n'_2 et posons

$$n'_1 = \beta_1 \delta, \qquad n'_2 = \beta_2 \delta,$$
$$w_1 = v_1^{\beta_2}, \qquad w_2 = v_2^{\beta_1};$$

les deux polynomes w_1 et w_2 seront de même degré, à savoir de degré $\beta_1 \beta_2 \delta$.

Soit k une constante arbitraire. Étudions la courbe

$$w_1 - k w_2 = 0.$$

Elle sera de degré $\beta_1 \beta_2 \delta$.

Voyons comment elle se comportera dans le voisinage d'un nœud monocritique.

On pourra écrire, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce nœud,

$$w_1 = W_1 \Pi_1(X_1^\mu, X_2^\mu), \qquad w_2 = W_2 \Pi_2(X_1^\mu, X_2^\mu),$$

W_1 et W_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud considéré. Π_1 et Π_2 sont deux polynomes homogènes en X_1^μ et X_2^ν; Π_1 est de degré $\beta_2 \lambda'_1$ et Π_2 de degré $\beta_1 \lambda'_2$.

Mais on a (puisque $h = 0$)

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{n'_1}{n'_2},$$

ce qui permet d'écrire

$$\lambda'_1 = \beta_1 \varepsilon, \qquad \lambda'_2 = \beta_2 \varepsilon,$$

ε étant un entier.

Donc les deux polynomes Π_1 et Π_2 sont de même degré $\beta_1 \beta_2 \varepsilon$.

Quel est alors, au nœud considéré, le nombre des points d'intersection de la courbe

$$w_1 - k w_2 = W_1 \Pi_1 - k W_2 \Pi_2 = 0$$

avec une branche de courbe

$$X_1^\mu = \text{const.} X_2^\nu ?$$

Il sera au moins égal à $\beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$, et le nombre des points d'intersection des deux courbes

$$w_1 - k w_2 = 0, \qquad f + C\varphi = 0$$

est au moins égal à $\lambda \beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$.

Si les deux polynomes $w_1 - k w_2$, $f + C\varphi$ n'avaient aucun facteur commun, le nombre total des points d'intersection des deux courbes devrait être $p \beta_1 \beta_2 \delta$.

Nous venons de voir que le nombre des points d'intersection situés aux nœuds est au moins égal à $S \lambda \beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$.

Mais nous avons

$$p = \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2, \qquad \lambda = \alpha'_1 \lambda'_1 + \alpha'_2 \lambda'_2,$$

ce qui montre que

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\lambda}{\varepsilon};$$

et comme on a

$$p^2 = S \lambda^2 \mu \nu,$$

il viendra

$$p \delta = S \lambda \varepsilon \mu \nu.$$

Le nombre des points d'intersection situés aux nœuds sera donc au moins égal à $p \beta_1 \beta_2 \delta$.

Considérons un point quelconque de $f + C\varphi = 0$ situé en dehors des nœuds; on peut toujours choisir la constante k de façon à faire passer par ce point la courbe $w_1 - k w_2 = 0$. Le nombre total des points d'intersection devient alors supérieur à $p \beta_1 \beta_2 \delta$, de sorte que $f + C\varphi$ et $w_1 - k w_2$ doivent avoir un facteur commun. Si $f + C\varphi$ est supposé irréductible, $w_1 - k w_2$ sera divisible par $f + C\varphi$.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire que je démontre un lemme :

Soient X *et* Y *deux polynomes homogènes de même degré en x, y, z et α une constante quelconque. Si la courbe*

$$X - \alpha Y = 0$$

est décomposable quelle que soit la constante α, les deux polynomes X et Y sont des polynomes homogènes et de même degré par rapport à deux autres polynomes ξ et η qui sont eux-mêmes homogènes et de même degré en x, y et z. De plus, la courbe

$$\xi - \alpha\eta = 0$$

n'est pas décomposable quelle que soit la constante α.

En effet, soit N le degré de X et de Y. Soient ensuite, pour une certaine valeur de α, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les degrés des facteurs irréductibles de $X - \alpha Y$. La continuité suffit pour montrer que le nombre des facteurs et les degrés n_1, $n_2, \ldots, n_p$ seront les mêmes pour toutes les valeurs de α sauf pour certaines valeurs que j'appellerai *singulières* et pour lesquelles quelques-uns des facteurs pourraient eux-mêmes se décomposer.

Soit donc, pour une valeur non singulière de α,

$$X - \alpha Y = Z_1 Z_2 \ldots Z_p,$$

le facteur Z_i étant irréductible et de degré n_i.

Soit maintenant α' une constante infiniment peu différente de α, il viendra

$$X - \alpha' Y = Z'_1 Z'_2 \ldots Z'_p.$$

Le facteur Z'_i différera très peu de Z_i; on voit donc que, si l'on fait varier α d'une façon continue, les polynomes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ varieront d'une façon continue.

Je dis maintenant que si l'on fait décrire à la variable α des contours fermés convenables, les divers polynomes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ s'échangeront les uns avec les autres; je dis par exemple qu'on pourra échanger Z_1 avec Z_2.

Soit, en effet, x_1, y_1, z_1 un point de la courbe $Z_1 = 0$ qui ne soit pas un nœud; soit de même x_2, y_2, z_2 un point de la courbe $Z_2 = 0$. Faisons ensuite varier x, y, z depuis x_1, y_1, z_1 jusqu'à x_2, y_2, z_2; alors $\alpha = \frac{X}{Y}$ qui est une fonction de x, y, z décrira un contour fermé, et quand ce contour sera décrit, il est clair que Z_1 se sera échangé avec Z_2.

Les polynomes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ sont donc de même degré, de sorte que N est un multiple de n_1.

Il reste à établir que l'ensemble des courbes $Z_1 = 0$ qui dépendent du paramètre arbitraire α, forment un faisceau linéaire; or cela est évident puisqu'elles n'ont pas d'enveloppe, même au sens purement analytique de ce mot.

Appliquons ce qui précède au cas qui nous occupe.

Ou bien $w_1 - kw_2$ sera irréductible sauf pour certaines valeurs de k et ce polynome devra être alors identique à $f + C\varphi$; ou bien $w_1 - kw_2$ ne sera pas irréductible et son degré devra être un multiple de celui de son facteur irréductible $f + C\varphi$; on aura donc

$$\beta_1\beta_2\delta = \zeta p = \zeta\delta(\alpha'_1\beta_1 + \alpha'_2\beta_2),$$

ζ étant un entier; de sorte que

$$\beta_1\beta_2 = \zeta\alpha'_1\beta_1 + \zeta\alpha'_2\beta_2.$$

Cette égalité n'est possible que si $\zeta\alpha'_2\beta_2$ est divisible par β_1, ou, puisque β_1 et β_2 sont premiers entre eux, si $\zeta\alpha'_2$ est divisible par β_1. Mais si $\zeta\alpha'_2$ est divisible par β_1 il vient, puisque ζ, α'_1 et β_1 sont essentiellement positifs,

$$\beta_1\beta_2 > \zeta\alpha'_1\beta_1 + \zeta\alpha'_2\beta_2.$$

L'égalité est donc impossible et nous devons conclure que $f + C\varphi$ ne peut être irréductible.

Si donc $f + C\varphi$ est irréductible, sauf pour certaines valeurs particulières de C, *ce que nous pouvons toujours supposer*, les deux courbes

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0$$

auront d'autres points communs que les nœuds.

Rien dans ce raisonnement ne suppose que u_1 et u_2 soient irréductibles; si donc on a pour une valeur remarquable de C

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_i^{\alpha_i} u_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots u_k^{\alpha_k}$$

il y aura certainement, en dehors des nœuds, des points d'intersection qui appartiendront à la fois à l'une des courbes

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_i = 0$$

et à l'une des courbes

$$u_{i+1} = 0, \quad u_{i+2} = 0, \quad \ldots, \quad u_k = 0.$$

Classification des valeurs remarquables de C. — Nous distinguerons les valeurs remarquables de C en plusieurs *espèces*.

La première espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i de tous les facteurs irréductibles u_i seront égaux à 1.

La deuxième espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i seront premiers entre eux, sans être tous égaux à 1.

La troisième espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i auront un plus grand commun diviseur différent de 1, sans être tous égaux entre eux.

La quatrième espèce comprendra celles pour lesquelles il y a plusieurs facteurs u_i distincts dont les exposants α_i sont tous égaux entre eux sans être tous égaux à 1, de telle sorte que $f + C\varphi$ soit une puissance parfaite d'un produit de plusieurs facteurs distincts.

La cinquième espèce enfin comprendra celles pour lesquelles $f + C\varphi$ est une puissance parfaite d'un polynome irréductible.

Si C est une valeur remarquable de l'une des quatre premières espèces, la courbe $f + C\varphi = 0$ se décomposera en deux courbes distinctes qui, d'après le paragraphe précédent, devront se couper au moins en un point en dehors des nœuds et par conséquent en un col.

Le nombre des valeurs remarquables des quatre premières espèces est donc au plus égal au nombre des cols.

Supposons que tous les cols soient du premier ou du second genre et soit C une valeur remarquable. Soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_i^{\alpha_i} u_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots u_k^{\alpha_k};$$

l'une des courbes u_1, u_2, ..., u_i devra couper en un col l'une des courbes u_{i+1}, u_{i+2}, ..., u_k, et comme le col est du premier ou du second genre, ces deux courbes devront correspondre à un même exposant α.

Je dis que l'on doit avoir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k.$$

En effet, l'ordre des facteurs u_1, u_2, ... est arbitraire; si donc tous les exposants n'étaient pas égaux, on pourrait supposer

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i, \quad \alpha_{i+1} \gtrless \alpha_1, \quad \alpha_{i+2} \gtrless \alpha_1, \quad \dots, \quad \alpha_k \gtrless \alpha_1.$$

Un des polynomes ne pourrait donc pas avoir même exposant qu'un des polynomes u_{i+1}, u_{i+2}, ..., u_k.

Donc, si tous les cols sont du premier ou du second genre, toutes les valeurs remarquables seront de la première, de la quatrième ou de la cinquième espèce.

Les valeurs remarquables des quatre dernières espèces sont celles que nous avons appelées plus haut critiques.

Application d'un théorème d'Halphen. — Je dis maintenant qu'il ne peut pas exister plus de deux valeurs remarquables des trois dernières espèces.

En effet, s'il y en avait trois on pourrait supposer par une substitution

linéaire que ces trois valeurs remarquables sont 0, 1 et ∞, de sorte que

$$f, \quad \varphi \quad \text{et} \quad -(f-\varphi)$$

seraient des puissances parfaites. Soient

$$X^{\alpha_1}, \quad Y^{\alpha_2}, \quad Z^{\alpha_3}$$

ces trois puissances parfaites; on devrait avoir identiquement

$$X^{\alpha_1} - Y^{\alpha_2} + Z^{\alpha_3} = 0,$$

X, Y et Z étant des polynomes homogènes de degré

$$\frac{p}{\alpha_1}, \quad \frac{p}{\alpha_2}, \quad \frac{p}{\alpha_3}$$

en x, y et z.

Or Halphen, au début de son Mémoire couronné sur les équations linéaires, a étudié les identités de cette forme. Il a montré d'abord que les nombres α_1, α_2 et α_3 devaient avoir certaines valeurs particulières $(\alpha_1, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$; il a fait voir ensuite qu'on devait avoir

$$X = P_1(\eta_1, \eta_2),$$
$$Y = P_2(\eta_1, \eta_2),$$
$$Z = P_3(\eta_1, \eta_2),$$

P_1, P_2 et P_3 étant des polynomes homogènes en η_1 et η_2 qu'Halphen a complètement formés et qu'il est inutile de transcrire ici, pendant que η_1 et η_2 sont deux polynomes homogènes de même degré en x, y et z.

Alors la courbe

$$f + C\varphi = X^{\alpha_1} + CY^{\alpha_2} = 0$$

est décomposable quel que soit C en un certain nombre de courbes appartenant au réseau

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \text{const.}$$

Or c'est là précisément le cas exclu plus haut.

Si donc, comme nous l'avons supposé, $f + C\varphi$ n'est pas réductible quel que soit C, le nombre des valeurs remarquables des trois dernières espèces ne peut dépasser 2, et par conséquent le nombre total des valeurs remarquables est limité.

J'ajoute que, s'il y a deux valeurs des trois dernières espèces, de telle sorte, par exemple, que

$$f = X^{\alpha_1}, \qquad \varphi = Y^{\alpha_2},$$

les deux nombres α_1 et α_2 devront être premiers entre eux, car s'ils avaient un

facteur commun, le polynome

$$X^{\alpha_1} - CY^{\alpha_2}$$

serait réductible quel que soit C.

Nombre des nœuds. — Supposons que tous les nœuds soient dicritiques, on aura

$$p^2 = S\lambda^2,$$

$$(m+2)p = 2S\lambda;$$

d'où, si l'on appelle n le nombre des nœuds et x une variable quelconque,

$$x^2p^2 - (m+2)px + n = S(x\lambda - 1)^2.$$

Le second membre étant essentiellement positif, les racines du trinome du second degré en x qui figure dans le premier membre doivent être imaginaires ou égales, ce qui exige que

$$n \geq \frac{(m+2)^2}{4}.$$

De plus, si

$$n = \frac{(m+2)^2}{4},$$

les racines sont égales et le second membre doit pouvoir s'annuler, ce qui ne peut avoir lieu que si tous les λ sont égaux entre eux.

Supposons maintenant que tous les nœuds soient dicritiques et tous les cols du premier ou du second genre; toutes les valeurs critiques de C sont des deux dernières espèces et il ne peut y en avoir plus de deux. Soient α_1 et α_2 les exposants correspondant à ces deux valeurs critiques. On aura pour la première valeur critique

$$p = S\alpha_i n_i = \alpha_1 S n_i, \qquad S(\alpha_i - 1)n_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p,$$

et de même pour la seconde valeur critique

$$S(\alpha_i - 1)n_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p.$$

Alors la formule

$$m + 2 - 2p = -\Sigma(\alpha_i - 1)n$$

devient

$$m + 2 - 2p = -\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p - \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p$$

ou

$$m + 2 = p\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right).$$

On aura de même pour un nœud quelconque et pour la première valeur

critique

$$\lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i\lambda_i = \alpha_1\,\mathrm{S}\,\lambda_i, \qquad \mathrm{S}\,(\alpha_i - 1)\,\lambda_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\lambda,$$

et pour la seconde

$$\mathrm{S}\,(\alpha_i - 1)\,\lambda_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)\lambda;$$

de sorte que la formule

$$2 = 2\lambda - \Sigma\,(\alpha_i - 1)\,\lambda_i$$

devient

$$2 = \lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3}\right),$$

d'où

$$p^2\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 = (m+2)^2$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 \mathrm{S}\,\lambda^2 = 4n,$$

ou, puisque $p^2 = \mathrm{S}\lambda^2$,

$$n = \frac{(m+2)^2}{4}.$$

Limitation du degré. — Dans le cas où tous les cols sont du premier ou du second genre, il est possible de trouver une limite supérieure du degré p et par conséquent de reconnaître si l'équation est intégrable algébriquement.

Nous venons de trouver, en effet, sans avoir besoin de supposer que tous les nœuds soient dicritiques,

$$(m+2) = p\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

d'où

$$\alpha_1\alpha_2(m+2) = p(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Or, α_1 et α_2 sont premiers entre eux et par conséquent chacun d'eux est premier avec $\alpha_1 + \alpha_2$. Donc $\alpha_1 + \alpha_2$ divise $m + 2$.

Nous devons en conclure que $\alpha_1 + \alpha_2$ et par conséquent α_1, α_2 et p sont imités. C. Q. F. D.

Je m'arrêterai là, bien que les principes qui précèdent puissent probablement, avec de légères modifications, donner des résultats dans des cas moins particuliers.

Paris, le 12 avril 1891.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

ET DU PREMIER DEGRÉ [1].

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 11, p. 193-239 (1897).

J'ai publié sur ce sujet un premier article, qui a paru dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (t. V, année 1891). Je me suis occupé de nouveau de la même question dans ces derniers temps, dans l'espoir que je parviendrais à généraliser les résultats obtenus. Cet espoir a été déçu. J'ai obtenu cependant quelques résultats partiels, que je prends la liberté de publier, estimant qu'on pourra s'en servir plus tard pour obtenir, par un nouvel effort, une solution plus satisfaisante du problème.

C'est à ce premier article que je renverrai quand je parlerai de « la première partie de ce travail ». J'adopterai d'ailleurs la même terminologie et les mêmes notations que dans cette première partie.

C'est ainsi que la lettre Σ représentera une sommation portant sur toutes les valeurs critiques de C et tous les facteurs u_i. La lettre **S** en caractères gras représentera une sommation étendue à une seule valeur critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur. La lettre S en caractères ordinaires représentera une sommation étendue à tous les nœuds.

Soit C une valeur remarquable quelconque et soit

$$f - C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_p^{\alpha_p} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} \dots v_q^{\beta_q}$$

l'identité correspondante.

[1] Présenté le 23 mai 1897.

Nous aurons toujours les relations

$$p = \mathbf{S}\alpha_i n_i = \mathbf{S}\alpha'_i n'_i, \qquad \lambda = \mathbf{S}\alpha_i \lambda'_i.$$

Soient maintenant H_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $u_i = 0$, $u_k = 0$ situés en des cols; et H'_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $v_i = 0$, $v_k = 0$ situés en des cols. Comme $v_i = 0$ équivaut à h_i courbes $u_i = 0$ confondues, et $v_k = 0$ à h_k courbes $u_k = 0$ confondues, on aura

$$H'_{ik} = h_i h_k H_{ik},$$

Le nombre total des intersections de $v_i = 0$, $v_k = 0$ sera

(1) $$n'_i n'_k = S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu + H'_{ik}.$$

Celui des intersections de $v_i = 0$ avec une courbe $f + C_1\varphi = 0$ quelconque sera

$$p n'_i = S\lambda\lambda'_i \mu\nu,$$

d'où

$$n'_i \mathbf{S}\alpha'_k n'_k = S[\lambda'_i \mu\nu \mathbf{S}\alpha'_k \lambda'_k]$$

ou

$$\alpha'_i n'^2_i + \sum_k \alpha'_k n'_i n'_k = \alpha'_i S\lambda'^2_i \mu\nu + \sum_k \alpha'_k S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu.$$

Or

$$\sum_k \alpha'_k n'_i n'_k = \sum_k \alpha'_k S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu + \sum_k \alpha'_k H'_{ik},$$

d'où

(2) $$\alpha'_i n'^2_i = \alpha'_i S\lambda'^2_i \mu\nu + \sum_k \alpha'_k H'_{ik}.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des indéterminées; multiplions l'équation (1) par $2\alpha'_i\alpha'_k x_i x_k$, l'équation (2) par $\alpha'_i x_i^2$ et faisons la somme de toutes les équations analogues; il viendra

(3) $$[\mathbf{S}\alpha'_i x_i n'_i]^2 = S\mu\nu[\mathbf{S}\alpha'_i x_i \lambda'_i]^2 - \mathbf{SS}\alpha'_i\alpha'_k H'_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

Le signe $\mathbf{SS}$ se rapporte à une sommation portant sur toutes les combinaisons des indices i et k, chaque combinaison intervenant une fois.

La formule (3) est la généralisation évidente de la formule qui est au début de la page 51 (première Partie).

D'autre part

$$n'_i = h_i n_i, \qquad \alpha'_i = \frac{\alpha_i}{h_i}.$$

La formule (3) devient alors

$$(3\ bis) \qquad [\mathrm{S}\alpha_i n_i x_i]^2 = \mathrm{S}\mu\nu\left[\mathrm{S}\alpha_i' x_i \frac{\lambda_i'}{h_i}\right]^2 - \mathrm{SS}\alpha_i\alpha_k H_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

Le terme $\frac{\lambda_i'}{h_i}$ est égal à λ_i si le facteur u_i n'est pas singulier.

Plusieurs cas sont à considérer, suivant la nature de la valeur remarquable C. Si C est de première espèce, les α_i, les α_i' et les h_i sont tous égaux à 1 et l'on a simplement

$$[\mathrm{S}n_i x_i]^2 = \mathrm{S}\mu\nu[\mathrm{S}\lambda_i x_i]^2 - \mathrm{SS}H_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

Si C est de l'une des trois dernières espèces et que les α aient un diviseur commun δ, et si l'on pose

$$\alpha_i = \alpha_i''\delta,$$

on pourra diviser l'équation (3 *bis*) par δ^2 et l'écrire

$$(3\ ter) \qquad [\mathrm{S}\alpha_i'' n_i x_i]^2 = \mathrm{S}\mu\nu\left[\mathrm{S}\alpha_i' x_i \frac{\lambda_i'}{h_i}\right]^2 - \mathrm{SS}\alpha_i''\alpha_k'' H_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

Les coefficients α_i'' sont alors premiers entre eux.

Recherche des valeurs remarquables. — Considérons une valeur remarquable de C et la relation (3 *bis*) correspondante. Soit q le nombre des facteurs distincts dans lesquels se décompose le polynome $f + C\varphi$; je dis que le nombre des cols qui interviennent dans la formule (3 *bis*) correspondante est au moins égal à $q - 1$, de telle sorte que l'on a

$$\mathrm{SS}H_{ik} \geq q - 1.$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait mettre $f + C\varphi$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, qui ne seraient d'ailleurs pas forcément irréductibles, et tels qu'il n'y aurait pas de col pour lequel ces deux facteurs s'annulent à la fois. Alors, d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le polynome $f + C\varphi$ serait décomposable pour toutes les valeurs de C, ce que nous ne supposons pas.

Pour nous en rendre compte, représentons chacun de nos q facteurs par un point, et joignons deux de ces points par un trait, s'il existe un col pour lequel les deux facteurs correspondant à ces points s'annulent à la fois. S'il y a moins de $q - 1$ cols, il y aura aussi moins de $q - 1$ traits, et il sera impossible d'aller d'un quelconque de nos q points à un autre quelconque de ces q points en suivant les traits ainsi tracés.

Nos q points seront donc répartis au moins en deux groupes, de telle sorte qu'on puisse en suivant les traits aller d'un point d'un groupe à un autre point du même groupe, mais non passer d'un groupe à l'autre.

Soit alors U le produit de tous les facteurs u_i correspondant au premier groupe, chacun de ces facteurs étant affecté de l'exposant α_i correspondant. Soit V le produit de tous les facteurs u_i correspondant à tous les autres groupes, chacun d'eux affecté de son exposant. On aura

$$f + C\varphi = UV$$

et il n'y aura pas de col pour lequel U et V s'annulent à la fois.

Soit B le nombre des cols.

Soient A_1 le nombre des valeurs remarquables de la première espèce, Q_1 le nombre total des facteurs correspondants, c'est-à-dire la somme de tous les nombres q relatifs à ces diverses valeurs remarquables de la première espèce.

Soient A_2 et Q_2, A_3 et Q_3, A_4 et Q_4, A_5 et Q_5 les nombres correspondants pour les valeurs remarquables de la seconde, de la troisième, de la quatrième et de la cinquième espèce.

D'après le résultat que nous venons d'obtenir, on aura

$$B \geq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$

et comme d'après la définition des valeurs des quatre premières espèces

$$Q_1 \geq 2A_1, \qquad Q_2 \geq 2A_2, \qquad Q_3 \geq 2A_3, \qquad Q_4 \geq 2A_4,$$

il viendra

$$B \geq A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

D'autre part, d'après la définition des valeurs de la cinquième espèce, on aura

$$Q_5 = A_5.$$

Enfin, d'après le théorème d'Halphen (*loc. cit.*, p. 55),

$$A_4 \leq A_3 + A_5 + 2.$$

Ces inégalités limitent le nombre des valeurs remarquables et même les nombres Q_i. En effet, le nombre des cols B est connu.

Mais on peut aller plus loin. Soit une valeur remarquable de l'une des deux premières espèces; soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4}$$

la décomposition correspondante; je suppose quatre facteurs pour fixer les idées. Les nombres α_1, α_2, α_3, α_4 doivent être premiers entre eux. Repré-

sentons ces quatre facteurs par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4; ces quatre points devront être joints au moins par trois traits correspondant chacun à un col. Je suppose, pour fixer les idées, que ces trois traits soient les traits M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4. A chacun de ces traits correspondra un col que nous devons choisir parmi les B cols de notre équation différentielle; comme ces cols sont connus et en nombre fini, nous ne pourrons faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

Considérons le col qui correspond au trait M_1M_2, ses entiers caractéristiques μ et ν seront connus et nous devrons avoir

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Nous n'avons ici à choisir qu'entre deux hypothèses; il en serait de même en ce qui concerne les cols qui correspondent aux deux autres traits et les rapports correspondants $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$.

En résumé, *les rapports des quatre exposants α_i sont connus*, ou plutôt nous ne pouvons faire en ce qui les concerne qu'un *nombre fini d'hypothèses*.

Mais, si la valeur remarquable est de l'une des deux premières espèces, les nombres α_i sont premiers entre eux; nous connaîtrons donc les nombres α_i eux-mêmes.

Si, au contraire, la valeur remarquable est de l'une des trois dernières espèces, les nombres α_i ne sont plus premiers entre eux; mais nous pouvons poser

$$\alpha_i = \alpha''_i \delta,$$

le nombre δ étant le plus grand commun diviseur des α_i; nous connaîtrons alors les nombres α''_i qui sont premiers entre eux, mais nous ne connaîtrons pas δ.

En résumé, au sujet du nombre des valeurs remarquables des cinq espèces, du nombre des facteurs correspondant à chacune d'elles, des exposants α_i relatifs aux valeurs remarquables des deux premières espèces, des nombres α''_i relatifs aux valeurs remarquables des trois dernières espèces, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses : *Les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 relatifs aux deux valeurs remarquables des trois dernières espèces, si elles existent, demeurent complètement inconnus.*

Valeurs des n_i. — Adoptons, au sujet du nombre des valeurs remarquables

de chaque espèce, de même qu'au sujet des exposants α_i ou α''_i, une des hypothèses en nombre fini que nous pouvons faire. Il nous reste à déterminer les deux nombres δ_1 et δ_2, les deux nombres p et λ, ainsi que les nombres n_i et λ_i.

D'un autre côté, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses au sujet de ceux de nos facteurs qui sont critiques ou hypercritiques ou doublement singuliers par rapport aux divers nœuds. Ces hypothèses pourront être examinées successivement. Nous adopterons donc l'une d'entre elles; les nombres h_i pourront alors être regardés comme connus, ainsi que les rapports des exposants α'_i.

Nous aurons alors, pour déterminer les nombres n_i, les relations suivantes

$$(4) \qquad m+2=2p-\sum(\alpha_i-1)n_i, \qquad p=\mathrm{S}\,\alpha_i n_i=\mathrm{S}\,\alpha'_i n'_i.$$

Ces relations peuvent suffire si le nombre des valeurs remarquables de C n'excède pas 2. Dans ce cas, en effet, on aura

$$p=\mathrm{S}\,\alpha_i n_i$$

pour chacune des deux valeurs remarquables, et, en additionnant les deux équations ainsi obtenues, il viendra

$$2p=\sum \alpha_i n_i.$$

En remplaçant dans l'équation qui donne $m+2$, on trouve

$$m+2=\sum \alpha_i n_i-\sum(\alpha_i-1)n_i=\sum n_i.$$

Les nombres n_i et le degré p sont donc limités.

Mais il n'en est plus de même si le nombre des valeurs remarquables est supérieur à 2. Il y a lieu de se demander alors si les équations (4) comportent une infinité de solutions en nombres entiers.

Discutons cette question, en considérant d'abord les exposants α_i comme donnés.

Soient q le nombre des valeurs remarquables; $C_1, C_2, \ldots, C_q$ ces valeurs; K le nombre des facteurs relatifs à C_k. Soient

$$\alpha_k^1, \quad \alpha_k^2, \quad \ldots, \quad \alpha_k^{\mathrm{K}},$$
$$n_k^1, \quad n_k^2, \quad \ldots, \quad n_k^{\mathrm{K}}$$

les valeurs des nombres α_i et n_i correspondant à ces K facteurs.

Rangeons-les de façon que

$$\alpha_k^1 \leq \alpha_k^2 \leq \ldots \leq \alpha_k^{\mathrm{K}}.$$

Les équations (4) nous donnent alors

$$\sum n_i = (q-2)p + m + 2.$$

D'autre part, si a_1, a_2, ..., a_q sont q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q - 2,$$

on aura

$$(q-2)p = a_1 \mathrm{S}\,\alpha_1^i n_1^i + a_2 \mathrm{S}\,\alpha_2^i n_2^i + \ldots + a_q \mathrm{S}\,\alpha_q^i n_q^i,$$

d'où

(5) $$\sum n_i = a_1 \mathrm{S}\,\alpha_1^i n_1^i + \ldots + a_q \mathrm{S}\,\alpha_q^i n_q^i + m + 2.$$

L'équation (5) est évidemment impossible si l'on peut choisir les nombres a_k de telle sorte que l'on ait à la fois

$$a_1 \alpha_1^1 > 1, \quad a_2 \alpha_2^1 > 1, \quad \ldots, \quad a_q \alpha_q^1 > 1;$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^1} < q - 2.$$

Donc, pour que les équations (4) admettent des solutions, *il faut* que

(5) $$\frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^1} \geqq q - 2.$$

Maintenant, dans quels cas les équations (4) admettront-elles une infinité de solutions? Pour cela il faut et il suffit que les équations (homogènes) en p et en n_i,

(4 *bis*) $$2p = \sum (\alpha_i - 1) n_i, \qquad p = \mathrm{S}\,\alpha_i n_i,$$

admettent des solutions positives.

Si l'on peut trouver des nombres a_k tels que

(6) $$a_k \alpha_k^1 < 1 < a_k \alpha_k^{\mathrm{K}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q - 2,$$

il est clair que les équations (4 *bis*) admettront des solutions positives; on pourra, en effet, satisfaire aux conditions

(7) $$\mathrm{S}\,n_i^1 = a_1 \mathrm{S}\,\alpha_i^1 n_i^1, \qquad \mathrm{S}\,n_i^2 = a_2 \mathrm{S}\,\alpha_i^2 n_i^2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{S}\,n_i^q = a_q \mathrm{S}\,\alpha_i^q n_i^q.$$

Réciproquement, pour que les équations (4 *bis*) admettent des solutions positives, il suffit que les équations (7) en admettent, les nombres a_i étant convenablement choisis; il suffit donc que l'on puisse satisfaire aux conditions (6).

Mais pour qu'on puisse satisfaire aux conditions (6), il faut et il suffit qu'on ait à la fois l'inégalité

$$(5) \qquad \frac{1}{\alpha'_1} + \frac{1}{\alpha'_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha'_q} + \sum \frac{1}{\alpha'_i} > q - 2$$

et l'inégalité

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{\alpha^k_\lambda} > q - 2.$$

En résumé, si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (4) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si enfin l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Nous avons supposé jusqu'ici que les nombres α_i étaient connus. Cela est vrai en ce qui concerne les valeurs remarquables des deux premières espèces. Mais cela n'est plus vrai s'il existe des valeurs des trois dernières espèces. En ce qui concerne ces dernières, nous ne connaissons que les α''_i, mais nous ne connaissons pas les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2, relatifs aux deux valeurs des trois dernières espèces qui peuvent exister. Posons alors

$$A_0 = \sum \frac{1}{\alpha'_i},$$

la sommation s'étendant seulement aux valeurs des deux premières espèces.

Soit $\frac{1}{A_1}$ le plus petit des nombres α''_i relatifs à la première des valeurs des trois dernières espèces, si cette valeur existe; si elle n'existe pas, nous ferons $A_1 = 0$.

Soit de même $\frac{1}{A_2}$ le plus petit des nombres α''_i relatifs à la seconde valeur des trois dernières espèces; si elle n'existe pas nous prendrons $A_2 = 0$. Nous pouvons toujours supposer $A_1 > A_2$. L'inégalité (5) devient alors

$$A_0 + \frac{A_1}{\delta_1} + \frac{A_2}{\delta_2} > q - 2.$$

Si $A_0 > q - 2$, l'inégalité sera satisfaite quels que soient les nombres δ_1 et δ_2.

Si $A_0 + A_1 > q - 2$, $A_0 + A_2 < q - 2$, on pourra prendre δ_2 aussi grand qu'on voudra, mais δ_1 sera limité.

Si $A_0 + A_2 > q - 2$, $A_0 < q - 2$, on pourra prendre l'un des deux nombres δ_1 et δ_2 (mais non tous deux à la fois) aussi grand que l'on voudra.

Si enfin $A_0 + A_1 < q - 2$, les deux nombres δ_1 et δ_2 seront tous deux limités.

Ainsi donc, dans le cas où l'on aura

$$A_0 + A_1 < q - 2$$

et où l'inégalité (8) ne sera pas satisfaite, même dans l'hypothèse $\delta_1 = \delta_2 = 0$, on ne pourra faire au sujet des nombres δ_1 et δ_2 qu'un nombre fini d'hypothèses et les équations (4) n'auront qu'un nombre fini de solutions.

Le degré p est donc limité.

Il existe donc des cas très étendus où, comme dans celui que j'ai examiné dans la première partie de ce travail, le degré p est limité et où, par conséquent, le problème de l'intégration algébrique peut être regardé comme résolu.

Valeurs des λ_i. — Les nombres λ_i doivent satisfaire à certaines équations tout à fait analogues aux équations (4).

Considérons d'abord un nœud dicritique, nous devrons avoir

$$(9) \qquad \lambda = S\alpha_i\lambda_i, \qquad 2\lambda = \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Les équations (9) tout à fait analogues aux équations (4) se discuteraient de la même manière, et cette discussion conduirait au même résultat.

Si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (9) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Envisageons maintenant un nœud monocritique.

Dans ce cas la première équation (6) doit être remplacée par la suivante

$$(9\ bis) \qquad \lambda = S\alpha_i\lambda_i + \varepsilon_1\alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \varepsilon_2\alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right);$$

α_1 est l'exposant du facteur critique, α_2 celui du facteur hypercritique; ε_1 est égal à 0 ou à 1, suivant que le facteur critique correspond ou non à la valeur remarquable envisagée, et ε_2 est défini de la même manière en ce qui concerne le facteur hypercritique.

De même, la seconde équation (9) doit être remplacée par

$$(9\ ter) \qquad 2\lambda - 2 + \alpha_1\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Nous avons q équations (9 *bis*) correspondant aux q valeurs remarquables; en les additionnant on trouve

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$$

et en combinant avec (9 *ter*)

$$(10) \qquad \sum \lambda_i = (q - 2)\lambda + 2.$$

Soient encore $a_1, a_2, \ldots, a_q$, q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q - 2.$$

Désignons par λ_k^i les nombres λ_i relatifs à la valeur remarquable C_k, de même que nous avons désigné par n_k^i les nombres n_i relatifs à cette valeur remarquable C_k.

Nous pourrons écrire

$$\sum \lambda_i = a_1 \sum \alpha_i^1 \lambda_i^1 + a_2 \sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 + \ldots + a_q \sum \alpha_i^q \lambda_i^q$$
$$+ a'_1 \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + a'_2 \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) + 2;$$

a'_1 est celui des nombres a_k qui se rapporte à la valeur remarquable correspondant au facteur critique, et a'_2 est défini de même par rapport au facteur hypercritique.

Pour que les équations (9 *bis*) et (9 *ter*) admettent une infinité de solutions, il faut et il suffit que les équations (homogènes)

$$\lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i \lambda_i, \qquad 2\lambda = \sum (\alpha_i - 1)\lambda_i$$

admettent des solutions positives, c'est-à-dire que les inégalités (5) et (8) aient lieu.

Si l'on observe maintenant que les nombres λ_i et n_i ne sont pas indépendants, mais qu'ils sont liés par les relations (3) et (3 *bis*), on pourra espérer que nos équations (4), (9 *bis*) et (9 *ter*) n'admettront qu'un nombre fini de solutions *compatibles avec les relations* (3) alors même que les inégalités (5) et (8) auraient lieu.

Mais cet espoir serait trompé en général; on serait conduit à une discussion qu'il est inutile de développer ici et qui conduirait à la résolution d'une équation de Pell ou d'une équation analogue. L'équation de Pell, on le sait, admet une infinité de solutions.

Cas des neuf nœuds dicritiques. — On se trouve donc en présence de difficultés que je n'ai pu encore surmonter. Je me bornerai ici à traiter un cas particulier simple, où la nature de ces difficultés apparaît clairement, bien qu'on puisse en triompher.

Supposons $m = 4$ et que tous les nœuds soient dicritiques. D'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le genre des courbes

$$f + C\varphi = 0$$

sera égal à 1.

D'autre part, le nombre des points singuliers sera

$$m^2 + m + 1 = 21.$$

Je supposerai que ces 21 points singuliers sont 9 nœuds dicritiques et 12 cols.

Par les 9 nœuds je puis faire passer une cubique. Soit p le degré de la courbe $f + C\varphi = 0$; elle aura avec la cubique $3p$ points d'intersection dont un certain nombre seront confondus avec les nœuds. Si l'on envisage les 9 nombres λ relatifs aux 9 nœuds et la somme $S\lambda$ de ces 9 nombres, on aura

$$3p = S\lambda + h,$$

h étant le nombre des points d'intersection mobiles situés en dehors des nœuds.

On aura d'autre part

$$p^2 = S\lambda^2,$$

d'où

$$(x^2p^2 - 6xp + 9) = S(x^2\lambda^2 + 2x\lambda + 1) - 2xh,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad (xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2 - 2xh.$$

D'autre part, on a, en appelant q le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$,

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} - S\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = q,$$

ou

$$p^2 - 3p + 2 = S\lambda^2 - S\lambda + 2q,$$

ou enfin

$$2(q - 1) + h = 0,$$

ce qui conduit à deux solutions

$$q = 1, \quad h = 0 \qquad \text{ou} \qquad q = 0, \quad h = 2.$$

C'est la première qui convient, puisque $q = 1$ d'après ce que nous avons vu

dans la première partie; on a donc $h = 0$ et la cubique n'a pas de point d'intersection mobile avec les courbes $f + C\varphi = 0$. L'équation (1) se réduit donc à

$$(xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2;$$

et en faisant $x = -\frac{3}{p}$ et multipliant par p^2

$$S(3\lambda - p)^2 = 0,$$

ce qui montre que tous les λ sont égaux entre eux et égaux à $\frac{p}{3}$.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_9$ les arguments elliptiques des neuf nœuds sur la cubique, on devra avoir

$$S\lambda u = 0,$$

c'est-à-dire égale à une période (des fonctions elliptiques envisagées). Donc Su est égal à une période divisée par λ, c'est-à-dire par $\frac{p}{3}$.

Si nous connaissons l'équation différentielle, nous connaîtrons les neuf nœuds, nous connaîtrons donc la cubique et les neuf arguments elliptiques u. Nous verrons donc si Su est commensurable avec une période. C'est là une condition nécessaire pour que l'intégration algébrique soit possible.

Supposons-la remplie, le nombre λ est par là même connu.

Considérons 8 de nos nœuds, peut-on construire une courbe de degré 3λ admettant ces 8 nœuds comme points d'ordre λ?

Une courbe de degré 3λ est déterminée par

$$\frac{3\lambda(3\lambda + 3)}{2}$$

points. D'autre part, un point multiple d'ordre λ compte pour

$$\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}$$

conditions. Il nous restera donc

$$\frac{9\lambda(\lambda + 1)}{2} - 8\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}$$

points disponibles.

Imposons-nous encore que le neuvième nœud soit un point multiple d'ordre λ − 1, ce qui fait

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$$

conditions; il reste

$$\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} = \lambda$$

conditions.

Menons par le neuvième nœud $\lambda - 1$ droites quelconques non tangentes à la cubique, et imposons-nous que ces $\lambda - 1$ droites rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. De sorte que, ou bien le neuvième nœud sera encore un point multiple d'ordre λ, ou bien ces $\lambda - 1$ droites seront les $\lambda - 1$ tangentes à la courbe au neuvième nœud. Cela fait encore $\lambda - 1$ conditions, il nous restera donc encore un paramètre.

Cela posé, les 9λ points d'intersection de la cubique avec la courbe d'ordre 3λ seront λ points confondus avec les huit premiers nœuds, $\lambda - 1$ points confondus avec le neuvième nœud, et un point inconnu.

Soit u_{10} l'argument elliptique de ce point inconnu, on aura

$$\lambda(u_1 + u_2 + \ldots + u_8) + (\lambda - 1)u_9 + u_{10} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$\Sigma \lambda u = 0.$$

Donc

$$u_9 = u_{10}.$$

Donc le point inconnu se confond avec le neuvième nœud; nous avons donc λ droites, à savoir la tangente à la cubique et les $\lambda - 1$ droites construites plus haut, qui rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. Le neuvième nœud est donc un point multiple d'ordre λ de la courbe d'ordre 3λ.

Nous avons donc défini un faisceau de courbes d'ordre 3λ admettant nos neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ.

Soit $\psi = 0$ l'une de ces courbes.

Cherchons en quels points cette courbe touche l'une des courbes définies par nos équations différentielles, équations que j'écrirai comme dans la première partie

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des points où une des courbes définies par les équations (2) peut toucher la courbe $\psi = 0$ est défini par

$$(3) \qquad L\frac{d\psi}{dx} + M\frac{d\psi}{dy} + N\frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Comme par hypothèse L, M et N sont d'ordre 4, et ψ d'ordre 3λ, le premier membre de (3) est un polynome homogène d'ordre

$$3\lambda + 3.$$

Le nombre total des points d'intersection de (3) et de $\psi = 0$ est donc

$$9\lambda(\lambda + 1).$$

Considérons maintenant l'un de nos neuf nœuds dicritiques, soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées; nous pourrons toujours supposer que ce point n'est pas sur la droite de l'infini $z = 0$, ce qui nous permettra de faire $z_0 = 1$.

Développons ψ suivant les puissances de $x - x_0 z$, $y - y_0 z$; il viendra

$$\psi = \psi_\lambda + \psi_{\lambda+1} + \ldots + \psi_{3\lambda},$$

en appelant ψ_k un ensemble de termes homogènes de dégré k en $x - x_0 z$ et $y - y_0 z$, multipliés par $z^{3\lambda - k}$.

Le nœud considéré est un point mutiple d'ordre λ de $\psi = 0$ et les directions des λ tangentes sont données par l'équation homogène

$$\psi_\lambda = 0.$$

Développons de même

$$zL - xN, \quad zM - yN$$

suivant les puissances croissantes de $x - x_0 z$, $y - y_0 z$; il viendra

$$zL - xN = A z^4 (x - x_0 z) + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5,$$
$$zM - yN = A z^4 (y - y_0 z) + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_5,$$

les η_k et les η'_k étant des polynomes homogènes d'ordre k en $x - x_0 z$, $y - y_0 z$ multipliés par z^{5-k}.

Il est à remarquer que le coefficient A est le même dans les deux formules; c'est précisément ce qui caractérise les *nœuds dicritiques*.

Comment trouver les termes du degré le moins élevé en $(x - x_0 z)$, $(y - y_0 z)$ dans le premier membre de (3)? Appelons Θ le premier membre de (3), il viendra

$$3\lambda\psi = x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy} + z\frac{d\psi}{dz},$$

d'où

(4) $$z\Theta - 3\lambda N\psi = (zL - xN)\frac{d\psi}{dx} + (zM - yN)\frac{d\psi}{dy}.$$

Les termes de degré le moins élevé du second membre sont évidemment

$$A z^4 \left[(x - x_0 z)\frac{d\psi_\lambda}{dx} + (y - y_0 z)\frac{d\psi_\lambda}{dy}\right] = A\lambda z^4 \psi_\lambda.$$

Les termes de degré le moins élevé de N sont $N_0 z^4$, $N_0 z^4$ étant ce que devient N quand on y change x et y en $x_0 z$ et $y_0 z$.

L'ensemble des termes du degré le moins élevé de Θ sera donc

$$\lambda z^3 \psi_\lambda (3 N_0 - A).$$

Les λ tangentes à la courbe $\Theta = 0$ sont donc les mêmes que les λ tangentes à la courbe $\psi = 0$.

Le nœud considéré compte donc pour $\lambda(\lambda + 1)$ intersections et les neuf nœuds pour $9\lambda(\lambda + 1)$ intersections.

Donc, ou bien les deux courbes se confondent, ou bien elles n'ont pas d'autre point d'intersection que les nœuds.

Mais il y a plus, je dis que je puis toujours supposer que la courbe $\Theta = 0$ admet nos neuf nœuds comme points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

En effet, nous ne changeons pas nos équations différentielles en changeant L, M, N en $L + xH$, $M + yH$, $N + zH$ (H étant un polynome homogène quelconque du troisième ordre).

On change ainsi Θ en

$$\Theta - 3\lambda H \psi.$$

Soit u_i l'un de nos neuf nœuds. Soit H_i la valeur que prend H en ce point et soit $3\lambda A_i \psi_\lambda$ l'ensemble des termes de Θ qui sont d'ordre λ en $x - x_0 z$, $y - y_0 z$.

Pour que la courbe

$$\Theta - 3\lambda H \psi = 0$$

admette nos neuf nœuds comme points d'ordre $\lambda + 1$, il faut et il suffit que l'on ait les neuf équations

$$(5) \qquad H_i - A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9).$$

Peut-on choisir les dix coefficients de H de façon à satisfaire à ces neuf équations? Il ne pourrait y avoir doute que si tous les déterminants formés à l'aide des coefficients de ces neuf équations à dix inconnues s'annulent tous à la fois. Mais s'il était ainsi, les équations

$$(5 \textit{ bis}) \qquad H_i = 0$$

admettraient une double infinité de solutions. C'est-à-dire qu'on pourrait faire passer par nos neuf nœuds un faisceau de cubiques et que Su serait une période.

Mais nous avons supposé que Su était commensurable avec une période et de telle façon que λ soit le plus petit nombre tel que $\lambda S u$ soit une période. Donc, si $\lambda > 1$, Su n'est pas une période. Donc on peut satisfaire aux équa-

tions (5). Donc, on peut toujours supposer que $\Theta = 0$ admet neuf points multiples d'ordre $\lambda - 1$.

Nous admettrons désormais qu'il en est ainsi.

La courbe $\Theta = 0$ est d'ordre $3(\lambda + 1)$ et elle a, en nos neuf nœuds, $9(\lambda + 1)$ points d'intersection avec notre cubique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses :

1° Ou bien la courbe $\Theta = 0$ se décompose en la cubique et une courbe d'ordre 3λ;

2° Ou bien elle n'a pas d'autre point d'intersection avec la cubique que les nœuds. Mais alors on aurait

$$(\lambda + 1) \mathrm{S}u = 0,$$

et comme on a déjà

$$\lambda \mathrm{S}u = 0,$$

il viendrait

$$\mathrm{S}u = 0,$$

ce qui est contraire à ce que nous avons supposé, puisque $\mathrm{S}u$ n'est pas une période.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

Donc la courbe $\Theta = 0$ se décompose; et les deux composantes sont, d'une part la cubique, d'autre part une courbe d'ordre 3λ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ et appartenant par conséquent à notre faisceau.

Soit $\mathrm{F} = 0$ l'équation de notre cubique, celle d'une courbe quelconque du faisceau sera

$$a\psi + b\mathrm{F}^\lambda = 0,$$

a et b étant des coefficients arbitraires et, en effet, la cubique prise λ fois, fait évidemment partie du faisceau.

On aura donc

$$\Theta = \mathrm{F}(a\psi + b\mathrm{F}^\lambda).$$

Soit maintenant

$$\theta = \mathrm{L}\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{F}}{dy} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{F}}{dz};$$

θ sera un polynome du sixième degré.

La courbe $\theta = 0$ passe évidemment par chacun des nœuds et sa tangente au nœud est celle de la cubique; on le démontrerait comme plus haut.

Les deux courbes $\theta = 0$ et $\mathrm{F} = 0$ ont donc dix-huit points d'intersection aux nœuds; donc :

Ou bien θ se décompose en deux facteurs dont F est l'un;

Ou bien les deux courbes n'ont pas d'autre point commun que les nœuds, ce qui entraînerait la congruence

$$2Su \equiv 0.$$

Cette congruence n'a pas lieu (si $\lambda > 2$).

Donc θ est divisible par F.

Soit donc

$$\theta = PF,$$

P étant un polynome du troisième degré.

Mais nous avons vu plus haut que les termes de degré λ en $x - x_0 z$ et en $y - y_0 z$ dans Θ sont

$$z^{\lambda}\psi_{\lambda}(3N_0 - \Lambda).$$

On verrait de même que les termes du premier degré en $x - x_0 z$ et $y - y_0 z$ dans θ sont

$$z^{\lambda}F_1(3N_0 - \Lambda),$$

en représentant par F_1 l'ensemble des termes du premier degré de F.

Mais, d'après l'hypothèse faite plus haut, chaque nœud sera un point d'ordre $\lambda + 1$ pour $\Theta = 0$, et l'on a par conséquent

$$3N_0 - \Lambda = 0.$$

Donc les termes du premier degré de θ disparaissent. Chaque nœud est donc un point double pour $\theta = 0$.

La courbe $P = 0$ passe donc par les neuf nœuds.

Si les cubiques $P = 0$, $F = 0$ étaient distinctes, on aurait donc

$$Su \equiv 0,$$

ce qui n'a pas lieu. Donc

$$\theta = cF^2,$$

c étant un coefficient constant.

Nous pouvons alors nous demander s'il est possible, étant donné un polynome F du troisième degré, de trouver trois polynomes L, M, N du quatrième degré, tels que

$$\theta = 3F^2.$$

Il est clair que ce problème comporte une infinité de solutions.

Soient P, Q, R trois polynomes quelconques du second degré, si nous

posons

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} L = xF + R\dfrac{dF}{dy} - Q\dfrac{dF}{dz}, \\ M = yF + P\dfrac{dF}{dz} - R\dfrac{dF}{dx}, \\ N = zF + Q\dfrac{dF}{dx} - P\dfrac{dF}{dy}, \end{cases}$$

il viendra évidemment

$$L\frac{dF}{dx} + M\frac{dF}{dy} + N\frac{dF}{dz} = 3F^2.$$

C'est d'ailleurs la solution la plus générale, comme on s'en assurerait en remarquant que si L', M', N' sont trois polynomes du quatrième degré satisfaisant à l'identité

$$L'\frac{dF}{dx} + M'\frac{dF}{dy} + N'\frac{dF}{dz} = 0,$$

le polynome L' devra être égal à la somme de $\frac{dF}{dy}$ et de $\frac{dF}{dz}$ multipliés respectivement par deux polynomes du second degré.

Cela posé, donnons à nos polynomes L, M, N la forme (α) et cherchons quels seront les points singuliers de nos équations différentielles. Ces points singuliers sont donnés par

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

et l'on voit tout de suite qu'ils se divisent en deux catégories.

Nous avons d'abord neuf points satisfaisant aux équations

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dF}{dx} + y\dfrac{dF}{dy} + z\dfrac{dF}{dz} = 0, \\ xP + yQ + zR = 0. \end{cases}$$

Nous avons ensuite douze points satisfaisant aux équations

$$\frac{P}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{Q}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{R}{\dfrac{dF}{dz}}.$$

Les neuf premiers points sont sur la cubique F; ce sont eux qui devraient être nos neuf nœuds dicritiques.

Ils sont à l'intersection de $F = 0$ avec une autre cubique. On aura donc

$$Su = 0.$$

Le faisceau $f + C\varphi = 0$ devra alors se réduire à un faisceau de cubiques

$$F + CF_1 = 0,$$

de telle façon que $\lambda = 1$.

On pourrait, il est vrai, se demander si l'on ne peut pas faire passer par ces neuf nœuds trois courbes de degré 3λ, linéairement indépendantes et admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ.

On aurait alors non plus un faisceau mais un *réseau* de courbes d'ordre 3λ, et l'équation de ce réseau pourrait se mettre sous la forme

$$F^\lambda + C' F_1^\lambda + C''\Phi = 0,$$

où C' et C'' seraient des constantes arbitraires et Φ un polynome d'ordre 3λ indécomposable.

Mais cela est impossible; soit en effet M un point quelconque du plan; par ce point passeraient une infinité de courbes du réseau, formant un faisceau. Deux quelconques de ces courbes se couperaient en $9\lambda^2$ points aux nœuds et en un point au point M. En tout $9\lambda^2 + 1$ points d'intersection. Cela est absurde, puisque les deux courbes sont d'ordre 3λ.

Ainsi nous devons conclure que $\lambda = 1$.

Nous avons, il est vrai, laissé de côté un cas; celui où λ serait égal à 2, où l'on aurait par conséquent

$$2Su = 0$$

et où la courbe $\theta = 0$, au lieu de se décomposer en deux cubiques dont l'une serait $F = 0$, serait tangente aux neuf nœuds à la cubique $F = 0$.

Dans ce cas on peut construire un faisceau de courbes du sixième degré admettant les neuf nœuds comme points doubles. Soit $f_1 + Cf_2 = 0$ l'équation de ce faisceau. On peut, quel que soit p, construire un faisceau de courbes de degré $6p$ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre $2p$. L'équation de ce faisceau est

$$f_1^p + Cf_2^p = 0.$$

Mais on ne peut pas, pour la même raison que tout à l'heure, construire un réseau de pareilles courbes.

On doit donc supposer $p = 1$ et par conséquent le faisceau $f + C\varphi = 0$ ne pourrait être autre chose que le faisceau du sixième degré que nous venons de construire.

Supposons donc $\lambda = 2$.

L'équation du faisceau peut se mettre sous la forme

$$F^2 + C\varphi = 0,$$

φ étant du sixième degré.

La valeur $C = 0$ est alors une valeur remarquable de C.

Les équations connues

$$m - m\lambda = -\sum(\alpha_i - 1)n_i,$$

$$2 - 2\lambda = -\sum(\alpha_i - 1)\lambda_i,$$

deviennent alors

$$6 - 6\lambda = -(\lambda - 1)3 - \sum{}'(\alpha_i - 1)n_i,$$

$$2 - 2\lambda = -(\lambda - 1) - \sum{}'(\alpha_i - 1)\lambda_i,$$

le signe Σ' représentant une sommation s'étendant à tous les facteurs u_i correspondant à toutes les valeurs critiques de C autres que $C = 0$.

Mais si $\lambda = 2$, la dernière de ces équations se réduit à

$$\sum{}'(\alpha_i - 1)\lambda_i = 1.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Il ne doit y avoir, en dehors de $C = 0$, qu'une seule valeur critique pour laquelle on aura

$$\lambda_i = 1, \quad \alpha_i = 2.$$

D'autre part, la première équation donne

$$\sum{}'(\alpha_i - 1)n_i = 3;$$

ou, puisqu'il n'y a qu'une seule valeur critique et que $\alpha_i = 2$,

$$n_i = 3.$$

Ainsi, pour cette valeur critique, $F^2 + C\varphi$ doit se réduire au carré d'un polynome du troisième degré F_1, de sorte que la cubique $F_1 = 0$ passe par nos neuf nœuds. On aura donc

$$Su = 0,$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Ainsi dans ce cas très particulier, que j'ai étudié peut-être un peu longuement, nous sommes parvenus à limiter le degré des courbes algébriques

$$f - C\varphi = 0;$$

mais pour cela les considérations purement arithmétiques ne nous ont pas suffi;

nous avons dû recourir au théorème d'Abel, qui nous a appris que

$$\sum S u = 0.$$

Cette circonstance doit nous faire mieux comprendre la nature des difficultés à vaincre.

Étude des points singuliers. — Dans le voisinage d'un point singulier, il existe deux séries que nous avons appelées X_1 et X_2 et qui sont ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ (*loc. cit.*, p. 39). Réciproquement, on peut égaler les différences

$$\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$$

à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2.

Soit alors

$$\frac{f}{\varphi} = \text{const.}$$

l'intégrale générale de notre équation différentielle. Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par z^p, les quotients $\frac{f}{z^p}$ et $\frac{\varphi}{z^p}$ seront des polynomes entiers par rapport aux différences $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$; ce seront donc des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2. Soient S_1 et S_2 ces séries, nous aurons

$$\frac{f}{z^p} = S_1, \qquad \frac{\varphi}{z^p} = S_2$$

et notre intégrale générale s'écrira

$$\frac{S_1}{S_2} = \text{const.}$$

Supposons d'abord que notre point singulier soit un nœud dicritique, l'intégrale générale de l'équation pourra s'écrire

$$\frac{X_1}{X_2} = \text{const.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ est une fonction de $\frac{X_1}{X_2}$; elle ne changera pas quand on multiplie X_1 et X_2 par une même constante k. Si donc je désigne par S_1^p et S_2^p les groupes de termes homogènes de degré p dans S_1 et dans S_2, nous aurons

$$\frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + k^3 S_1^3 + \ldots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + k^3 S_2^3 + \ldots} = \frac{S_1^1 + S_1^2 + S_1^3 + \ldots}{S_2^1 + S_2^2 + S_2^3 + \ldots}.$$

Le premier membre doit être indépendant de k.

D'autre part, $S_1^1, S_1^2, \ldots, S_1^{\lambda-1}$ doivent s'annuler ainsi que $S_2^1, S_2^2, \ldots, S_2^{\lambda-1}$, tandis que S_1^λ et S_2^λ sont différents de zéro; et en effet les courbes $f + C\varphi = 0$ doivent avoir au point considéré un point multiple d'ordre λ à tangentes distinctes.

On aura donc, quel que soit k,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^\lambda S_1^\lambda + k^{\lambda+1} S_1^{\lambda+1} + \ldots}{k^\lambda S_2^\lambda + k^{\lambda+1} S_2^{\lambda+1} + \ldots}$$

ou, en faisant tendre k vers zéro,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^\lambda}{S_2^\lambda}.$$

Ainsi *la fraction rationnelle* $\frac{f}{\varphi}$ *est le quotient de deux polynomes entiers homogènes d'ordre* λ *en* X_1 *et* X_2.

Considérons maintenant un nœud monocritique. L'intégrale générale est alors de la forme

$$\frac{X_1^\mu}{X_2^\nu} = \text{const.}$$

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit donc pas changer quand on change X_1 et X_2 en $X_1 k^\nu$ et $X_2 k^\mu$. Soit alors

$$A X_1^m X_2^n$$

un terme quelconque de l'une des séries S_1 ou S_2; ce terme se changera en

$$A X_1^m X_2^n k^{m\nu + n\mu},$$

je dirai qu'il est de la classe $m\nu + n\mu$. Soient alors S_1^p et S_2^p l'ensemble des termes de classe p de S_1 et de S_2; nous aurons encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + \ldots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + \ldots}.$$

Comme la courbe $f + C\varphi = 0$ doit présenter λ branches de courbe de la forme

$$X_1^\mu = \gamma X_2^\nu$$

passant au point considéré (cf. *loc. cit.*, p. 43), les premiers termes, qui ne s'annuleront pas au numérateur et au dénominateur de la fraction précédente, seront les termes $k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu}$ et $k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu}$, de sorte que nous aurons, quel que soit k,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu} + \ldots}{k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu} + \ldots}.$$

et en faisant $k = 0$

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^{\lambda\mu\nu}}{S_2^{\lambda\mu\nu}}.$$

Ainsi *la fraction rationnelle* $\frac{f}{\varphi}$ *est le quotient de deux polynomes entiers homogènes d'ordre λ en X_1^{μ} et X_2^{ν}.*

Il reste à examiner le cas d'un col qui est un peu plus compliqué.

Si l'intégration algébrique est possible, les séries X_1 et X_2 existent certainement encore; l'intégrale générale devient

$$X_1^{\mu} X_2^{\nu} = \text{const.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ ne change pas quand on change X_1 en $k^{\nu} X_1$ et X_2 en $k^{\mu} X_2$. Un terme en $X_1^m X_2^n$ est alors multiplié par $k^{m\nu - n\mu}$ et peut être appelé de classe $m\nu - n\mu$, seulement il peut y avoir des termes de classe négative.

Soit encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{\sum k^p S_1^p}{\sum k^p S_2^p}.$$

Le numérateur, comme le dénominateur, sont développables (pour les valeurs de k voisines de 1) suivant les puissances positives ou négatives de k; il en est de même de

$$f \sum k^p S_2^p - \varphi \sum k^p S_1^p = 0.$$

Cette fonction de k devant être identiquement nulle, ne peut l'être que si tous les coefficients du développement sont nuls; on a donc

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^p}{S_2^p},$$

en choisissant p de telle façon que S_1^p ne soit pas identiquement nul. Seulement ici S_1^p et S_2^p peuvent contenir une infinité de termes. Ce ne sont plus des polynomes, ce sont des séries.

Soient à nouveau M_1 un nœud quelconque, μ_1 et ν_1 ses entiers caractéristiques, X_1^1, X_2^1 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes. Nous pourrons toujours former ces deux séries à partir de l'équation différentielle. Ces deux séries convergeront dans un certain domaine D_1; soit ensuite Δ_1 un domaine plus étendu que D_1; nous pourrons encore définir dans ce domaine les deux fonctions X_1^1 et X_2^1 par le procédé de la continuation analytique.

Soient M_2 un second nœud, μ_2 et ν_2 ses entiers caractéristiques, X_1^2 et X_2^2 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes; elles convergeront dans un certain domaine D_2 et l'on pourra, par continuation analytique, définir les fonctions X_1^2 et X_2^2 dans un domaine plus étendu Δ_2.

Supposons que Δ_1 et Δ_2 aient une partie commune; dans cette partie commune les quatre fonctions X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2 seront définies et nous devrons avoir une relation entre

$$Z_1 = \frac{(X_1^1)^{\mu_1}}{(X_2^1)^{\nu_1}} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{(X_1^2)^{\mu_2}}{(X_2^2)^{\nu_2}}.$$

Dans le cas où l'intégration algébrique est possible, on voit quelle est la forme de cette relation; la fonction $\frac{f}{\varphi}$ doit être une fonction rationnelle de Z_1 d'une part, de Z_2 d'autre part.

Il faut donc qu'une fonction rationnelle de Z_1 soit égale à une fonction rationnelle de Z_2.

Soit x_0, y_0, z_0 un point de la partie commune à Δ_1 et à Δ_2; connaissant nos quatre fonctions X dans cette partie commune, par continuation analytique, nous saurons développer Z_1 et Z_2 suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Soient Z_1^0 et Z_2^0 les valeurs de Z_1 et Z_2 au point x_0, y_0, z_0, nous saurons développer $Z_2 - Z_2^0$ suivant les puissances de $Z_1 - Z_1^0$.

Nous aurons donc la relation cherchée entre Z_1 et Z_2 sous une forme où entre une série infinie, mais cela ne nous permet pas encore de reconnaître si l'on peut la mettre sous la forme d'une égalité entre deux fonctions rationnelles.

Introduction des fonctions fuchsiennes. — Considérons d'abord un nœud dicritique et supposons que nous nous donnions : 1° les valeurs remarquables C_1, C_2, ..., C_q; 2° le nombre λ; 3° les nombres λ_i et les exposants α_i relatifs aux différents facteurs correspondant aux q valeurs remarquables.

Soit M_k l'un des communs multiples des exposants α_i correspondant à la valeur remarquable C_k.

Construisons un polygone fuchsien R_0 de la première famille et du premier genre, supposons que nous ayons $2q - 2$ sommets répartis en q cycles. Le premier cycle comprendra un seul sommet A_1; le second, le troisième, etc., et l'avant-dernier cycles comprendront chacun deux sommets que j'appellerai A_2 et A'_2, A_3 et A'_3, ..., A_{q-1} et A'_{q-1}, le dernier cycle comprendra un seul sommet A_q. La somme des angles du $k^{\text{ième}}$ cycle sera $\frac{2\pi}{M_k}$ et il y aura une fonc-

tion fuchsienne qui sera égale à C_k au point A_k. Soit $F(\zeta)$ cette fonction fuchsienne, égalons-la à $-\frac{f}{\varphi}$ et écrivons

$$F(\zeta) = -\frac{f}{\varphi}.$$

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle du rapport $\frac{X_1}{X_2}$ que j'appellerai Z; nous aurons donc

$$F(\zeta) = R(Z),$$

R désignant une fonction rationnelle. Je dis que Z sera une fonction uniforme de ζ.

Si, en effet, $F(\zeta)$ décrit un contour fermé, plusieurs valeurs de Z ne pourront s'échanger que si ce contour contient l'un des points C_k, et si l'on tourne autour d'un point C_k et que $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^K$ soient les exposants correspondants, nous verrons s'échanger, par permutation circulaire, d'une part, λ_k^1 groupes de α_k^1 valeurs; d'autre part, λ_k^2 groupes de α_k^2 valeurs, etc.

Si ζ décrit un contour fermé, il faut d'abord que ce contour enveloppe un des sommets de R_0, pour que $F(\zeta)$ tourne autour d'un des points C_k. Si ζ tourne autour d'un sommet, $F(\zeta)$ tourne M_k fois autour de C_k, et comme M_k est multiple de tous les exposants α_k^i, Z revient à la même valeur.

Donc Z est fonction uniforme de ζ. C. Q. F. D.

Or Z, pour une même valeur de $F(\zeta)$, peut prendre λ valeurs. Considérons donc λ polygones fuchsiens congruents à R_0, que j'appellerai

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{\lambda-1}.$$

L'ensemble de ces polygones constituera un polygone fuchsien S_0. Ce polygone S_0, en associant convenablement ses côtés en paires de côtés conjugués, engendrera un groupe fuchsien dont les substitutions n'altèreront pas Z.

Donc Z est fonction fuchsienne de ζ.

La surface du polygone R_0 (au point de vue de la géométrie non euclidienne) sera

$$q - 2 - \sum \frac{1}{M_k}$$

en prenant pour unité celle du quadrilatère dont les quatre angles sont nuls. Celle de S_0 devra donc être

$$\lambda\left[q - 2 - \sum \frac{1}{M_k}\right].$$

D'autre part, le nombre des cycles de sommets de S_0 sera en général

$$\sum \lambda_i.$$

Ce nombre pourrait se réduire si la somme des angles relatifs à un de ces cycles était égale à 2π; on pourrait alors assembler les polygones R_k de façon à faire disparaître ce cycle. Mais cette somme d'angles est égale à

$$2\pi \frac{\alpha_i}{M_k},$$

α_i et M_k étant les nombres α_i et M_k correspondant au cycle envisagé. Mais comme M_k est un commun multiple *quelconque* des α_i, je pourrai toujours supposer $M_k > \alpha_i$.

Nous pouvons donc toujours supposer que le nombre des cycles de S_0 est précisément $\Sigma\lambda_i$.

Quel est le nombre des côtés? Le polygone R_0 a $2q-2$ côtés; quand on y annexe R_1, on a en tout $2(2q-2)$ côtés. Mais comme R_0 a un côté commun avec R_1 et que cette paire de côtés disparaît, il reste pour le polygone $R_0 + R_1$ un nombre de côtés égal à

$$2(2q-2)-2.$$

Annexons encore R_2, nous ajoutons $2q-2$ côtés; mais R_2 a au moins un côté commun avec $R_0 + R_1$, cela fait une paire de côtés à supprimer et il reste

$$3(2q-2)-2.2$$

côtés pour le polygone $R_0 + R_1 + R_2$. Ce nombre doit être diminué si R_2 a plus d'un côté commun avec $R_0 + R_1$.

En général S_0 aura

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2$$

côtés, si R_i n'a qu'un côté commun avec $R_0 + R_1 + \ldots + R_{i-1}$.

Dans le cas contraire ce nombre devrait être diminué.

En général le nombre des côtés sera

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2-2h,$$

h étant un entier positif ou nul.

D'après une formule que j'ai donnée dans les *Acta mathematica*, tome I [1], on a, si $2n$ est le nombre des côtés, q le nombre des cycles, p le genre du polygone fuchsien

$$p = \frac{n+1-q}{2}.$$

---

[1] *Œuvres*, t. II, p. 149.

Nous aurons donc ici

$$p = \frac{\lambda(q-1) - \lambda + 2 - h - \sum \lambda_i}{2}$$

ou

$$2p + h = \lambda(q-2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$\sum \lambda_i = \lambda(q-2) + 2.$$

On a donc

$$2p + h = 0.$$

Or les nombres p et h sont positifs ou nuls ; on a donc

$$p = 0, \qquad h = 0.$$

Ainsi *le genre du polygone fuchsien* S_0 *est nul et le nombre de ses côtés est* $2\lambda(q-2)+2$.

Il faudrait rechercher maintenant comment sont assemblés les divers polygones partiels R_k dont l'ensemble compose S_0, et comment les côtés de S_0 sont conjugués deux à deux.

Je désignerai par $A_{i,k}$ et $A'_{i,k}$ les sommets du polygone R_k qui sont homologues aux sommets $A_i = A_{i,0}$ et $A'_i = A'_{i,0}$ du polygone R_0.

Considérons alors le côté $A_{1,k}A'_{2,k}$, ou bien il coïncidera avec un côté $A_{1,h}A_{2,h}$ du polygone R_h, les deux polygones R_h et R_k ayant un côté commun, ou bien ce sera un côté de S_0, mais alors il sera conjugué d'un autre côté $A_{1,h}A_{2,h}$ de S_0.

Dans l'un et l'autre cas, je dirai que l'indice h est le *conséquent* de l'indice k, et l'indice k l'*antécédent* de l'indice h. Chacun de nos λ indices aura ainsi un conséquent et un antécédent.

Considérons alors la substitution T, qui change chacun de ces indices en son conséquent. C'est une substitution de λ lettres, et si

$$\alpha_1^1, \quad \alpha_1^2, \quad \ldots, \quad \alpha_1^i, \quad \ldots,$$
$$\lambda_1^1, \quad \lambda_1^2, \quad \ldots, \quad \lambda_1^i, \quad \ldots$$

sont les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur remarquable C_1, les λ lettres se répartiront en λ_1^1 groupes de α_1^1 lettres, ..., en λ_1^i groupes de α_1^i lettres, ..., et la substitution T_1 permutera circulairement les lettres de chaque groupe.

Considérons maintenant le côté $A'_{2k}A'_{3k}$, il coïncidera avec un côté $A_{2h}A_{3h}$ de R_h, ou bien il sera un côté de S_0 et sera conjugué du côté $A_{2h}A_{3h}$.

Dans les deux cas, définissant les conséquents à un nouveau point de vue, je dirai que h est le *conséquent* de k.

J'appellerai T_2 la substitution de λ lettres qui change chaque indice en son conséquent.

On définirait de même les substitutions $T_3, T_4, \ldots, T_{q-1}$ qui correspondent aux côtés $A'_2 A'_3$, $A'_3 A'_4$, $\ldots$, $A'_{q-1} A'_q$ de la même façon que T_1 et T_2 correspondent aux côtés $A_1 A'_2$ et $A'_2 A'_3$.

Les $q - 1$ substitutions T_k devront satisfaire à certaines conditions. Nous avons déjà vu quelles sont celles que doit remplir T_1 et comment les lettres doivent se répartir en groupes tels que T_1 permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Soient maintenant

$$\alpha_k^1, \quad \alpha_k^2, \quad \ldots, \quad \alpha_k^{\mathrm{K}},$$
$$\lambda_k^1, \quad \lambda_k^2, \quad \ldots, \quad \lambda_k^{\mathrm{K}},$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_k.

On pourra répartir les λ indices en groupes tels que la substitution $T_{k-1} T_k^{-1}$ permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devrons avoir λ_k^1 groupes de α_k^1 lettres, λ_k^2 groupes de α_k^2 lettres, $\ldots$, λ_k^{K} groupes de α_k^{K} lettres ($k = 2, 3, \ldots, q-1$).

Soient enfin

$$\alpha_q^1, \quad \alpha_q^2, \quad \ldots, \quad \alpha_q^{\mathrm{Q}},$$
$$\lambda_q^1, \quad \lambda_q^2, \quad \ldots, \quad \lambda_q^{\mathrm{Q}}$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_q.

Les λ indices pourront se répartir en groupes tels que T_{q-1} permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_q^1 groupes de α_q^1 lettres, $\ldots$, λ_q^{Q} groupes de α_q^{Q} lettres.

Une question se pose alors. Existe-t-il des substitutions T satisfaisant à toutes ces conditions? et par conséquent existe-t-il un polygone S_0?

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle de $Z = \frac{X_1}{X_2}$

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1, X_2)}{Q(X_1, X_2)},$$

P et Q étant deux polynomes homogènes d'ordre λ.

Soient C_k une valeur remarquable quelconque, A_k et B_k deux constantes telles que $B_k = A_k C_k$. Alors le polynome

$$A_k P - B_k Q$$

devra se décomposer en facteurs, et l'on aura

$$(1) \qquad A_k P + B_k Q = U_1^{\alpha_k^1} U_2^{\alpha_k^2} \ldots U_h^{\alpha_k^h},$$

U_h étant un polynome d'ordre λ_h^h.

La question proposée revient alors à la suivante. Peut-on toujours trouver des polynomes P et Q satisfaisant aux conditions (1)?

Nous disposons des indéterminées suivantes :

1° Les $2\lambda + 2$ coefficients des polynomes P et Q.

2° Les q constantes A_k, d'où l'on déduit les q constantes B_k par les équations $B_k = A_k C_k$, les C_k sont supposés donnés.

3° Les $\Sigma(\lambda_i + 1)$ coefficients des facteurs U.

D'autre part, nous avons à satisfaire aux conditions (1) qui sont des identités entre deux polynomes d'ordre λ.

Chacune d'elles correspond donc à $\lambda + 1$ conditions, cela fait donc en tout $q(\lambda + 1)$ conditions.

Si donc nous appelons N le nombre total des facteurs U_i, de telle sorte que

$$\sum (\lambda_i + 1) = \sum \lambda_i + N,$$

nous avons

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i$$

paramètres qui doivent satisfaire à $q(\lambda + 1)$ conditions; il nous reste donc

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i - q(\lambda + 1)$$

paramètres arbitraires. Or, en vertu des équations

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i, \qquad 2\lambda = \sum (\alpha_i - 1)\lambda_i - 2,$$

ce nombre se réduit à $4 + N$.

Remarquons que les équations (1) sont homogènes si l'on y regarde :

1° Les coefficients de P et Q comme étant d'ordre λ;

2° Les constantes A_k comme étant d'ordre λ;

3° Les coefficients d'un facteur U_i de degré λ_i comme étant d'ordre $2\lambda_i$.

En effet, il est aisé de vérifier qu'en adoptant cette convention les deux membres de (1) sont homogènes d'ordre 2λ.

Mais il y a plus, ces équations (1) sont doublement homogènes, je veux dire

que, si ξ et η désignent deux indéterminées, elles ne changent pas quand on change

$$(2) \qquad A_k, \quad P, \quad Q, \quad U_i$$

en

$$(3) \qquad A_k\xi^\lambda, \quad P\eta^\lambda, \quad Q\eta^\lambda, \quad U_i\xi^{\lambda_i}\eta^{\lambda_i}.$$

Adjoignons aux équations (1) d'autres relations en nombre $N+2$ entre nos inconnues; je suppose que ces nouvelles relations présentent la même homogénéité double que les équations (1), c'est-à-dire ne changent pas quand les quantités (2) se changent dans les quantités (3).

Nous avons alors $N+2+q(\lambda+1)$ équations homogènes; le nombre total des inconnues est $N+4+q(\lambda+1)$; mais ces équations étant doublement homogènes sont en réalité des équations entre les rapports des coefficients des A_kP et des A_kQ élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda}$ et des coefficients des U_i élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda_i}$. Le nombre de ces rapports *réellement distincts* est seulement

$$N+2+q(\lambda+1).$$

Nous avons donc autant d'équations que d'inconnues et, comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, nous pourrons toujours en tirer nos inconnues.

Ainsi si les équations (1) sont distinctes, les rapports de nos inconnues dépendront de $N+2$ paramètres arbitraires et nos inconnues elles-mêmes de $N+4$ paramètres.

Si les équations (1) n'étaient pas distinctes, les inconnues dépendraient de plus de $N+4$ paramètres.

Il semble donc que notre problème comporte toujours une infinité de solutions. Mais il importe d'observer que ces solutions ne sont pas réellement distinctes.

En effet, si dans les polynomes P, Q et U_i on remplace X_1 et X_2 par

$$\alpha X_1 + \beta X_2 \quad \text{et} \quad \gamma X_1 + \delta X_2,$$

les équations (1) ne cesseront pas d'être satisfaites. Or cette transformation dépend de quatre paramètres α, β, γ, δ. Donc voilà une quadruple infinité de solutions qui ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres.

D'autre part, l'équation (1) ne change pas si l'on y change

$$U_1, \quad U_2, \quad \dots, \quad U_h, \quad A_k$$

en

$$\mu_1 U_1, \quad \mu_2 U_2, \quad \dots, \quad \mu_K U_K, \qquad A_\lambda \mu_1^{\alpha_\lambda^1} \mu_2^{\alpha_\lambda^2} \dots \mu_K^{\alpha_\lambda^K}.$$

Voilà une transformation qui dépend des K paramètres μ. Comme nous pouvons opérer de même sur nos q équations (1), cela nous fait autant de paramètres μ que de facteurs U, c'est-à-dire N. En tenant compte de α, β, γ, δ, cela fait une transformation dépendant de $N + 4$ paramètres.

Nous aurons donc une $(N + 4)^{uple}$ infinité de solutions qui ne différeront pas essentiellement les unes des autres.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème ne comportera qu'un nombre fini de solutions essentiellement différentes.

Maintenant, les équations (1) sont-elles distinctes? La considération des fonctions fuchsiennes permet de l'affirmer.

Si, en effet, les valeurs remarquables C_k sont données, on pourra construire d'une seule manière le polygone fuchsien R_0; on pourra ensuite assembler *d'un nombre fini de manières* λ polygones

$$R_0, \quad R_1, \quad \dots, \quad R_{\lambda-1}$$

pour former le polygone S_0.

C'est parmi les polygones S_0 ainsi formés, en nombre fini, qu'il faut choisir ceux qui conviennent à la question. Les considérations qui précèdent montrent qu'il y en aura toujours, mais il ne peut y en avoir qu'un nombre fini.

En résumé, si l'on se donne les valeurs remarquables C_k, si l'on se donne les entiers λ et λ_i assujettis seulement aux conditions

$$\lambda = S \alpha_i \lambda_i, \qquad 2\lambda - \sum (\nu_i - 1)\lambda_i = 2,$$

on pourra toujours former les polynones P et Q et le polygone S_0 et l'on ne pourra le faire que d'un nombre fini de manières.

Extension aux nœuds monocritiques. — Considérons un nœud monocritique; soient X_1 et X_2 les deux séries correspondantes, et soit

$$Z = \frac{(X_1)^{\mu}}{(X_2)^{\nu}}.$$

Nous avons vu plus haut que $-\frac{f}{\varphi}$ est une fonction rationnelle de Z dont le numérateur et le dénominateur sont d'ordre λ

$$-\frac{f}{\varphi} = R(Z).$$

Soit C_k une valeur remarquable; lorsque $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_k, les λ valeurs de Z tirées de l'équation qui précède s'échangeront entre elles. Soit u_i un facteur de $f + C_k\varphi$, soient λ_i et α_i les deux nombres correspondants. Si ce facteur n'est pas singulier, nous aurons λ_i groupes de α_i valeurs de Z, et les valeurs de chacun de ces groupes s'échangeront circulairement quand $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_k.

Si le facteur est critique, α_i est divisible par μ, nous avons alors $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs de Z et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si le facteur est hypercritique, α_i est divisible par ν et nous avons $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si enfin le facteur est doublement singulier, α_i est divisible par $\mu\nu$ et nous avons $\lambda_i - 2$ groupes de α_i valeurs, un groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Formons encore le polygone R_0 et formons la fonction fuchsienne $F(\zeta)$. Posons

$$F(\zeta) = R(Z).$$

Z sera encore une fonction fuchsienne de ζ.

Le polygone S_0 correspondant sera formé de λ polygones partiels

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{\lambda-1}.$$

Le nombre des cycles de sommets est encore $\Sigma\lambda_i$.

Celui des côtés sera

$$\lambda(2q - 2) - 2\lambda + 2 - 2h,$$

h étant positif ou nul. On en déduit, p étant le genre de S_0,

$$2p + h = \lambda(q - 2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Revenons aux formules qui, dans la première partie de ce travail, remplissent les lignes 6 à 12 de la page 45. Pour chaque nœud monocritique, nous aurons q de ces formules, correspondant aux q valeurs remarquables; additionnons-les il viendra

$$q\lambda - \sum \alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right).$$

Nous avons trouvé d'autre part (p. 46), formule (δ),

$$(q-2)\lambda = 2p + \alpha_1\left(1-\frac{1}{\mu}\right) - \alpha_2\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i;$$

on tire de là

$$\lambda(q-2) + 2p + h = \sum \lambda_i,$$

d'où

$$2p + h = 0,$$

et comme p et h ne peuvent être négatifs

$$p = h = 0.$$

On définirait comme précédemment les substitutions

$$T_1, \quad T_2, \quad \dots, \quad T_{q-1},$$

et pour chacune des substitutions

$$T_1, \quad T_2T_1^{-1}, \quad T_3T_2^{-1}, \quad \dots, \quad T_q T_{q-1}^{-1}, \quad T_q$$

nous savons comment les λ indices se répartissent en groupes de lettres se permutant circulairement. Chacun de ces groupes correspondra d'ailleurs à un cycle de sommets du polygone S_0.

Pourra-t-on toujours former un polygone S_0 satisfaisant à toutes ces conditions?

Nous aurons encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1^{\mu}, X_2^{\nu})}{Q(X_1^{\mu}, X_2^{\nu})},$$

P et Q étant deux polynomes homogènes d'ordre λ.

Nous aurons encore

$$(1) \qquad A_i P + B_i Q = U_1^{\alpha_i^1} U_2^{\alpha_i^2} \dots U_K^{\alpha_i^K}.$$

Cependant, si le facteur U_1 par exemple, était critique, il faudrait dans le second membre de (1) remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_1^{\mu})^{\frac{\alpha_k^1}{\mu}} U_1'^{\alpha_k^1},$$

U_1' étant un polynome homogène d'ordre $\lambda_k^1 - 1$. S'il était hypercritique, il faudrait remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_2^{\nu})^{\frac{\alpha_k^1}{\nu}} U_1'^{\alpha_k^1};$$

et s'il était doublement singulier, il faudrait remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_1^{\mu})^{\alpha_k^1} (X_2^{\nu})^{\alpha_k^1} U_1'^{\alpha_k^1},$$

U_1' étant un polynome homogène d'ordre $\lambda_k^1 - 2$.

De combien d'indéterminées disposons-nous?

1° Des $2\lambda + 2$ coefficients de P et de Q ;

2° Des q constantes A_k ;

3° Des coefficients des polynomes U_i et U_i'.

Ces coefficients sont au nombre de $\lambda_i + 1$ pour un polynome U_i, de λ_i pour un polynome U_i' simplement singulier, de $\lambda_i - 1$ pour un polynome U_i' doublement singulier.

Le nombre total est donc

$$\sum (\lambda_i + 1) - 2 = \sum \lambda_i + N - 2,$$

en appelant N le nombre total des facteurs.

Nous avons donc en tout

$$N + 2\lambda + q + \sum \lambda_i$$

indéterminées.

D'autre part, nous avons q équations (1) qui équivalent à $q(\lambda + 1)$ conditions, de sorte qu'il reste

$$N + 2\lambda - q\lambda + \sum \lambda_i$$

paramètres arbitraires.

En vertu de l'équation

$$\sum \lambda_i = (q - 2)\lambda + 2,$$

ce nombre se réduit à $N + 2$.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème comporte une $(N + 2)^{\text{uple}}$ infinité de solutions.

Mais d'une solution on peut en déduire une $(N + 2)^{\text{uple}}$ infinité d'autres. On peut, en effet, sans cesser de satisfaire aux équations (1) :

1° Changer

$$X_1^{\mu} \quad \text{et} \quad X_2^{\nu}$$

en

$$\alpha X_1^{\mu} \quad \text{et} \quad \beta X_2^{\nu} ;$$

2° Changer

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_K, \quad A_\lambda$$

en

$$\mu_1 U_1, \quad \mu_2 U_2, \quad \ldots, \quad \mu_K U_K, \quad A_\lambda \mu_1^{\alpha_\lambda^1} \mu_2^{\alpha_\lambda^2} \ldots \mu_k^{\alpha_\lambda^k}.$$

Nous n'avons donc qu'un nombre fini de solutions essentiellement distinctes. Nous en aurions un nombre infini si les équations (1) n'étaient pas distinctes, mais cela ne se peut pas, puisqu'on ne peut assembler les polygones

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{\lambda-1}$$

que d'un nombre fini de manières.

Nous arrivons donc à la même conclusion que plus haut : *Il y a toujours des polygones* S_0 *et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.*

Le polygone V_0. — Nous venons de voir comment on pourrait construire le polygone fuchsien R_0, et comment il existait un polygone S_0 correspondant à chacun des nœuds tant dicritiques que monocritiques.

Soit G le groupe fuchsien engendré par R_0; soit g le groupe fuchsien engendré par S_0. Le groupe g sera un sous-groupe de G. C'est un sous-groupe « d'indice λ », puisque la surface (non euclidienne) de S_0 est égale à λ fois celle de R_0.

A chacun des nœuds correspondra ainsi un sous-groupe g. Soit Γ le groupe formé des substitutions communes à tous les sous-groupes g.

Je dis que Γ sera un groupe fuchsien, c'est-à-dire que Γ sera un sous-groupe d'indice fini de G.

Nous avons posé plus haut

$$\frac{f}{\varphi} = -F(\zeta)$$

et nous avons vu que $F(\zeta)$ devait être une fonction rationnelle de

$$Z = \frac{X_1}{X_2}$$

dans le cas d'un nœud dicritique et de

$$Z = \frac{(X_1)^\mu}{(X_2)^\nu}$$

dans le cas d'un nœud monocritique.

Soit alors k le nombre des nœuds et soient

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_k$$

les diverses fonctions Z relatives à ces divers nœuds.

Tous les Z_i seront fonctions fuchsiennes de ζ; et $F(\zeta)$ sera fonction rationnelle de chacun des Z_i.

A chaque valeur de $F(\zeta)$ correspondra par conséquent un nombre fini de valeurs de Z_1, un nombre fini de valeurs de Z_2, ..., un nombre fini de valeurs de Z_k.

A chaque valeur de $F(\zeta)$ (ou, ce qui revient au même, à chaque point du polygone R_0), correspondra donc un nombre fini de systèmes de valeurs des Z_i. Soit Λ ce nombre fini. Soient alors R_1, R_2, ... les différents polygones fuchsiens congruents à R_0. Soit M_0 un point de R_0; soient M_1, M_2, ... les points correspondants de R_1, R_2, ...

A chacun des points M_i correspondra un système de valeurs des Z_i. Soient alors

$$M_0, \quad M_1, \quad \ldots, \quad M_{\Lambda-1} \tag{5}$$

Λ points M_i correspondant à Λ systèmes différents de valeurs de Z. Alors si l'on considère un autre point M_i, ce point correspondra au même système de valeurs que l'un des points (5), puisque le nombre total des systèmes de valeurs est égal à Λ.

Nous dirons que deux points M_i sont équivalents s'ils correspondent à un même système de valeurs des Z, et que deux polygones R_i sont équivalents si les points M_i correspondants sont équivalents.

Les substitutions du groupe Γ sont alors précisément celles qui changent les polygones R_i en des polygones équivalents.

On voit que Γ est un sous-groupe de G d'indice Λ.

Le polygone V_0, qui engendrera Γ, se composera de l'agrégation de Λ polygones R_i et sa surface (non euclidienne) sera Λ fois celle de R_0.

Deux hypothèses sont possibles :

Ou bien le polygone V_0 est de genre zéro, alors il existe une fonction fuchsienne ξ, telle que tous les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient des fonctions rationnelles de ξ.

Ou bien le polygone V_0 sera de genre plus grand que zéro, et il y aura deux fonctions ξ et η, liées par une relation algébrique et telles que les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient fonctions rationnelles de ξ et de η.

Paris, le 7 mai 1897.

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A INTÉGRALES ALGÉBRIQUES (¹).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 698-701 (21 mars 1881).

Pour rechercher quelles sont les équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales sont algébriques, il faut d'abord déterminer les groupes de substitutions linéaires qui ne se composent que d'un nombre fini de substitutions. Dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, M. Jordan donne une méthode générale pour résoudre ce problème, et il applique sa méthode aux équations des quatre premiers ordres. Connaissant ces groupes de substitutions linéaires en nombre fini, il faut ensuite former les équations différentielles correspondantes. M. Jordan insiste peu sur ce point. Je désirerais attirer l'attention sur quelques propriétés de ces équations.

Bornons-nous au troisième ordre, pour fixer les idées. Envisageons l'un des groupes découverts par M. Jordan; supposons que ce groupe G soit composé de n opérations, qui consistent à changer respectivement x, y, z en

$$\begin{gathered} a_i x + b_i y + c_i z, \\ a'_i x + b'_i y + c'_i z, \\ a''_i x + b''_i y + c''_i z \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Posons

$$\mathrm{H}(\xi, \eta) = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}{\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'}, \qquad \mathrm{H}_1(\xi, \eta) = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha'_1\xi + \beta'_1\eta + \gamma'_1}.$$

Soient A_i, B_i, C_i, A'_i, B'_i, C'_i, A''_i, B''_i, C''_i des quantités proportionnelles à

(¹) Voir aux *Notes*.

$a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i, a''_i, b''_i, c''_i$ et telles que leur déterminant soit égal à 1;

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A'_i & B'_i & C'_i \\ A''_i & B''_i & C''_i \end{vmatrix} = 1.$$

Soient

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} H\left(\frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i} \right),$$

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} H_1\left(\frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i} \right).$$

Il est clair que x et y sont des fonctions rationnelles de ξ et de η qui ne changent pas quand on change ξ et η en

$$\xi_i = \frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \qquad \eta_i = \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i},$$

et que toute fonction rationnelle de ξ et de η qui ne change pas quand on change ξ et η en ξ_i et η_i sera une fonction rationnelle de x et de y.

Si D est le déterminant fonctionnel de x et de y par rapport à ξ et à η, les trois fonctions

$$z_1 = \xi\sqrt[3]{D}, \qquad z_2 = \eta\sqrt[3]{D}, \qquad z_3 = \sqrt[3]{D}$$

se changeront respectivement en

$$A_i z_1 + B_i z_2 + C_i z_3,$$
$$A'_i z_1 + B'_i z_2 + C'_i z_3,$$
$$A''_i z_1 + B''_i z_2 + C''_i z_3$$

quand ξ et η se changeront en ξ_i et η_i ([1]).

Posons, pour abréger,

$$D_{m_1 m} z_i = \frac{d^{m_1+m} z_i}{d\xi^{m_1} d\eta^{m}};$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_{m_1 p_1} z_1 & D_{m_1 p_1} z_2 & D_{m_1 p_1} z_3 \\ D_{m_2 p_2} z_1 & D_{m_2 p_2} z_2 & D_{m_2 p_2} z_3 \\ D_{m_3 p_3} z_1 & D_{m_3 p_3} z_2 & D_{m_3 p_3} z_3 \end{vmatrix}$$

ne changera pas quand on changera ξ et η en ξ_i et η_i, et sera par conséquent une fonction rationnelle de x et de y.

(1) Cela résulte de l'invariance de x et y par le changement de ξ, η en ξ_i, η_i et de l'expression du déterminant fonctionnel : $\frac{\partial(\xi_i, \eta_i)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{(A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i)^3}$. (J. D.)

Il en résulte que

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3$$

sont trois intégrales particulières d'une infinité d'équations aux différences partielles à coefficients rationnels. Ces équations s'écrivent

$$(1) \quad \begin{vmatrix} D_{m_1p_1} z & D_{m_1p_1} z_1 & D_{m_1p_1} z_2 & D_{m_1p_1} z_3 \\ D_{m_2p_2} z & D_{m_2p_2} z_1 & D_{m_2p_2} z_2 & D_{m_2p_2} z_3 \\ D_{m_3p_3} z & D_{m_3p_3} z_1 & D_{m_3p_3} z_2 & D_{m_3p_3} z_3 \\ D_{m_4p_4} z & D_{m_4p_4} z_1 & D_{m_4p_4} z_2 & D_{m_4p_4} z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3, m_4, p_4 sont des entiers positifs quelconques; il est clair que les coefficients des différentes dérivées partielles de z sont rationnels en x et en y. Si l'on fait, en particulier, dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, & p_1 &= 0, \\ m_2 &= 1, & p_2 &= 0, \\ m_3 &= 2, & p_3 &= 0, \\ m_4 &= 3, & p_4 &= 0, \end{aligned}$$

elle prendra la forme

$$B_3 \frac{d^3 z}{dx^3} + B_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + B_1 \frac{dz}{dx} + B_0 z = 0.$$

Les B seront des polynomes entiers en x et y. Si l'on donne à y une valeur constante quelconque, on obtiendra une équation linéaire du troisième ordre, dont tous les coefficients seront rationnels et dont les intégrales seront les fonctions algébriques z_1, z_2, z_3.

Conséquence. — A chacun des groupes définis par M. Jordan, correspondent une infinité d'équations linéaires du troisième ordre. Dans chacune de ces équations, les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x et à un paramètre arbitraire y. Si l'on considère les trois intégrales z_1, z_2 et z_3 de cette équation comme fonctions de x et de y, ce seront des fonctions algébriques de ces variables, et elles satisferont non seulement à l'équation proposée, mais à une infinité d'équations aux dérivées partielles à coefficients rationnels, à savoir les équations (1).

Je ne me suis restreint au troisième ordre que pour fixer les idées; les résultats sont vrais pour tous les ordres.

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

LE MOYEN DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 913-915 (11 avril 1881).

Soient $F(\xi, \eta)$, $F_1(\xi, \eta)$ deux fonctions abéliennes quelconques. Posons

$$x = F, \qquad y = F_1, \qquad z_1 = \sqrt[3]{\frac{dF}{d\xi}\frac{dF_1}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\xi}\frac{dF}{d\eta}}, \qquad z_2 = \xi z_1, \qquad z_3 = \eta z_1;$$

l'équation linéaire

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 & z_3 \\ \frac{dz}{dx} & \frac{dz_1}{dx} & \frac{dz_2}{dx} & \frac{dz_3}{dx} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} & \frac{d^2 z_1}{dx^2} & \frac{d^2 z_2}{dx^2} & \frac{d^2 z_3}{dx^2} \\ \frac{d^3 z}{dx^3} & \frac{d^3 z_1}{dx^3} & \frac{d^3 z_2}{dx^3} & \frac{d^3 z_3}{dx^3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a pour intégrales

$$z = z_1, \qquad z = z_2, \qquad z = z_3,$$

a pour coefficients des fonctions abéliennes de ξ et de η, et par conséquent des fonctions *algébriques* de x et de y.

Posons maintenant

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{dF}{dX}\frac{dF_1}{dY} - \frac{dF_1}{dX}\frac{dF}{dY}},$$

$$t_2 = X t_1, \qquad t_3 = Y t_1, \qquad \xi = a \log X, \qquad \eta = b \log Y,$$

d'où

$$t_1 = z_1 \sqrt[3]{ab}\, e^{-\frac{\xi}{3a} - \frac{\eta}{3b}}, \qquad t_2 = z_1 \sqrt[3]{ab}\, e^{\frac{2\xi}{3a} - \frac{\eta}{3b}}, \qquad t_3 = z_1 \sqrt[3]{ab}\, e^{-\frac{\xi}{3a} + \frac{2\eta}{3b}};$$

l'équation linéaire

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} z & t_1 & t_2 & t_3 \\ \frac{dz}{dx} & \frac{dt_1}{dx} & \frac{dt_2}{dx} & \frac{dt_3}{dx} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} & \frac{d^2 t_1}{dx^2} & \frac{d^2 t_2}{dx^2} & \frac{d^2 t_3}{dx^2} \\ \frac{d^3 z}{dx^3} & \frac{d^3 t_1}{dx^3} & \frac{d^3 t_2}{dx^3} & \frac{d^3 t_3}{dx^3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a pour intégrales

$$z = t_1, \quad z = t_2, \quad z = t_3$$

a ses coefficients *algébriques* en x et en y.

Les fonctions abéliennes F et F_1 permettent donc d'intégrer une infinité d'équations différentielles linéaires du troisième ordre à coefficients algébriques, car l'équation (1) contient un paramètre arbitraire y et l'équation (2) en contient trois, a, b et y.

On pourrait se proposer de former toutes les équations à coefficients *rationnels* qui peuvent s'intégrer par ce procédé, mais ce problème nous entraînerait bien loin: je me bornerai donc à former les *groupes* de ces équations. Voici ce que j'entends par là.

Le groupe de l'équation proposée sera le groupe des substitutions linéaires que subissent les intégrales quand x décrit un contour quelconque, et celles de ces transformations qui correspondent à un contour infiniment petit décrit autour d'un point singulier formeront la *base* du groupe. On arrive ainsi aux résultats suivants :

Premier cas, équation (1). — Soient u_1, u_2, u_3 les trois intégrales, et, supposons qu'on ait convenablement choisi u_3; les opérations qui formeront la base du groupe G cherché seront de la forme

$$(u_1, u_2, u_3;\ \alpha_i u_1 + \beta_i u_2,\ \gamma_i u_1 + \delta_i u_2,\ u_3 + \eta_i).$$

S'il y a n points singuliers, on donnera à i successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Le groupe g, dérivé des opérations

$$u_1, u_2;\ \alpha_i u_1 + \beta_i u_2,\ \gamma_i u_1 + \delta_i u_2,$$

sera d'ordre fini. Si, en combinant d'une certaine manière les opérations du groupe g, on obtient l'opération dite *unité*,

$$(u_1, u_2;\ u_1, u_2),$$

en combinant *de la même manière* les opérations de G on obtiendra la substitution

$$(u_1, u_2, u_3, u_1 - \Gamma_k u_3, u_2 - \Gamma'_k u_3, \Gamma''_k u_3).$$

Le système des quantités

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma'_k}, \quad \frac{\Gamma'_k}{\Gamma''_k}$$

devra satisfaire à des conditions telles qu'elles représentent un système de périodes d'une certaine fonction abélienne. Telles sont les conditions auxquelles sont assujettis les groupes des équations (1), quand les coefficients de ces équations sont rationnels.

Second cas, équation (2). — Les opérations qui servent de base au groupe G cherché sont de la forme

$$(u_1, u_2, u_3, \alpha_i u_2, \beta_i u_3, \gamma_i u_1).$$

et les α_i, β_i et γ_i sont des quantités telles, que l'on puisse trouver deux nombres a et b de telle sorte que le système des nombres

$$\begin{array}{cc} a \log \dfrac{\alpha_i \beta_j \gamma_k}{\gamma_i \alpha_j \beta_k}, & b \log \dfrac{\beta_i \alpha_j \gamma_k}{\gamma_i \beta_j \alpha_k}, \\ 2 i \pi, & 0, \\ 0, & 2 i \pi \end{array}$$

puisse représenter un système de périodes d'une certaine fonction abélienne.

Il va sans dire que, si, au lieu d'envisager des fonctions abéliennes de deux variables, on avait considéré des fonctions de p variables, on aurait intégré une infinité d'équations du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre à coefficients algébriques.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 984-985 (5 novembre 1883).

M. Jordan, dans le *Journal de Crelle* (Bd 84) et dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a montré comment on peut former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il resterait à faire voir qu'à l'aide de tout groupe fini on peut former une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales algébriques. J'ai cherché à démontrer ce théorème dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie au mois d'avril 1881; mais cette Note contient une faute de calcul qui en rend les résultats erronés; je prie donc l'Académie de vouloir bien la tenir pour non avenue jusqu'à ce que j'aie rectifié l'erreur qui y est contenue ([1]). Depuis, j'ai réussi à prouver qu'à tout groupe fini Γ on peut faire correspondre d'une infinité de manières un groupe fuchsien G auquel Γ est mériédriquement isomorphe, qu'à ces deux groupes correspond toujours une équation linéaire à intégrales algébriques et que, si l'on pose $x = f(z)$, $f(z)$ étant une fonction fuchsienne engendrée par le groupe G, les intégrales de cette équation sont des fonctions fuchsiennes engendrées par un sous-groupe g de G. Ainsi *à un groupe d'ordre fini correspond, non pas une, mais une infinité d'équations à intégrales algébriques dont on peut même choisir arbitrairement les points singuliers.*

Les fonctions fuchsiennes engendrées par g sont des fonctions rationnelles de x et de y, x et y étant liés par la relation algébrique

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

([1]) Voir aux *Notes*.

dont le degré en y est m et dont le genre est p. Si γ est le groupe de cette équation algébrique, il est *une seule fois transitif*. Quant au genre p, il satisfait à la relation

$$(2) \qquad 2p - 2 = m\left(n - 1 - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \ldots - \frac{1}{\alpha_n}\right),$$

n et les α étant des entiers plus grands que 1 ; ce qui montre que tous les sous-groupes g de genre p rentrent dans un nombre fini de types.

Il y a aussi un théorème concernant les intégrales abéliennes de première espèce, engendrées par l'équation (1), et qui tient à ce que le groupe de cette équation est une seule fois transitif.

On peut choisir un système fondamental de p intégrales de première espèce, de telle façon que leurs périodes normales soient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes normales de l'une d'entre elles.

Cela posé, voici la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction F (x, y), rationnelle en x et en y et satisfaisant à une équation linéaire d'ordre k. Il faut qu'on puisse trouver m quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

telles que, si l'on permute ces m lettres d'après les m substitutions du groupe γ et qu'on forme avec ces m permutations un déterminant Δ, tous les mineurs d'ordre $(m - k - 1)$ soient nuls à la fois.

J'ai fait voir que, si cela a lieu, ces quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont certaines périodes de certaines intégrales de première espèce convenablement choisies. Ainsi la condition pour qu'il y ait une fonction F (x, y) qui satisfasse à une équation d'ordre k, c'est qu'il y ait certaines relations entre les périodes de ces intégrales de première espèce. Cette condition est toujours remplie pour $k \geqq p$, car il suffit d'appliquer une remarque de M. Klein pour voir que la dérivée d'une intégrale de première espèce formée à l'aide de la relation (1) satisfait toujours à une équation linéaire d'ordre p à coefficients rationnels. Dans une prochaine Communication, j'indiquerai, si l'Académie veut bien le permettre, quels rapports ont ces relations entre les périodes avec la réduction des intégrales abéliennes qui a fait l'objet des remarquables travaux de M. Picard.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 1189-1191 (26 novembre 1883).

Lorsqu'il y a, entre la variable et l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, une relation algébrique, et que l'on forme à l'aide de cette relation des intégrales abéliennes de première espèce, les périodes de ces intégrales satisfont à certaines équations algébriques. On peut se demander si ces équations suffisent pour déterminer complètement ces périodes.

Sans aborder ce problème, très général et sans doute très compliqué, j'ai voulu étudier en particulier un exemple simple, et j'ai choisi la résolvante de Galois de l'équation modulaire que l'on rencontre dans la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques (degré 168, genre 3). M. Klein a étudié à fond cette résolvante et il a fait voir que, si l'on forme les intégrales de première espèce correspondantes, leurs dérivées satisfont à une équation linéaire du troisième ordre.

J'ai choisi sept périodes, que j'appelle ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6, ε_7 et entre lesquelles on a la relation suivante :

$$(1) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 = 0.$$

Si l'on considère deux intégrales de première espèce et qu'on accentue les périodes de la seconde intégrale, on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\varepsilon_2\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon'_1 - \varepsilon'_3\varepsilon_1 + \varepsilon_4\varepsilon'_1 - \varepsilon'_4\varepsilon_1 + \varepsilon_5\varepsilon'_1 - \varepsilon_6\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon'_2 \\ &\quad - \varepsilon'_3\varepsilon_2 + \varepsilon_6\varepsilon'_2 - \varepsilon'_6\varepsilon_2 + \varepsilon_5\varepsilon'_4 - \varepsilon'_5\varepsilon_4 + \varepsilon_6\varepsilon'_4 - \varepsilon_6\varepsilon_4 + \varepsilon_6\varepsilon'_5 - \varepsilon'_6\varepsilon_5 = 0. \end{aligned}$$

Nous pourrons choisir une intégrale de première espèce, de telle sorte que

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0,$$

et alors nous poserons

$$\varepsilon_4 = x, \qquad \varepsilon_5 = y, \qquad \varepsilon_6 = z.$$

On peut former par divers procédés un grand nombre de relations entre ces périodes; mais trois seulement sont distinctes, à savoir

$$x(x - y - z) = y,$$
$$x^2 - 2xy - y^2 - yz = z,$$
$$y^2 - yz + z^2 + x + 2y - z - 1 = 0.$$

Ces trois équations admettent les huit solutions suivantes

$$x = 1, \qquad y = T = \tau + \tau^2 + \tau^4, \qquad z = -1,$$
$$x = 1, \qquad y = T' = \tau^3 + \tau^5 + \tau^6, \qquad z = -1,$$
$$x = \tau^{2m}, \qquad y = \tau^{3m} + \tau^{6m} + 1, \qquad z = \tau^{5m} + \tau^{m} + 1,$$

où

$$\tau = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}, \qquad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Les huit solutions conviennent et correspondent à huit systèmes de périodes différentes, satisfaisant aux conditions (1) et (2).

Il existe aussi une intégrale de première espèce dont les périodes sont simplement

$$\varepsilon_1 = \tau, \quad \varepsilon_2 = \tau^2, \quad \varepsilon_3 = \tau^3, \quad \varepsilon_4 = \tau^4, \quad \varepsilon_5 = \tau^5, \quad \varepsilon_6 = \tau^6, \quad \varepsilon_7 = 1.$$

Considérons en particulier l'intégrale u_1, dont les sept périodes sont

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1.$$

Elle n'a que deux périodes distinctes, 1 et T; les procédés de M. Picard permettent donc de la ramener aux intégrales elliptiques. Mais on démontre que l'on peut trouver six intégrales

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad u_5, \quad u_6, \quad u_7$$

dont les sept périodes sont les mêmes que celles de u_1, sauf que ces dernières ont subi une permutation circulaire; ainsi les périodes de u_2 seront

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1, \quad 1;$$

celles de u_3 seront

$$0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots.$$

Cela posé, l'intégrale

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_7 u_7,$$

où les A sont des nombres entiers quelconques, n'aura que deux périodes distinctes et sera réductible aux intégrales elliptiques.

Nous avons donc un troisième exemple de cette circonstance déjà signalée deux fois par M. Picard, qu'il existe des systèmes d'intégrales abéliennes où l'on trouve une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques (*Comptes rendus*, t. 93, p. 1126; 1881).

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

ET

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Journal de Mathématiques, 5e série, t. 9, p. 139-212 (1903).

I. — Introduction.

Le présent Mémoire est le développement d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1883 (*Comptes rendus*, t. 97, 1883, 2e semestre, p. 984 et 1189).

Quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de certaines propriétés curieuses et il y a entre leurs périodes quelques relations intéressantes.

On est conduit en passant, à ce résultat, qu'*étant donné un groupe fini* H *quelconque, on peut toujours trouver* (sauf un nombre fini d'exceptions) *un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à* H, *et dont les coefficients soient entiers*.

M. Frobenius, en 1896 et dans les années suivantes, a publié une série de Mémoires sur les *caractères* des groupes. Ses résultats peuvent être utilement appliqués à la question qui nous occupe et je crois devoir les rappeler rapidement; je profite d'ailleurs de l'occasion pour les rapprocher d'autres résultats obtenus par M. Cartan et pour faire voir combien les théories de ces deux savants mathématiciens s'éclairent mutuellement.

II. — Intégrabilité algébrique des équations linéaires.

Soit

$$(1) \qquad \sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0$$

une équation linéaire d'ordre n dont les coefficients P_q sont des polynomes entiers. Supposons que l'intégrale générale de cette équation soit algébrique et soit

$$(2) \qquad \theta(x, y) = 0$$

l'équation algébrique qui définit cette intégrale générale. Bien entendu, ce polynome θ, outre les variables x et y, contiendra n constantes arbitraires d'intégration si l'équation (1) est d'ordre n.

L'équation (1) pourrait être intégrée par le procédé général. Posons

$$x = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction fuchsienne correspondant au groupe fuchsien G.

Si cette fonction fuchsienne est convenablement choisie (et cela peut se faire d'une infinité de manières), y sera une fonction zétafuchsienne de z.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales de (1) au nombre de n et linéairement indépendantes. On aura

$$y_1 = \zeta_1(z), \qquad y_2 = \zeta_2(z), \qquad \ldots, \qquad y_n = \zeta_n(z),$$

les ζ étant des fonctions zétafuchsiennes. Quand z subira une substitution du groupe G, les ζ_i subiront une substitution linéaire appartenant au groupe H de l'équation linéaire (1). Le groupe H sera donc isomorphe à G.

Mais ici l'intégrale générale étant supposée algébrique, le groupe H sera d'*ordre fini*, de sorte que l'isomorphisme sera *mériédrique*. Parmi toutes les substitutions de G, il y en aura donc qui correspondront dans H à la substitution identique. L'ensemble de ces substitutions formera un groupe G′ qui sera un groupe fuchsien et qui sera un sous-groupe invariant du groupe G. Le groupe G n'est donc pas simple.

Ce groupe fuchsien G′ engendrera un système S′ de fonctions fuchsiennes; il est aisé de voir que le système S′ contiendra le système S des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G; que x et y ou toute fonction rationnelle de x et de y est une fonction fuchsienne du système S′. Il en est de même de toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

J'ai dit que le polynome θ contenait, outre les variables x et y, des constantes arbitraires d'intégration. Selon les valeurs que l'on attribuera à ces n constantes, trois cas pourront se présenter :

1° Ou bien les diverses déterminations de la fonction algébrique y pourront s'exprimer linéairement à l'aide de m d'entre elles, le nombre m étant $< n$; par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) n'est pas une combinaison linéaire des diverses déterminations de la fonction algébrique y ;

2° Ou bien l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y; mais le groupe de l'équation algébrique $\theta(x, y) = 0$ est plusieurs fois transitif;

3° Ou bien enfin l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y et le groupe de l'équation algébrique $\theta = 0$ est simplement transitif.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de n intégrales de (1) linéairement indépendantes.

Posons

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n.$$

Faisons décrire à x un contour fermé quelconque; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiront une transformation linéaire T, à savoir celle des transformations du groupe H qui correspond à ce contour; les y se changeront donc en $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et u se changera en

$$u' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \ldots + \alpha_n y'_n.$$

Peut-il arriver que u' soit identique à u? Les y' sont des fonctions linéaires des y; on aura donc

$$u' = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$

les β étant des fonctions linéaires des α. Pour que $u = u'$, il faudrait que l'on eût

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Cela peut arriver pour certaines valeurs des α, mais ces relations ne peuvent être satisfaites identiquement, quels que soient les α, à moins que l'on ait

$$y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_2, \quad \ldots, \quad y'_n = y_n,$$

c'est-à-dire que la transformation linéaire T ne se réduise à la substitution identique.

Ainsi u' sera différent de u, à moins que les α ne satisfassent à un système X de relations algébriques.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_p$ les transformations non identiques du groupe H; elles sont en nombre fini; à chacune d'elles correspond un système de relations algébriques entre les α. Si les α ne satisfont à aucun de ces systèmes, la fonction u n'est transformée en elle-même par aucune des transformations T, c'est-à-dire que si x décrit un contour fermé et que u revienne à sa valeur initiale, la transformation T sera identique et toutes les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviendront à leurs valeurs initiales.

Or u est une fonction algébrique de x, susceptible de plusieurs déterminations.

Si, x décrivant un contour fermé, l'une de ces déterminations revient à sa valeur initiale, il en sera de même de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et, par conséquent, de toutes les autres déterminations de u. Donc le groupe de la fonction algébrique u est simplement transitif.

Nous pouvons donc supposer que les constantes d'intégration aient été choisies de telle sorte que le groupe de l'équation algébrique

$$\theta(x, y) = 0$$

soit simplement transitif.

Mais pouvons-nous toujours choisir les α de telle façon que l'intégrale générale de (1) soit une combinaison linéaire des diverses déterminations de u?

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, le nombre des déterminations linéairement indépendantes de $u = \Sigma\alpha_i y_i$ sera $m < n$.

Donc u satisfera à une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels. D'ailleurs, comme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviennent à leur valeur initiale quand u revient à sa valeur initiale (pourvu que les α aient été choisis comme je viens de le dire), les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront des fonctions rationnelles de x et de u. Donc l'intégrale générale de (1) sera une fonction rationnelle de x et de l'intégrale générale d'une équation d'ordre moindre.

Je dirai alors que l'équation (1) est *imprimitive*.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'équation (1) est *primitive* et que les constantes aient été choisies de telle sorte que la fonction algébrique y admette n déterminations linéairement indépendantes et que son groupe soit simplement transitif.

La question de l'intégrabilité algébrique des équations linéaires est liée à

celle des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein a résolu complètement la question en ce qui concerne le deuxième ordre. M. Jordan, dans le Tome 84 du *Journal de Crelle*, puis dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a donné une méthode générale pour la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire et appliqué sa méthode au troisième ordre.

Une question se pose toutefois. Étant donné un groupe fini contenu dans le groupe linéaire à n variables, existe-t-il toujours une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre intégrable algébriquement et correspondant à ce groupe? A cette question, comme on devait s'y attendre, l'on doit répondre affirmativement.

1. Disons quelques mots d'abord de la constitution des groupes discontinus. Je suppose un groupe discontinu dérivé d'un nombre fini p de substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

On obtiendra toutes les substitutions de ce groupe en combinant ces p substitutions.

A chacune de ces combinaisons

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots,$$

où $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_h, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs, correspondra une substitution du groupe, mais toutes ces combinaisons ne sont pas toujours distinctes. Il peut y avoir deux de ces combinaisons qui seront identiques, auquel cas il y aura une de ces combinaisons qui se réduira à la substitution identique.

On aura donc un certain nombre de relations de la forme

$$(1) \qquad S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots = 1.$$

Ce sont *les relations de structure* du groupe.

Toutes ces relations ne sont pas distinctes; elles peuvent toutes se déduire d'un certain nombre d'entre elles que l'on appelle *relations fondamentales*. Je renverrai pour plus de détails au paragraphe 3 de mon Mémoire *Sur les groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I) [1].

Quelles sont pour un groupe fuchsien les relations de structure et en particulier les relations fondamentales? Je me bornerai à rappeler le résultat que j'ai obtenu à la page 16 du Mémoire cité. Décomposons le demi-plan en poly-

[1] *Œuvres de* H. POINCARÉ, t. II, p. 109

gones générateurs R_0, R_1, ..., R_q, ... ; à chacun des côtés de R_0 correspondra une substitution du groupe fuchsien, de telle sorte que les substitutions qui correspondent à deux côtés conjugués soient inverses l'une de l'autre. A chaque côté de R_q nous ferons correspondre la même substitution qu'au côté correspondant de R_0.

Décrivons un contour *fermé* qui traverse nécessairement les régions R_1, R_2, ..., R_h et en sort par les côtés C_1, C_2, ..., C_h auxquels correspondent les substitutions S_1, S_2, ..., S_h; nous aurons alors

$$S_1 S_2 \dots S_h = 1,$$

et nous obtiendrons ainsi toutes les relations de structure du groupe.

Pour obtenir toutes les relations fondamentales, il suffira de décrire des contours fermés infinitésimaux autour des divers sommets de R_0.

Les divers sommets d'un même cycle donneront d'ailleurs la même relation, de sorte qu'il y aura autant de relations fondamentales que de cycles.

Appliquons cette règle à un groupe fuchsien du genre o. Soient

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1} \beta_p \beta_{p-1} \dots \beta_2 \beta_1 \alpha_0$$

les $2p+2$ sommets du polygone R_0. Le côté $\alpha_i \alpha_{i+1} = C_i$ sera conjugué du côté $\beta_i \beta_{i+1} = C'_i$ et la substitution S_i transformera C_i en C'_i. Les sommets formeront $p+2$ cycles, à savoir

$$\alpha_0, \quad \alpha_1 \beta_1, \quad \alpha_2 \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_p \beta_p, \quad \alpha_{p+1},$$

et je supposerai que les sommes des angles des sommets de ces cycles soient respectivement

$$\frac{2\pi}{n_0}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_2}, \quad \dots, \quad \frac{2\pi}{n_p}, \quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Alors les relations fondamentales correspondant à ces différents cycles seront

$$(4) \qquad S_0^{n_0} = (S_1 S_0^{-1})^{n_1} = (S_2 S_1^{-1})^{n_2} = \dots = (S_p S_{p-1}^{-1})^{n_p} = S_p^{n_{p+1}} = 1.$$

Cela posé, quels rapports y a-t-il entre les relations de structure de deux groupes isomorphes? Il est clair que si l'isomorphisme est holoédrique les relations seront les mêmes; mais si l'isomorphisme est mériédrique l'un des deux groupes aura toutes les relations de structure de l'autre et en admettra, en outre, encore d'autres. Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les deux groupes soient mériédriquement isomorphes.

Cela posé, soit H un groupe d'ordre fini contenu dans le groupe linéaire;

supposons que ce groupe soit dérivé de $p+1$ substitutions

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

Ce groupe étant d'ordre fini, une quelconque de ses substitutions sera d'ordre fini.

Ce sera le cas, en particulier, pour les substitutions

$$S_0, \quad S_1 S_0^{-1}, \quad S_2 S_1^{-1}, \quad \ldots, \quad S_p S_{p-1}^{-1}, \quad S_p^{-1}.$$

Il existera donc des entiers n_0, n_1, ..., n_{p+1}, tels que

$$(4\ bis) \qquad S_0^{n_0} = (S_1 S_0^{-1})^{n_1} = (S_2 S_1^{-1})^{n_2} = \ldots = (S_p S_{p-1}^{-1})^{n_p} = (S_p^{-1})^{n_{p+1}} = 1.$$

Ces relations ne seront d'ailleurs pas les seules relations de structure du groupe H.

Cela posé, nous pouvons construire un polygone fuchsien R_0 de genre 0, de telle façon que les sommes des angles des sommets des différents cycles soient respectivement

$$(5) \qquad \frac{2\pi}{n_0}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Soit G le groupe fuchsien correspondant. Ses substitutions fondamentales S_0, S_1, ..., S_p satisferont aux relations (4) qui seront ses seules relations fondamentales.

Donc le groupe H admettra les mêmes relations de structure que G et encore d'autres; donc H est mériédriquement isomorphe à G. Il existera donc dans G un sous-groupe fuchsien G′ formé des substitutions de G auxquelles correspond dans H la substitution identique.

D'un autre côté, reportons-nous au paragraphe 5 du Mémoire : *Sur les fonctions zétafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V) [1], nous verrons que, le groupe G étant de la première famille et le groupe H contenu dans le groupe linéaire à n variables étant isomorphe à G, nous pouvons construire n fonctions zétafuchsiennes

$$\zeta_1(z), \quad \zeta_2(z), \quad \ldots, \quad \zeta_n(z)$$

qui subissent une substitution linéaire du groupe H quand la variable z subit la substitution correspondante du groupe fuchsien G. Ces fonctions ζ sont en même temps des fonctions fuchsiennes admettant le groupe fuchsien G′. Si donc on pose

$$y = \zeta_1(z),$$

[1] *Œuvres de* H. POINCARÉ, t. II, p. 412.

y va satisfaire à une relation algébrique

$$\theta(x, y) = 0 \tag{2}$$

et à une équation différentielle d'ordre n à coefficients rationnels.

Ainsi, à la question posée plus haut, on doit faire une réponse affirmative; on peut même remarquer qu'elle comporte une infinité de solutions dépendant d'un grand nombre d'arbitraires :

1° On peut choisir de plusieurs manières dans le groupe H les substitutions auxquelles on fera jouer le rôle de

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \dots, \quad S_p;$$

2° Il y a une infinité de polygones R_0 de genre 0 et de $2p+2$ sommets tels que les sommes des angles des différents cycles admettent les valeurs (5). Il reste encore $p-1$ arbitraires, et c'est ce que je puis traduire en disant que je peux choisir arbitrairement les $p+2$ points singuliers de la fonction algébrique définie par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, ceux de l'équation linéaire (1).

Soit m le nombre des déterminations de y, ce sera en même temps le degré en y de l'équation $\theta = 0$ et l'ordre du groupe H. Je désigne par q le *genre* de la relation (2).

Proposons-nous de calculer q. La surface du polygone R_0 sera

$$2\pi\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \dots - \frac{1}{n_{p+1}}\right).$$

Soit R'_0 le polygone générateur du groupe G'; sa surface sera évidemment

$$2\pi m\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \dots - \frac{1}{n_{p+1}}\right) = 2\pi m\left(p - \sum \frac{1}{n_i}\right).$$

On aura, d'autre part,

$$q = \frac{\nu + 1 - \mu}{2},$$

2ν étant le nombre des côtés de R'_0 et μ le nombre de ses cycles.

D'un autre côté, la surface de R'_0 sera

$$2\pi\left(\nu - 1 - \sum \frac{1}{\alpha_i}\right),$$

en supposant que la somme des angles des μ cycles soit

$$\frac{2\pi}{\alpha_1}, \quad \frac{2\pi}{\alpha_2}, \quad \dots, \quad \frac{2\pi}{\alpha_\mu}.$$

Or $\nu = \mu - 1 + 2q$, nous pouvons donc écrire pour cette surface

$$2\pi\left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

L'autre expression peut de même s'écrire

$$2\pi m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right].$$

Donc

$$(6)\qquad m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = \left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

Considérons un des cycles de R_0 dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{n_i}$.

Soit A l'un de ses sommets; envisageons les différents transformés de A par les substitutions de G.

Considérons ceux de ces transformés qui sont intérieurs à R'_0 ou qui sont des sommets de R'_0; ces derniers se répartissent en cycles. Soit B un de ceux qui sont intérieurs à R'_0. Observons que R'_0 peut être décomposé en m polygones congruents à R_0 et que j'appellerai

$$(7)\qquad R_0,\quad R_1,\quad \ldots,\quad R_{m-1},$$

chacun d'eux étant transformé de R_0 par une des substitutions de G.

Si nous envisageons ceux de ces polygones qui ont un sommet en B, nous voyons que ce sommet est homologue à A ou à un des sommets du cycle auquel appartient A et que, parmi ces polygones, il y en aura n_i pour lesquels ce sommet sera homologue à A. Il y aura donc n_i substitutions de G qui changeront A en B.

Soit maintenant C un transformé de A qui soit un sommet de R'_0 et soit $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ la somme des angles du cycle auquel appartient C. Parmi les m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7), il y en aura alors $\frac{n_i}{\alpha_k} = \beta_k$ qui changent A en C, ou en un des sommets du même cycle.

D'où il suit d'abord que n_i est divisible par α_k.

Convenons alors de prendre pour le point B

$$\alpha_k = 1,\qquad \beta_k = n_i;$$

nous aurons

$$(8)\qquad \sum \beta_k = m,$$

la sommation étant étendue à tous les points tels que B et C. Et, en effet,

chacune des m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7) change A en l'un des points B ou C.

Remarquons que chaque cycle de R'_0 ne devra être représenté qu'une fois dans la somme $\sum \beta_k$, même si plusieurs points C appartiennent à ce cycle.

Toutes les considérations qui précèdent et, en particulier, les relations (6) et (8) s'appliqueraient à un sous-groupe *quelconque* de G. Mais il y a ici quelque chose de plus, car G' est un sous-groupe *invariant*.

Il en résulte qu'une substitution quelconque de G change R'_0 en un polygone équivalent. Reprenons alors notre point A et ses transformés B et C. Soient C et C' deux de ces transformés appartenant à deux cycles différents de R'_0.

Il y aura une substitution de G qui changera C en C'. Soit $\frac{2\pi}{\alpha}$ et $\frac{2\pi}{\alpha'}$ la somme des angles des deux cycles correspondants. Qu'est-ce que cela veut dire? Cela veut dire que, parmi les substitutions de G', il y en aura une qui, *au point de vue non euclidien*, pourra être regardée comme une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C; donc, le sous-groupe étant invariant, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C' devra appartenir à G'; de même, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha'}$ autour de C devra appartenir à G'. Cela n'est possible que si $\alpha = \alpha'$.

Supposons maintenant que l'un des transformés de A soit un point B. Alors, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de B appartiendra à G'; mais comme B est intérieur au polygone générateur de G', cela n'est possible que si cette rotation se réduit à la substitution identique, c'est-à-dire si $\alpha = 1$.

Deux cas seulement sont donc possibles :

1° Ou bien aucun des transformés de A n'est intérieur à R'_0; dans ce cas, tous les α_k sont égaux entre eux, de même que tous les β_k; si k_1 est le nombre des cycles correspondants, on aura

$$\beta_k = \frac{m}{k_1}, \qquad \alpha_k = \frac{n_1 k_1}{m},$$

et, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = k_1\left(1 - \frac{m}{n_1 k_1}\right) = \frac{m}{\beta_1} - \frac{m}{n_1}.$$

2° Ou bien quelques-uns des transformés de A sont intérieurs à R_0, tous les

α sont égaux à 1, de sorte qu'on a, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)=0.$$

Nous distinguerons donc parmi les cycles de R_0, c'est-à-dire parmi les termes du premier membre de (6), deux cas :

1° Dans le premier cas, où $\beta_k=\frac{m}{\lambda_i}$, $\alpha_k=\frac{n_i\lambda_i}{m}$, on aura, en étendant la sommation aux cycles correspondants de R'_0,

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=\frac{m}{\beta_k}-m;$$

2° Dans le second cas, où $\alpha_k=1$, $\beta_k=n_i$, on aura

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=\frac{m}{n_i}-m=\frac{m}{\beta_k}-m.$$

Or, la relation (6) peut s'écrire

$$-2m+\sum\left[\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\right]=2q-2;$$

nous aurons donc

(9) $$m\left[-2+\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]=2q-2,$$

les β étant des entiers.

Discutons cette relation à laquelle nous aurions peut-être pu parvenir plus rapidement par des considérations sur la division régulière des surfaces de Riemann.

Dans le cas de $q=0$, le second membre sera négatif et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)<2.$$

Dans le cas de $q=1$, le second membre sera nul et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)=2.$$

Dans le cas de $q>1$, le second membre sera positif, mais comme m est un entier plus grand que 1, nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\leq 2+\frac{2q-2}{m}\leq q+1.$$

En tout cas $\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)$ est limité; les β_k sont des entiers; nous pouvons

laisser de côté les termes pour lesquels $\beta_k = 1$ et qui sont nuls. Donc β_k est au moins égal à 1, de sorte que $1 - \frac{1}{\beta_k}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Soit ρ le nombre des termes de la somme $\sum\left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right)$, on aura

$$\rho > \sum\left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) \geq \frac{\rho}{2}.$$

Dans le cas de $q = 0$, on aura donc

$$\rho < 4,$$

c'est-à-dire $\rho = 1$, 2 ou 3.

D'autre part,

$$\rho > \sum\left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) = 2 - \frac{2}{m} > 1.$$

Donc $\rho = 2$ ou 3. Si $\rho = 2$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{2}{m},$$

équation qui n'admet d'autre solution que

$$\beta_1 = \beta_2 = m,$$

si l'on observe que l'équation (8) exige

$$\beta_1 = m.$$

Si $\rho = 3$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} > 1,$$

qui admet comme solutions

$$\beta_1 = \beta_2 = 2, \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 3, 4 \text{ ou } 5.$$

On retrouve ainsi les groupes connus de Klein et on n'en trouve pas d'autres.

Dans le cas de $q = 1$, on a

$$\rho > \sum\left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) = 2 \geq \frac{\rho}{2},$$

d'où $\rho = 3$ ou 4, ce qui donne les solutions connues

$$\beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 6; \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = \beta_3 = 4,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 4.$$

Dans le cas de $q > 1$, on aura

$$q - 1 > \frac{\rho}{2}$$

et $\rho > 2$; avec

$$\sum \frac{1}{\beta_k} = \rho - 2 - \frac{2q-2}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2}{m} + \sum \frac{1}{\beta_k} = \rho - 2$$

(d'où d'abord $\rho > 2$).

Or

$$\beta_k < m, \qquad \text{d'où} \qquad \sum \frac{1}{\beta_k} > \frac{\rho}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2+\rho}{m} < \rho - 2,$$

ce qui donne une limite inférieure de m.

Or, nous avons vu plus haut que β_k est un diviseur de m et égal à $\frac{m}{k_i}$, notre équation peut alors s'écrire

$$\sum k_i + 2q - 2 = m(\rho - 2).$$

Soient β_1 le plus grand des β_k et S la somme de tous les autres $\frac{1}{\beta_k}$, on pourra écrire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = \rho - 2 - S,$$

et, comme S est au plus égal à $\frac{\rho-1}{2}$,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} \geq \frac{\rho-3}{2},$$

et, *a fortiori*, puisque $\beta_1 < m$,

$$2q + \frac{1}{\beta_1} > \frac{\rho-3}{2}.$$

Si $\rho > 3$, cette relation limitera β_1 et, par conséquent, tous les autres β_k; j'ajoute qu'elle limite ρ, car elle donne

$$\rho - 3 < 2q - 1,$$

puisque $\beta_1 \geq 2$.

Si $\rho = 3$, on ne pourra avoir $\beta_2 = \beta_3 = 2$, auquel cas on aurait $S = 1$ et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = 0.$$

Le cas le plus défavorable est donc

$$\beta_2 = 2, \qquad \beta_3 = 3.$$

d'où

$$S = \frac{5}{6}.$$

On a donc

$$S < \frac{5}{6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{1}{6},$$

ce qui limite encore β_1 et, par conséquent, tous les autres β.

En résumé, POUR UN GENRE q DÉTERMINÉ, *nos groupes* H *se ramèneront à un nombre fini de types.*

III. — Propriétés des intégrales abéliennes.

Reprenons la relation algébrique

$$\theta(x, y) = 0, \tag{2}$$

dont le degré est m et le genre q.

Toute fonction rationnelle de x et de y sera une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G'; soit maintenant

$$J = \int R(x, y)\, dx$$

une des q intégrales abéliennes de *première espèce* de la courbe algébrique (2); ce sera une fonction uniforme de z; cette fonction sera toujours finie et elle se reproduira à une constante près quand z subira une des substitutions du groupe G'.

Si donc nous appelons cette fonction $K(z)$, nous aurons

$$K(zS) = K(z) + \omega,$$

où j'écris, pour abréger, zS au lieu de $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, la substitution

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

étant une des substitutions du groupe fuchsien G'. Quant à ω, c'est une constante qui n'est autre chose qu'une période de l'intégrale abélienne (J).

A chaque substitution de G' correspondra ainsi une période de (J); mais, bien entendu, pour certaines de ces substitutions, cette période sera nulle.

Si ω correspond à S et ω' à S', on voit que $\omega + \omega'$ correspondra à SS', de même qu'à S'S, et $m\omega + n\omega'$ à $S^{m_1}S'^{n_1}S^{m_2}S'^{n_2}\ldots$, pourvu que

$$\sum m_i = m, \qquad \sum n_i = n.$$

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G'. Que sera-ce que $K(z\sigma)$? Ce sera évidemment encore une intégrale abélienne de première espèce.

Si nous changeons z en zS, $z\sigma$ se changera en $zS\sigma$, et il viendra

$$K(zS\sigma) = K(z\sigma) + \omega',$$

ω' étant la période de $K(z\sigma)$ correspondant à S.

Soient alors $S_1, S_2, \ldots, S_h$ les substitutions fondamentales de G'; soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ les périodes correspondantes de $K(z)$, $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_h$, celles de $K(z\sigma)$; nous aurons

$$K(zS_i) = K(z) + \omega_i,$$
$$K(zS_i\sigma) = K(z\sigma) + \omega'_i.$$

Si, dans cette dernière équation, je change z en $z\sigma^{-1}$, il vient

$$K(z\sigma^{-1}S_i\sigma) = K(z) + \omega'_i.$$

Or, G' étant un sous-groupe invariant de G, la substitution $\sigma^{-1}S_i\sigma$ appartiendra aussi à G'; d'où il suit que ω'_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers des ω_i.

Ainsi *les périodes de l'intégrale abélienne de première espèce* $K(z\sigma)$ *seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de l'intégrale abélienne de première espèce* $K(z)$ *et réciproquement.*

Introduisons maintenant les intégrales abéliennes de *seconde espèce;* ces intégrales seront encore des fonctions uniformes de z, mais elles admettront des pôles. Soit $P(z, a)$ une de ces intégrales, exprimée en fonction de z; elle sera définie par les conditions suivantes :

1° Elle sera fonction méromorphe de z dans tout le cercle fondamental;

2° Elle admettra comme pôles simples les points

$$z = a \quad \text{et} \quad z = aS \quad (\text{S étant une des substitutions de G'}),$$

et elle n'en admettra pas d'autres;

3° Le résidu de la fonction

$$P(z, a)$$

sera égal à 1 pour le pôle $z = a$;

4° On aura, pour une substitution S quelconque de G,

$$P(zS, a) - P(z, a) = \varphi(a), \tag{3}$$

$\varphi(a)$ étant une constante ne dépendant que de a; de telle sorte qu'à chaque substitution de G′ corresponde une période de l'intégrale P.

Ces conditions ne suffiraient pas pour déterminer P, puisque, si elles sont remplies par P, elles le seront par P + K, K étant une intégrale de première espèce.

On peut achever de définir P (à une constante près) en s'imposant encore une condition :

5° p des périodes de P choisies une fois pour toutes, et que j'appellerai les *périodes de première sorte*, devront être nulles.

Étudions les propriétés de ces fonctions P.

Quels sont les résidus de P pour ses différents pôles? Soit

$$\frac{dx}{dz} = \psi(z),$$

et soit A le résidu de P pour le pôle $z = a\mathrm{S}$. Nous aurons

$$P(zS^{-1}, a) - P(z, a) = \varphi_1(a),$$

$\varphi_1(a)$ étant la période qui correspond à la substitution S^{-1}; et pour z très voisin de aS, le premier membre sera très voisin de $\frac{1}{zS^{-1} - a}$ et le second de $\frac{A}{z - aS}$, on aura donc sensiblement

$$\frac{1}{zS^{-1} - a} = \frac{A}{z - aS},$$

d'où

$$A = \frac{\psi(a)}{\psi(aS)}.$$

Les conditions énoncées plus haut suffisent pour déterminer P à une constante près, car, si deux fonctions y satisfaisaient, elles auraient mêmes pôles et mêmes résidus; leur différence $D(z)$ serait partout finie. On aurait d'ailleurs

$$D(zS) - D(z) = \text{const.}$$

Donc $D(z)$ serait une intégrale de première espèce et comme p des périodes devraient être nulles, cette intégrale se réduirait à une constante.

Cela posé, j'observe que, dans la relation (3), $\varphi(a)$ doit être une fonction uniforme de a, puisque, quand on se donne a, la fonction $P(z, a)$ est entiè-

rement déterminée à une constante près, et, par conséquent, la différence $P(zS, a) - P(z, a)$ entièrement déterminée. De plus, cette fonction est toujours finie, puisque, quel que soit a, il suffit de donner à z une valeur différente des divers points aS pour que $P(zS, a)$ et $P(z, a)$ soient finis.

Soit maintenant T une substitution quelconque de G′ et considérons

$$P(z, aT).$$

Cette fonction admet comme pôle le point aS avec le résidu

$$\frac{\psi(aT)}{\psi(aS)}.$$

On aura donc

$$P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} P(z, a) + \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$P(zS, aT) - P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)}[P(zS, a) - P(z, a)]$$

ou

$$\varphi(aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)}\varphi(a).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\int \varphi(z)\,dz = \Phi(z).$$

Remarquons que x prend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = aT$, de sorte que

$$dx = \psi(aT)\,d(aT) = \psi(a)\,da,$$

d'où

$$\varphi(aT)\,d(aT) = \varphi(a)\,da$$

ou, en intégrant,

$$\Phi(aT) = \Phi(a) + \text{const.}$$

Donc $\Phi(z)$ est une intégrale abélienne de première espèce.

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G′, et changeons σ en $z\sigma$ dans la relation (3),

$$(3) \qquad P(zS, a) = P(z, a) + \varphi(a),$$

il viendra

$$(3a) \qquad P(z\sigma S, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a).$$

Or, le sous-groupe G étant invariant, on aura

$$\sigma S = S'\sigma,$$

S′ appartenant aussi à G′, d'où

$$(3\,bis)\qquad P(zS'\sigma, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a),$$

ce qui veut dire d'abord que la période de l'intégrale $P(z\sigma, a)$ qui correspond à S′ est égale à $\varphi(a)$; c'est-à-dire que *les périodes de* $P(z\sigma, a)$ *sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de* $P(z, a)$.

Nous aurons d'autre part

$$(3\,ter)\qquad P(zS', a) = P(z, a) + \varphi'(a),$$

$\varphi'(a)$ étant la période correspondant à S′, étant par conséquent une combinaison linéaire des périodes fondamentales de P.

Comparons maintenant les résidus des deux fonctions

$$P(z, a\sigma^{-1}), \quad P(z\sigma, a)$$

pour le pôle $z = a\sigma^{-1}$; pour z voisin de $a\sigma^{-1}$, ces deux fonctions se réduiront *sensiblement* à

$$\frac{1}{z - a\sigma^{-1}}, \quad \frac{1}{z\sigma - a}.$$

Or, on a sensiblement

$$\frac{1}{z\sigma - a} = \frac{1}{z - a\sigma^{-1}} \frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})}.$$

On aura donc sensiblement

$$(4)\qquad P(z\sigma, a) = \frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} P(z, a\sigma^{-1}).$$

Je veux dire que la différence des deux membres reste finie; comme chacun des membres est une intégrale de seconde espèce, la différence devra donc être une intégrale de première espèce. Devons-nous dire que cette intégrale se réduit à une constante? Il faudrait pour cela que toutes les périodes que nous avons appelées de première sorte fussent nulles. Supposons donc que S soit une substitution qui corresponde à une période de la première sorte; la fonction $\varphi(a)$ qui figure dans $(3a)$ et $(3\,bis)$ sera nulle. Les périodes de la première sorte du second membre de (4) seront donc nulles. En sera-t-il de même pour le premier membre et, par conséquent, pour la différence des deux membres? Aura-t-on, en d'autres termes,

$$P(zS\sigma, a) = P(z\sigma, a)?$$

Le premier membre peut s'écrire $P(z\sigma S'', a)$, où S″ appartient à G′; la période $\varphi''(a)$ correspondant à S″ devrait être nulle; elle devrait être de la première sorte.

La condition pour que nous ayons le droit de dire que la différence des deux membres de (4) est une constante serait donc que σ transformât toutes les périodes de la première sorte en périodes de la première sorte. Comme il n'en sera pas ainsi en général, tout ce que nous avons le droit de dire, c'est que cette différence est une intégrale de première espèce que j'appellerai $K(z, a, \sigma)$.

L'équation (3 *bis*) devient alors

$$P(zS', a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(zS', a, \sigma) = P(z, a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(z, a, \sigma) + \varphi(a)$$

ou bien

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + \theta(S', a, \sigma) = \varphi(a, S),$$

en désignant par $\varphi(a, S)$ et $\Phi(a, S)$ les fonctions $\varphi(a)$ et $\Phi(a)$ qui correspondent à la substitution S et par $\theta(S, a, \sigma)$ la période de $K(z, a, \sigma)$ qui correspond à S.

Comme x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, elle reprend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = a\sigma^{-1}$; on peut donc écrire

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\,da\sigma^{-1} + \theta(S', a, \sigma)\,da = \varphi(a, S)\,da,$$

d'où

$$(5)\qquad \int \theta(S', a, \sigma)\,da = \Phi(a, S) - \Phi(a\sigma^{-1}, S') + \text{const.}$$

Le résultat s'énonce donc sous une forme plus simple quand on compare les intégrales de seconde espèce

$$P(z, a), \quad P(z\sigma, a).$$

Alors la période de la première de ces intégrales qui correspond à S serait égale à $\varphi(a)$, de même que la période de la seconde intégrale qui correspond à S'.

Donc *les périodes fondamentales de* $P(z\sigma, a)$ *seraient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes fondamentales de* $P(z, a)$. Seulement, $P(z\sigma, a)$ ne rentrerait pas dans le type des intégrales $P(z, a)$, parce que ses périodes de première espèce ne seraient pas nulles en général.

Pour aller plus loin, *cherchons la condition pour qu'il existe une fonction rationnelle* $F(x, y)$ *de* x *et de* y *qui satisfasse à une équation linéaire*

$$(1)\qquad \sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0$$

d'ordre n. Cette fonction rationnelle sera évidemment égale à une fonction fuchsienne $\Phi(z)$ admettant le groupe G'. Si alors σ est une substitution

quelconque de G n'appartenant pas à G', $\Phi(z\sigma)$ satisfera à la même équation, de sorte que les m fonctions fuchsiennes $\Phi(z\sigma)$ ne seront pas linéairement indépendantes et s'exprimeront linéairement à l'aide de n d'entre elles. Il y aura donc entre ces m fonctions $(m-n)$ relations linéaires. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Soit alors β un des pôles de $\psi(z)$; soient

$$\sigma_1 = 1, \; \sigma_2, \; \sigma_3, \; \ldots, \; \sigma_m$$

m substitutions de G, distinctes par rapport à G', c'est-à-dire telles qu'aucune des combinaisons $\sigma_i \sigma_k^{-1}$ n'appartienne à G'. Considérons les pôles

$$\beta\sigma_1, \quad \beta\sigma_2, \quad \ldots, \quad \beta\sigma_m,$$

et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

les résidus correspondants de $\Phi(z)$. Si l'un de ces points n'était pas un pôle de $\Phi(z)$, le résidu correspondant serait regardé comme nul.

Posons

$$b_i = a_i \psi(\beta\sigma_i),$$

de façon que

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m$$

soient les résidus correspondants de la fonction rationnelle $F(x, y)$. Alors ces mêmes points seront encore des pôles pour $\Phi(z\sigma)$ avec les résidus

$$\frac{b_1(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_1)}, \quad \frac{b_2(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{b_m(\sigma)}{\psi(b\sigma_m)},$$

les lettres $b_1(\sigma)$, $b_2(\sigma)$, ..., $b_m(\sigma)$ n'étant autre chose que les lettres b_1, b_2, ..., b_m placées dans un autre ordre. Il est aisé de voir ce que c'est que cet ordre. On aura

$$b_k(\sigma) = b_i$$

si l'on a

$$\sigma_i \sigma^{-1} = \sigma_k S,$$

S appartenant à G'.

En d'autres termes, les lettres $b_i(\sigma)$ ne sont autre chose que ce que deviennent les lettres b_i quand on les permute en leur faisant subir une des substitutions du groupe simplement transitif H de la relation algébrique (2) $\theta(x, y) = 0$.

Nous avons dit qu'il y a $(m-n)$ relations linéaires entre les fonctions $\Phi(z\sigma)$; il y aura les mêmes relations linéaires entre les résidus d'un même pôle, par exemple entre les $b_1(\sigma)$, les mêmes encore entre les $b_2(\sigma)$, les mêmes enfin entre les $b_m(\sigma)$.

Formons alors un déterminant à m lignes et m colonnes, où la $k^{\text{ième}}$ ligne sera formée par les $b_k(\sigma)$, de telle sorte que dans chaque ligne nous retrouvions les mêmes lettres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dans un ordre différent. C'est ce que M. Frobenius appelle un *déterminant de groupe* (Gruppendeterminant).

Il y aura les mêmes $(m - n)$ relations linéaires entre les éléments des diverses lignes de ce déterminant, c'est-à-dire que *le déterminant s'annulera ainsi que ses mineurs des* $(m - n - 1)$ *premiers ordres*.

Nous venons de voir que la condition nécessaire pour qu'il y ait une fonction rationnelle $F(x,y)$ satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n, c'est qu'il existe des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dont le déterminant satisfasse à la condition que je viens d'énoncer. Je dis que cette condition est également suffisante.

Supposons en effet qu'elle soit remplie et soit $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; envisageons la combinaison

$$b_1\Phi(z\sigma_1^{-1}) + b_2\Phi(z\sigma_2^{-1}) + \ldots + b_m\Phi(z\sigma_m^{-1}) = \Theta(z).$$

Nous pouvons toujours choisir $\Phi(z)$ de telle façon que $\Theta(z)$ ne soit pas identiquement nulle; il suffit par exemple de supposer que $\Phi(z)$ admet le pôle $z = \beta$, sans admettre aucun des pôles

$$z = \beta\sigma_2, \qquad z = \beta\sigma_3, \qquad \ldots, \qquad z = \beta\sigma_m.$$

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(z\sigma) = \sum b_i\Phi(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i\Phi(z\sigma_k^{-1}) = \sum b_k(\sigma)\Phi(z\sigma_k^{-1})$$

si l'on suppose

$$\sigma_i\sigma^{-1} = \sigma_k S = S'\sigma_k,$$

S et S' appartenant à G'.

Ainsi $\Theta(z\sigma)$ est formé comme $\Theta(z)$, sauf que les coefficients b_k sont remplacés par les coefficients $b_k(\sigma)$.

Or, par hypothèse, il y a, entre les quantités $b_k(\sigma)$, $(m - n)$ relations linéaires de la forme

$$(6) \qquad \sum A\, b_1(\sigma) + \sum A\, b_2(\sigma) + \ldots + \sum A\, b_m(\sigma) = 0.$$

On aura donc également les $(m - n)$ relations

$$\sum A\,\Theta(z\sigma) = 0,$$

ce qui veut dire que la fonction $\Theta(z)$ satisfera à une équation linéaire d'ordre n. C. Q. F. D.

Soit alors $K(z)$ une intégrale de première espèce quelconque; posons

$$J(z) = \sum b_i K(z\sigma_i^{-1});$$

$J(z)$ sera aussi une intégrale de première espèce et nous aurons

$$J(z\sigma) = \sum b_i K(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i K(z\sigma_k^{-1} S)$$
$$= \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1} S) = \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}) + \text{const.},$$

car, S appartenant à G, on aura

$$K(zS) - K(z) = \text{const.}$$

On a donc, à cause des équations (6),

(7) $$\sum A\, J(z\sigma) = \text{const.}$$

Observons, avant d'aller plus loin, qu'il résulte de nos définitions que

$$b_k(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = b_1(\sigma_i) = b_i(\sigma_1) = b_i.$$

et d'ailleurs le sous-groupe G′ étant invariant, on aura, pour une substitution S quelconque de G′,

$$b_k(\sigma_i) = b_k(S\sigma_i) = b_k(\sigma_i S).$$

Soit alors

$$J(zS\sigma) - J(z\sigma) = \omega(\sigma).$$

Alors $\omega(\sigma)$ sera une constante, puisque ce sera une période de l'intégrale de première espèce $J(z)$ et l'on aura

$$\sum A\, \omega(\sigma) = 0.$$

en mettant en évidence les indices

(8) $$\sum A_i\, \omega(\sigma_i) = 0.$$

Observons que $\omega(\sigma_1)$ est la période de $J(z)$ qui correspond à S, tandis que $\omega(b_i)$ est la période de $J(z)$ qui correspond à la substitution $\sigma_i^{-1} S \sigma_i$, laquelle appartient aussi au sous-groupe G′.

Donc $\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i)$ correspondra à la substitution $\sigma_i^{-1}\sigma_k S \sigma_k^{-1}\sigma_i$. Or, je puis répéter le même raisonnement qui m'a conduit à l'équation (8) en remplaçant S par $\sigma_k S \sigma_k^{-1}$; j'obtiendrai

$$\sum A_i\, \omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = 0.$$

Si alors je pose

$$\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = \omega_k(\sigma_i),$$

j'aurai, en supprimant les indices i,

$$(9) \qquad \sum A\,\omega_1(\sigma) = \sum A\,\omega_2(\sigma) = \ldots = \sum A\,\omega_m(\sigma) = 0.$$

On voit qu'il y a entre les ω les mêmes relations qu'entre les b; les périodes de l'intégrale $J(z)$ peuvent donc jouer le rôle des b.

Tout ce qui précède deviendrait illusoire si $J(z)$ se réduisait à une constante. Nous sommes donc conduit à nous poser la question suivante :

Peut-il arriver que, quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie, on ait

$$(10) \qquad \sum b_i\,K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Soient alors a un nombre quelconque, $a\sigma_i^{-1}$ un de ses transformés, et soit

$$\frac{d(a\sigma_i^{-1})}{da} = c_i.$$

Soit $K'(z) = \frac{dK}{dz}$ la dérivée de K; nous aurons

$$\sum b_i \frac{d(z\sigma_i^{-1})}{dz}\,K'(z\sigma_i^{-1}) = 0,$$

ou, en faisant $z = a$,

$$\sum b_i c_i\,K'(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie; nous aurons en particulier

$$\sum b_i c_i\,\varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

$\varphi(a)$ étant la fonction qui figure dans la relation (3), puisque nous avons vu que cette fonction est la dérivée d'une intégrale de première espèce.

Posons alors

$$\sum b_i c_i\,P(z, a\sigma_i^{-1}) = H(z);$$

nous aurons, en vertu de la relation (3),

$$H(zS) - H(z) = \sum b_i c_i\,\varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire que toutes les périodes de $H(z)$ seront nulles, c'est-à-dire que $H(z)$ sera une fonction fuchsienne de z et une fonction rationnelle de x et de y.

Quant à ses pôles $z = a\sigma^{-1}$, ils correspondront tous à une même valeur de x, $x = x_0$, puisque x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, ne changeant pas par conséquent quand on change z en $z\sigma_i^{-1}$. Nous pouvons d'ailleurs supposer que x_0 est fini, puisque a est arbitraire. Tous les pôles sont d'ailleurs simples.

Il y a donc deux cas concevables :

1° Ou bien on peut choisir des intégrales de première espèce telles que, en formant avec leurs périodes un déterminant de groupe de la façon que nous avons dite, ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des $(m - n - 1)$ premiers ordres.

2° Ou bien les nombres b sont tels que, pour toutes les intégrales de première espèce $K(z)$, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Nous verrons plus loin que les deux cas peuvent se réaliser.

Quoi qu'il en soit, nous devons retenir les résultats suivants :

a. Quand on passe de l'intégrale $K(z)$ à l'intégrale $K(z\sigma)$, les périodes de cette intégrale subissent une substitution linéaire. *L'ensemble de ces substitutions linéaires, dont les coefficients sont des entiers, forme un groupe isomorphe à* H.

b. Il y a entre les périodes des intégrales abéliennes un certain nombre de relations. On pourra obtenir de semblables relations de deux manières :

1° Si les nombres b ne sont pas tels que $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$, on en obtiendra en écrivant que le déterminant de groupe formé comme nous l'avons dit est nul ainsi que ses mineurs des $(m - n - 1)$ premiers ordres.

2° On sait que, entre les périodes de deux intégrales quelconques de première espèce $K(z)$ et $K'(z)$, il y a une relation bilinéaire due à Riemann.

Si nous prenons $K'(z) = K(z\sigma)$, les périodes de $K'(z)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$. Si nous substituons ces combinaisons dans la relation de Riemann à la place des périodes de $K'(z)$, nous aurons entre les périodes de $K(z)$ une relation quadratique à coefficients entiers.

IV. — Étude d'un exemple particulier.

Avant d'aller plus loin, je veux appliquer ce qui précède à un exemple simple, et je choisirai un groupe qui a été étudié en détail par M. Klein. Je veux parler du groupe de la résolvante de Galois de l'équation modulaire du septième ordre. Le groupe de Galois de cette résolvante est isomorphe au groupe qui permute les lettres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \infty$$

de la manière suivante. Une substitution quelconque de ce groupe changera la lettre z (où $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou ∞) en z', où

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \pmod 7,$$

α, β, γ, δ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod 7.$$

Ce groupe (qui est alors isomorphe à notre groupe H) est d'ordre 168 et peut être considéré comme dérivé de deux substitutions fondamentales

$$\Sigma_3 = (z, z+1), \qquad \Sigma_2 = \left(z, \frac{3z+2}{z-3}\right).$$

Entre ces deux substitutions, nous avons les relations fondamentales

$$(1) \qquad \Sigma_2^2 = \Sigma_3^7 = (\Sigma_2 \Sigma_3)^3 = 1.$$

et nous en avons encore d'autres, parmi lesquelles je citerai seulement la suivante :

$$(\Sigma_2 \Sigma_3^3)^4 = 1.$$

Construisons maintenant le groupe fuchsien G, auquel H est mériédriquement isomorphe. Pour cela, nous n'aurons qu'à le faire dériver de deux substitutions fondamentales σ_2 et σ_2, entre lesquelles auront lieu les relations fondamentales suivantes, identiques aux relations (1) :

$$(1\ bis) \qquad \sigma_2^2 = \sigma_3^7 = (\sigma_2 \sigma_3)^3 = 1.$$

Le polygone fuchsien correspondant R_0 est un quadrilatère formé de deux triangles symétriques l'un de l'autre (je veux dire symétriques au sens de la

Géométrie non euclidienne). Pour chacun de ces triangles, les trois angles sont :

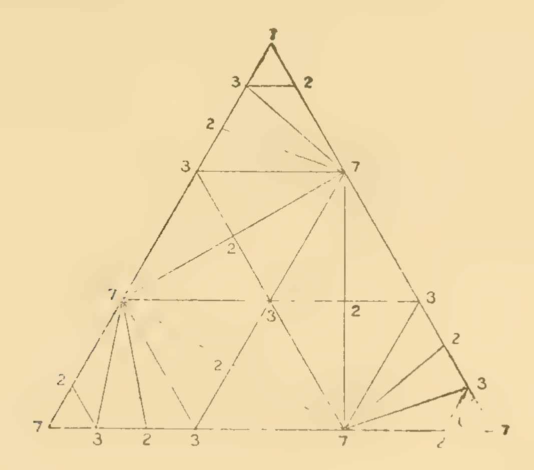
$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{7}.$$

Formons maintenant le sous-groupe G', ce sera encore un groupe fuchsien dont le polygone générateur R'_0 sera décomposable en 168 quadrilatères égaux à R_0 (toujours au point de vue non euclidien) ou en 336 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

M. Klein a construit ce polygone qui a 14 côtés et est décomposable en 14 triangles équilatéraux égaux dont les angles sont égaux à $\frac{\pi}{7}$. Chacun de ces 14 triangles se décompose lui-même en 24 triangles dont les angles sont

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{7}.$$

Il suffira de représenter ici l'un de ces triangles. J'ai fait cette représentation schématiquement en remplaçant les triangles curvilignes par des triangles rectilignes ; j'ai marqué chaque point par les chiffres 2, 3 ou 7, selon que les angles des triangles qui y aboutissent sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{7}$.



La décomposition de chaque triangle se déduit d'ailleurs aisément de celle du triangle contigu, si l'on observe que les deux figures représentant la décomposition de ces deux triangles sont symétriques par rapport au côté commun.

Il reste à définir la façon dont les quatorze côtés du polygone R'_0 sont conjugués.

Pour cela, numérotons ces côtés en faisant le tour du polygone dans le sens direct.

M. Klein a démontré que les côtés

$$1.10,\quad 3.12,\quad 5.14,\quad 7.2,\quad 9.4,\quad 11.6,\quad 13.8$$

sont conjugués.

On voit que les sommets forment deux cycles, l'un comprenant tous les sommets de rang pair, l'autre tous les sommets de rang impair. La somme des angles pour chacun de ces cycles est 2π. D'après la formule bien connue, le genre q est égal à 3.

Soit maintenant $K(z)$ une intégrale abélienne quelconque de première espèce engendrée par le groupe G' et étudions ses périodes.

Soient :

ε_1	l'intégrale prise le long des côtés	1 et 2,
ε_2	»	3 et 4,
ε_3	»	5 et 6,
ε_4	»	7 et 8,
ε_5	»	9 et 10,
ε_6	»	11 et 12,
ε_7	»	13 et 14.

Ce seront des périodes; car, quand on a parcouru deux côtés consécutifs du polygone, on est passé d'un sommet de rang pair à un sommet de rang impair, c'est-à-dire *appartenant au même cycle*. De plus, on a

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7=0,$$

car l'intégrale prise le long du polygone entier doit être nulle.

Soient maintenant

$$\zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \zeta_3,\quad \zeta_4,\quad \zeta_5,\quad \zeta_6,\quad \zeta_7$$

les périodes qui correspondent aux substitutions qui changent respectivement les côtés

1 en 10, 2 en 12, 5 en 14, 7 en 2, 9 en 4, 11 en 6, 13 en 8,

nous aurons

$$\zeta_1=-\varepsilon_6-\varepsilon_7,\quad \zeta_2=-\varepsilon_7-\varepsilon_1,\quad \zeta_3=-\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \zeta_4=-\varepsilon_2-\varepsilon_3,$$
$$\zeta_5=-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\quad \zeta_6=-\varepsilon_4-\varepsilon_5,\quad \zeta_7=-\varepsilon_5-\varepsilon_6.$$

Soit maintenant une seconde intégrale $K'(z)$ ayant pour périodes ε' et ζ', de sorte que l'on ait

$$\zeta'_1=-\varepsilon'_6-\varepsilon'_7,\quad \ldots$$

L'intégrale

$$\int K' dK,$$

prise le long du polygone entier devra être nulle, de sorte qu'on aura

$$\zeta'_1 \alpha_1 - \zeta'_2 \alpha_3 + \zeta'_3 \alpha_5 - \zeta'_4 \alpha_7 + \zeta'_5 \alpha_9 - \zeta'_6 \alpha_{11} + \zeta'_7 \alpha_{13} = 0,$$

en désignant par α_i l'intégrale K prise le long du côté i, de telle sorte que

$$\alpha_1 + \alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_{12} = \ldots = 0,$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_7, \quad \varepsilon_2 = \alpha_3 - \alpha_9, \quad \varepsilon_3 = \alpha_5 - \alpha_{11}, \quad \varepsilon_4 = \alpha_7 - \alpha_{13},$$
$$\varepsilon_5 = \alpha_9 - \alpha_1, \quad \varepsilon_6 = \alpha_{11} - \alpha_3, \quad \varepsilon_7 = \alpha_{13} - \alpha_5.$$

En remplaçant les ζ' et les α en fonctions des ε' et des ε, on trouve

(2) $$\varepsilon_1\varepsilon'_2 - \varepsilon_2\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_3 - \varepsilon_3\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_3$$
$$- \varepsilon_3\varepsilon'_2 + \varepsilon_2\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_2 + \varepsilon_4\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon'_4 + \varepsilon_4\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_4 + \varepsilon_5\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_5 = 0,$$

que je pourrai écrire sous la forme symbolique

(2 *bis*) $$(12) + (13) + (15) + (16) + (23) + (26) + (45) + (46) + (56) = 0.$$

Je remarque que, si nous posons

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_4 - \varepsilon_6 = \gamma_1, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \gamma_2, \quad \varepsilon_4 = \gamma_3,$$
$$\varepsilon_5 + \varepsilon_4 = \gamma_4, \quad \varepsilon_2 = \gamma_5, \quad \varepsilon_3 = \gamma_6,$$

la relation (2) devient

$$\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1 + \gamma_3\gamma'_4 - \gamma_4\gamma'_3 + \gamma_5\gamma'_6 - \gamma_6\gamma'_5 = 0,$$

c'est-à-dire que les périodes γ sont les *périodes normales*.

Examinons maintenant l'effet des diverses substitutions du groupe G. Parmi les points de notre polygone, nous distinguons, en particulier, les points (7), c'est-à-dire les points qui sont sommets de quatorze triangles avec un angle $\frac{\pi}{7}$; nous avons d'abord le centre de notre polygone, puis ses quatorze sommets; nous en avons, en outre, un sur chaque côté et un sur chacun des quatorze rayons allant du centre aux sommets. Mais les différents sommets de rang impair ne sont pas réellement distincts, puisqu'ils font partie d'un même cycle et qu'ils sont, par conséquent, *congruents*, c'est-à-dire transformables les uns dans les autres par une substitution du sous-groupe G'. De même pour les sommets de rang pair; de même enfin pour les deux points (7) situés sur deux côtés conjugués.

Nous aurons donc en tout vingt-quatre points (7) réellement distincts.

Considérons la substitution σ_3; c'est une rotation (au sens non euclidien) d'un angle $\frac{2\pi}{7}$ autour du centre du polygone. Cette rotation transforme les uns dans les autres les sommets de rang pair, de même que ceux de rang impair, de sorte qu'elle transforme chacun de ces sommets en un point congruent. Cela nous amène à distinguer parmi nos vingt-quatre points (7) ceux qui correspondent au centre et aux sommets du polygone; je les appellerai les *points* A.

Nous sommes donc conduits à répartir nos vingt-quatre points (7) en huit groupes comprenant chacun trois points (7) distincts; nous les appellerons les points A, les points B, ..., les points H.

Numérotons les sommets, les rayons du polygone dans le sens direct, comme nous avons fait pour les côtés; faisons de même pour les quatorze secteurs ou triangles dans lesquels on peut décomposer ce polygone, et cela de telle sorte que les sommets du côté 1 soient les sommets 1 et 2 et que le secteur 1 soit compris entre le côté 1 et les rayons 1 et 2.

Cela posé, les trois points B seront les points (7) qui se trouvent sur le côté 1 et sur les rayons opposés 6 et 13; les trois points C se trouveront sur le côté 3 et sur les rayons opposés 8 et 1; les trois points D se trouveront sur le côté 5 et sur les rayons opposés 10 et 3; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points A change tout point A en un point A, et conserve, par conséquent, la lettre A, et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres; de même une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points B conserve la lettre B et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres.

Plus généralement, une substitution quelconque de G permutera d'une certaine manière nos huit lettres; de telle sorte que si elle change, par exemple, un point A en un point B, elle changera tous les autres points A en des points B.

Ces permutations de 8 lettres formeront un groupe qui ne sera autre chose que notre groupe $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ de 168 substitutions.

Nous distinguerons en particulier la substitution σ_3 qui correspond à $(z, z+1)$, la substitution σ_2 qui correspond à $\left(z, \frac{5z+2}{z+2}\right)$, et la substi-

tution σ_4 qui est une combinaison des deux premières et que je définirai comme il suit :

C'est une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de figure du secteur 1, lequel secteur, représenté d'ailleurs sur la figure 1, est, comme nous le savons, un triangle équilatéral. Cette substitution conserve les lettres A et D et permute les autres de la façon suivante :

$$(A)(D)(GCB)(EFH).$$

Chacune des substitutions σ de G change R'_0 en un polygone R''_0 égal à R'_0 (au point de vue non euclidien) et qui pourrait tout aussi bien que R'_0 engendrer le groupe fuchsien G'.

Soient toujours $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$ les périodes de l'intégrale

$$K(z) - K(z\sigma_1)$$

et soit σ une substitution quelconque de G ; quelles seront les périodes correspondantes de l'intégrale de première espèce $K(z\sigma)$? Si z décrit une courbe quelconque, $z\sigma$ décrira la transformée de cette courbe par σ; si donc z décrit deux côtés contigus de R'_0, $z\sigma$ décrira les deux côtés contigus correspondants de R''_0; la première période de $K(z\sigma)$ sera donc l'intégrale K prise le long des deux côtés 1 et 2 du polygone R''_0.

En appliquant cette règle, on trouve que les 7 périodes de $K(z\sigma_3)$ sont

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1;$$

celles de $K(z\sigma_3^2)$ sont

$$\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2,$$

et ainsi de suite ; celles de $K(z\sigma_4)$ sont (lire le Tableau dans le sens horizontal)

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon_2 + \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_6, \quad \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \quad \varepsilon_7 + \varepsilon_1, \\
\varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_5, \\
\varepsilon_3 + \varepsilon_4 & \varepsilon_6 + \varepsilon_7, & \varepsilon_5 - \varepsilon_6 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, & \\
\varepsilon_7 + \varepsilon_1 & \varepsilon_3 - \varepsilon_4; & &
\end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2)$ sont

$$\varepsilon_4 + \varepsilon_5, \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_6 \quad \varepsilon_7, \quad -\varepsilon_5, \quad -\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_6,$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5 + \varepsilon_6, \quad -\varepsilon_6, \quad \varepsilon_7 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_6;$$

celles de $K(z\sigma_2\sigma_3)$ seront

$$\varepsilon_5 + \varepsilon_6, \quad \varepsilon_4 + \varepsilon_7 \quad \varepsilon_1, \quad -\varepsilon_1, \quad -\varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7,$$
$$\varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_6 \quad \varepsilon_7, \quad -\varepsilon_7, \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 - \varepsilon_7;$$

et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons la relation (2) et remplaçons $K'(z)$ successivement par $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$, $K(z\sigma_3^3)$, $K(z\sigma_2)$, $K(z\sigma_2\sigma_3)$, $K(z\sigma_4)$.

Nous pouvons supposer que K ait été choisi de telle sorte que les trois premières périodes soient 1, 0, 0; nous appellerons les trois suivantes x, y, z, de sorte que la septième sera $-1-x-y-z$.

Alors les six premières périodes seront :

pour $K(z)$,

$$1, \qquad 0, \qquad 0, \qquad x, \qquad y, \qquad z;$$

pour $K(z\sigma_3)$,

$$0, \qquad 0, \qquad x, \qquad y, \qquad z, \qquad -1-x-y-z;$$

pour $K(z\sigma_3^2)$,

$$0, \qquad x, \qquad y, \qquad z, \qquad -1-x-y-z, \qquad 1;$$

pour $K(z\sigma_3^3)$,

$$x, \qquad y, \qquad z, \qquad -1-x-y-z, \qquad 1, \qquad 0;$$

pour $K(z\sigma_2)$,

$$x+y, \quad -1-x-y, \qquad 0, \qquad -y-z, \qquad 1+y+z, \qquad -z;$$

pour $K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$y+z, \quad -y-z, \qquad -x, \qquad 1-x-y, \qquad -1-x-y, \quad 1+x+y+z;$$

pour $K(z\sigma_4)$,

$$y+z, \qquad -z, \qquad -1-x-y, \qquad 1+x+y, \qquad -1-y \qquad y+z+1.$$

On obtient ainsi, par la relation (2), six relations quadratiques en x, y, z qui sont (en changeant les signes au besoin) :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+2y^2+z^2-2yz-2xy-2y+x+1&=0,\\ x(x+y+z)&=y,\\ y^2+z^2+yz+x+2y+z+1&=0,\\ 0&=0,\\ (y+x)(z-1)+y(y+z)&=0,\\ y^2+xy+yz+x+y+1&=0.\end{aligned}\right.$$

Le point x, y, z doit donc se trouver sur cinq surfaces du second degré; or ces cinq surfaces n'ont que deux points communs qui nous sont donnés par

$$x=1, \qquad z=-1, \qquad y^2+y+2=0.$$

L'équation en y admet deux racines

$$y = T = \tau + \tau^2 + \tau^4,$$
$$y = T' = \tau^3 + \tau^5 + \tau^6,$$
$$\tau = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7},$$

d'où

$$T + T' + 1 = 0, \qquad TT' = 2 \text{ [1]}.$$

Au groupe H vont se trouver liés deux groupes *linéaires* remarquables, qui lui sont isomorphes.

Le premier est celui qui lie les périodes de $K(z\sigma)$ à celles de $K(z)$; par sa nature même, il ne peut contenir que des substitutions à coefficients entiers. Comme le nombre des périodes est de sept, mais qu'il n'y en a que six distinctes, c'est un groupe linéaire à six variables.

Nous prendrons les périodes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$, et nous trouverons, pour la substitution correspondant à σ_2,

$$\sigma'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

et, pour la substitution correspondant à σ_3,

$$\sigma'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que le groupe dérivé de ces deux substitutions linéaires σ'_2 et σ'_3 est d'ordre 168 et isomorphe à H.

Le second groupe est celui des transformations que subissent les dérivées des intégrales abéliennes de première espèce; c'est un groupe linéaire à trois

---

(1) Quelle est celle de ces deux racines qui convient? Il suffit de se rappeler que si K_1 et K_2 sont les parties réelle et imaginaire de K, l'intégrale $\int K_1\, dK_2$ prise le long du périmètre du polygone est positive. Or cette intégrale, si $x = 1$, $z = -1$, sera trois fois la partie imaginaire de y; nous devons donc prendre $y = T$.

variables; c'est celui que M. Jordan avait d'abord oublié dans son énumération, que M. Klein avait deviné et que M. Jordan avait enfin retrouvé dans une analyse plus complète.

Nous avons vu quelles sont les périodes de nos diverses intégrales :

$K(z)$,	1,	0,	0,	1,	T,	-1,	T';
$K(z\sigma_3)$,	0,	0,	1,	T,	-1,	T',	1;
$K(z\sigma_3^2)$,	0,	1,	T,	-1,	T',	1,	0;
$K(z\sigma_3^3)$,	1,	T,	-1,	T',	1,	0,	0.

Nous tirons de là

$$K(z\sigma_3^3) = K(z) + (T+1)K(z\sigma_3) + T\,K(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$

car il est aisé de vérifier que les périodes de

$$K(z\sigma_3^3) - K(z) - (T+1)K(z\sigma_3) - T\,K(z\sigma_3^2)$$

sont nulles.

Il résulte de là que quand z se change en $z\sigma_3$ les dérivées des trois intégrales $K(z)$, $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$ subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T+1 & T \end{vmatrix},$$

dont la période est 7 (les racines de l'équation en S sont τ, τ^2, τ^4).

Voici maintenant les périodes des intégrales suivantes :

$K(z\sigma_2)$,	$T+1$,	$-T-2$,	0,	$1-T$,	T,	1,	-1,
$K(z\sigma_2\sigma_3)$,	$T-1$,	$1-T$,	-1,	$T+2$,	$-T-2$,	$T+1$,	$-T$,
$K(z\sigma_2\sigma_3^2)$,	$-T-2$,	$T+1$,	$-T$,	$T-1$,	$1-T$,	-1,	$T+2$;

d'où les relations

$$K(z\sigma_2) = (T+1)K(z) + (T-2)K(z\sigma_3) + (-T-2)K(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$
$$K(z\sigma_2\sigma_3) = (T-1)K(z) + (-2T-3)K(z\sigma_3) + (1-T)K(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$
$$K(z\sigma_2\sigma_3^2) = (-T-2)K(z) + (2-T)K(z\sigma_3) + (T+1)K(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$

ce qui veut dire que quand z se change en $z\sigma_2$, les dérivées de nos trois intégrales subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} T+1 & T-2 & -T-2 \\ T-1 & -2T-3 & 1-T \\ -T-2 & 2-T & T+1 \end{vmatrix},$$

dont la période est 2.

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$J_m = \sum_{p=0}^{p=6} K(z\sigma_3^p)\tau^{mp},$$

où m prend l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il est clair que si la première période de cette intégrale est ω, les autres seront

$$\omega\tau^{-m}, \quad \omega\tau^{-2m}, \quad \omega\tau^{-3m}, \quad \omega\tau^{-4m}, \quad \omega\tau^{-5m}, \quad \omega\tau^{-6m}.$$

Mais il peut se faire que cette intégrale se réduise à une constante ; c'est ce qui arrive si $\omega = 0$.

Or, il est aisé de vérifier que $\omega = 0$ pour

$$m = 0, \quad m = 1, \quad m = 2, \quad m = 4,$$

mais que $\omega \gtrless 0$ pour

$$m = 3, \quad m = 5, \quad m = 6.$$

Il y a donc des intégrales dont les sept périodes sont

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau, & \tau^2, & \tau^3, & \tau^4, & \tau^5, & \tau^6, \\
1, & \tau^2, & \tau^4, & \tau^6, & \tau^8 = \tau, & \tau^{10} = \tau^3, & \tau^{12} = \tau^5, \\
1, & \tau^4, & \tau^8 = \tau, & \tau^{12} = \tau^5, & \tau^{16} = \tau^2, & \tau^{20} = \tau^6, & \tau^{24} = \tau^3 ;
\end{array}$$

mais il n'y en a pas dont les périodes soient

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau^3, & \tau^6, & \tau^9, & \tau^{12}, & \tau^{15}, & \tau^{18}, \\
1, & \tau^5, & \tau^{10}, & \tau^{15}, & \tau^{20}, & \tau^{25}, & \tau^{30}, \\
1, & \tau^6, & \tau^{12}, & \tau^{18}, & \tau^{24}, & \tau^{30}, & \tau^{36}, \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1.
\end{array}$$

Une dernière remarque :

L'intégrale $K(z)$ n'a que deux périodes distinctes, 1 et T ; elle est donc réductible aux intégrales elliptiques. Les périodes de $K(z\sigma)$, où σ est une substitution quelconque de G, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de $K(z)$; il en est de même de celles de l'intégrale

$$U = \sum A\,K(z\sigma),$$

où les A sont des coefficients entiers quelconques et où la sommation s'étend aux 168 substitutions, σ, *distinctes* de G.

Les périodes de U sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers de 1 et de T ; cette intégrale est donc réductible aux intégrales elliptiques ; *de*

sorte qu'il y a une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

V. — Théorèmes de Cartan et Frobenius.

Nous aurons besoin dans la suite de divers résultats obtenus par M. Cartan dans un Mémoire intitulé : *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. XII) et par M. Frobenius dans une série de Mémoires publiés dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin de 1896 à 1901.

Rappelons ces résultats succinctement en insistant un peu sur certains points pour faire voir comment s'éclairent mutuellement les théorèmes de M. Cartan, d'une part, ceux de MM. Dedekind et Frobenius, d'autre part.

Considérons un système d'unités complexes

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_r,$$

dont la multiplication soit associative et non commutative; ces unités donneront naissance à un système S de nombres complexes. Je supposerai qu'il y a dans ce système un *module*, c'est-à-dire un nombre complexe

$$a = \sum a_i e_i$$

tel que l'on ait

$$ax = xa = x,$$

quel que soit le nombre complexe x.

Soient maintenant

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_i e_i$$

deux nombres complexes quelconques, et soit

$$z = xy = \sum z_i e_i.$$

Il est clair que les z_i seront des fonctions linéaires des y_i, de sorte qu'à chaque nombre complexe x correspondra une transformation linéaire $T(x)$ qui transformera les y_i en z_i et dont les coefficients seront des fonctions linéaires et homogènes des x_i.

Soit maintenant l'équation

$$xy = \omega y,$$

où ω est un nombre ordinaire; je puis l'écrire

$$(x - \omega a) y = 0.$$

ce qui exige que le déterminant de la transformation $T(x - \omega a)$ soit nul. Ce déterminant, je l'appellerai $\Delta(x - \omega a)$.

L'équation

$$\Delta(x - \omega a) = 0$$

est une équation de degré r en ω que M. Cartan appelle l'*équation caractéristique*.

Si l'une des racines de cette équation est nulle, il existera un nombre y qui, multiplié (à gauche) par x, donne un produit nul, de telle sorte que

$$xy = 0$$

et que x peut s'appeler un diviseur de zéro (à gauche); mais M. Cartan ayant démontré qu'un diviseur de zéro (à gauche) est en même temps un diviseur de zéro (à droite), nous pourrons dire simplement un *diviseur de zéro*.

Si *toutes* les racines sont nulles, M. Cartan dit que x est *pseudonul*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit pseudonul, c'est qu'une de ses puissances entières soit nulle.

Cela posé, supposons qu'on prenne pour unités complexes r nombres complexes quelconques du système S au lieu de $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Soient

$$e'_1, \; e'_2, \; \ldots, \; e'_r$$

ces nouvelles unités complexes qui seront des combinaisons linéaires des anciennes.

Soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_i e'_i, \qquad y = \sum y_i e_i = \sum y'_i e'_i,$$

$$z = xy = \sum z_i e_i = \sum z'_i e'_i.$$

Que deviendra la substitution $T(x)$ qui changeait les y_i en z_i? elle devra être remplacée par une substitution $T'(x)$ qui changera les y'_i en z'_i. Soit U la substitution linéaire qui change les y_i en y'_i ; elle changera également les z_i en z'_i ; de sorte qu'on aura

$$T'(x) = U^{-1} T(x) U,$$

c'est-à-dire que T′ est la transformée de T par U.

On peut choisir les nouvelles unités complexes de façon à réduire le système S à sa forme la plus simple. C'est ce que M. Cartan a réussi à faire.

Pour cela, il introduit la notion de *sous-système*: l'ensemble des combinaisons linéaires de q nombres complexes appartenant à S formera un *sous-*

système σ de S si $q < r$; ce sous-système sera *semi-invariant à droite* si le produit (à droite) d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de S appartient à σ; on définit de même la semi-invariance à gauche; enfin on dit qu'un système est *invariant* s'il est semi-invariant à la fois à droite et à gauche.

Cela posé, M. Cartan a montré qu'un système *simple*, c'est-à-dire un système qui ne contient aucun sous-système invariant, ne peut être que ce qu'il appelle un p^2 ion, c'est-à-dire un système à p^2 unités e_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ avec la loi de multiplication

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij}e_{lh} = 0 \qquad (j \neq l).$$

Parmi les systèmes qui ne sont pas simples, il distingue d'abord les systèmes *semi-simples* qui admettent toutes les unités de plusieurs p^2 ions, et cela de telle façon que le produit de deux nombres complexes appartenant à deux p^2 ions différents soit toujours nul.

Enfin les systèmes qui ne sont ni simples, ni semi-simples, admettront toutes les unités d'un système semi-simple et, en outre, un certain nombre d'unités pseudonulles, dont les combinaisons linéaires forment un sous-système invariant dont tous les nombres sont pseudonuls.

Reprenons le déterminant $\Delta(x)$ que nous avons défini plus haut, et décomposons-le en facteurs irréductibles. A chacun des p^2 ions correspondra un de ces facteurs, qui sera de degré p et qui sera élevé à une puissance égale à p si le système est semi-simple et supérieure à p dans le cas contraire.

Tels sont les résultats de M. Cartan. Voyons comment ils peuvent être appliqués à la théorie des groupes.

Considérons un groupe d'ordre fini G; aux différentes substitutions faisons correspondre des unités complexes, dont la loi de multiplication soit la même que celle des substitutions. Je veux dire que, si les unités e_i, e_j, e_k correspondent respectivement aux substitutions σ_i, σ_j, $\sigma_i\sigma_j$, on ait

$$e_i e_j = e_k.$$

Cette loi est évidemment associative. Envisageons le système de nombres complexes S engendré par ces unités et, d'abord, formons l'équation caractéristique et le déterminant $\Delta(x)$ correspondant, ainsi que la substitution linéaire $\mathrm{T}(x)$.

Soit

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_k e_k, \qquad z = xy = \sum z_l e_l.$$

il vient

$$z = \sum x_i y_k e_j, \qquad z_j = \sum x_i y_k \qquad (e_j = e_i e_k).$$

Convenons d'adopter la notation si commode de M. Frobenius et de poser

$$x_i = x_{j,k} \qquad \text{si} \qquad e_i = e_k^{-1} e_j;$$

la transformation $T(x)$ s'écrira

$$z_j = \sum x_{j,k} y_k,$$

de telle sorte que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne dans $\Delta(z)$ sera $x_{j,k}$.

Ce déterminant $\Delta(x)$ sera donc un de ceux que M. Frobenius appelle *déterminants de groupe;* nous en avons vu plus haut un exemple au paragraphe 3.

Ainsi l'on voit déjà apparaître un lien entre les travaux de M. Cartan, ceux de M. Frobenius et la question qui nous occupe ici.

Observons qu'il y a dans le système S certains nombres ξ qui jouissent de la propriété d'être *commutables* à tous les nombres du système; je veux dire que l'on aura

$$\xi x = x \xi,$$

x étant un nombre quelconque du système S.

Nous savons, en effet, que les substitutions du groupe G se répartissent en un certain nombre de *classes*, de telle façon que toutes les transformées d'une même substitution par toutes les substitutions de G appartiennent à une même classe.

La somme de toutes les unités complexes correspondant aux diverses substitutions d'une même classe sera un nombre commutable; et tous les nombres commutables seront des combinaisons linéaires des nombres ainsi obtenus.

Ces nombres commutables formeront évidemment un sous-système de nombres complexes à multiplication commutative. C'est ce sous-système que M. Frobenius a étudié dans son premier Mémoire [*Ueber Gruppencharaktere* (*Sitzungsberichte* de Berlin, t. II, 1896)].

Cela posé, on peut se demander si le système S est semi-simple au sens de M. Cartan. La réponse doit être affirmative; en effet, s'il n'était pas semi-simple, il contiendrait un sous-système invariant pseudonul. Or, si un pareil sous-système existait, il contiendrait au moins un nombre commutable. Soit,

en effet, $z = \sum x_i e_i$ un nombre quelconque de ce sous-système. Tous les coefficients x_i ne peuvent pas être nuls.

Supposons donc $x_k \gtrless 0$.

Soit σ_k la substitution de G qui correspond à l'unité e_k, et désignons par e_k^{-1} l'unité qui correspond à la substitution inverse σ_k^{-1}. Nous aurons

$$e_k e_k^{-1} = e_1,$$

e_1 étant l'unité qui correspond à la substitution identique. Le nombre

$$x e_k^{-1}$$

fait partie du sous-système, puisque ce sous-système est invariant. Dans ce nombre complexe, le coefficient de e_1 est égal à x_k. De même les nombres

$$e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

(où e_j est une quelconque de nos unités) feront partie du sous-système et le coefficient de e_1 sera égal à x_k. Enfin le nombre

$$y = \sum e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

fait partie du sous-système; *il devrait donc être pseudonul;* d'ailleurs le coefficient de e_1 est égal à $r x_k$ (r étant l'ordre du groupe G) et, par conséquent, différent de zéro. Donc le nombre y n'est pas nul. De plus, il est aisé de voir que ce nombre y est commutable.

Si donc il y avait un sous-système invariant pseudonul, il y aurait un nombre commutable pseudonul.

Or M. Frobenius a montré qu'il n'y avait pas de nombre commutable pseudonul, ou plutôt il a montré, ce qui revient au même, que le déterminant de certaines quantités qu'il appelle les $p_{\alpha\beta}$ n'est pas nul (*loc. cit.*, p. 990 et 991).

Donc *le système* S *est semi-simple et réductible à un certain nombre de* p^2 *ions.* Or on conclura immédiatement que chaque facteur irréductible du déterminant $\Delta(x)$ est affecté d'un exposant égal à son degré. C'est le théorème fondamental établi d'une manière un peu différente par M. Frobenius dans son second Mémoire [*Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante* (*Sitz.* de Berlin, t. II, 1896)].

Chaque p^2 ion contient un nombre commutable et un seul; si, en effet, les unités $e'_{\alpha\beta}$ de ce p^2 ion sont choisies de telle sorte que

$$e'_{ij} e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij} e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

le nombre

$$e'_{11} + e'_{22} + \ldots + e'_{pp}$$

sera commutable à toutes les unités du p^2 ion, et il n'y en aura pas d'autres.

Il sera d'ailleurs commutable également aux unités des autres p^2 ions; car nous savons que le produit de deux nombres appartenant à deux p^2 ions différents est toujours nul.

On peut conclure de là qu'il y a précisément autant de p^2 ions (ou autant de facteurs irréductibles de Δ) qu'il y a de nombres commutables distincts, c'est-à-dire qu'il y a de classes de substitutions dans le groupe G.

Cela posé, on peut appliquer au système S les procédés de M. Cartan et choisir de nouvelles unités

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r,$$

de façon à réduire le système autant que possible. On aura

$$r = \sum p^2,$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de p correspondant aux différents p^2 ions; et les unités de chaque p^2 ion seront choisies de telle sorte que

$$e'_{ij}e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij}e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

et que le produit de deux unités appartenant à deux p^2 ions différents soit nul.

Que devient alors la substitution linéaire $T(x)$; elle se transforme, comme on l'a vu, en

$$T'(x) = U^{-1}\, T(x) U,$$

U étant la substitution linéaire qui, dans un même nombre complexe, lie les coefficients des nouvelles unités e' à ceux des anciennes unités e; et alors on voit que la substitution $T'(x)$ se décompose en plusieurs substitutions linéaires simultanées.

Désignons les unités nouvelles e' par une notation à trois indices $e'_{\alpha\beta\gamma}$; le premier indice représente le numéro du p^2 ion auquel appartient l'unité, les deux autres indices distinguent les unes des autres les diverses unités d'un même p^2 ion. La loi de multiplication est alors

$$e'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\gamma\delta} = e'_{\alpha\beta\delta},$$

tous les autres produits étant nuls. Dans certains cas, le premier indice deviendra inutile et nous le supprimerons; quand il n'y aura que deux indices ce sera donc le premier indice qui aura été supprimé.

Cela posé, soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad y = \sum y'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

$$z = xy = \sum z'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il s'agit d'étudier la transformation $T'(x)$ qui change les y' en z'. On trouve

$$z'_{\alpha\beta\gamma} = \sum x'_{\alpha\beta\delta} y'_{\alpha\delta\gamma},$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de δ.

Ainsi les variables z' dépendront uniquement des variables y' qui ont même premier indice et même dernier indice que z, ce qui montre que la transformation $T'(x)$ se décompose en $\sum p$ transformations linéaires partielles à p variables.

J'observe que si je conserve l'indice α et que je change l'indice γ, les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ ne changent pas. Les variables $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$ subissent donc *la même* transformation linéaire que les variables $y'_{\alpha\delta\gamma}$. Nos $\sum p$ substitutions linéaires partielles sont donc identiques p à p.

Nous devons nous poser maintenant une question. *Quand arrive-t-il que le déterminant* $\Delta(x)$ *est nul ainsi que tous ses mineurs des* $(k-1)$ *premiers ordres*? En effet, nous avons vu au paragraphe 3 que le déterminant de groupe formé par les quantités que nous avons appelées $b_i(\sigma)$ devait satisfaire à cette condition.

Si le déterminant $\Delta(x)$ y satisfait, il en sera de même du déterminant de la substitution $T'(x)$ qui n'en est qu'un transformé.

Considérons notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 ion et supposons que ce soit un p_α^2 ion. Supposons que le déterminant des p_α^2 quantités $x'_{\alpha\beta\gamma}$ soit nul ainsi que ses mineurs des $(k_\alpha - 1)$ premiers ordres, mais que les mineurs d'ordre supérieur ne soient pas tous nuls.

Envisageons l'équation $xy = 0$ qui peut s'écrire

$$\sum_\delta x'_{\alpha\beta\delta} y'_{\alpha\delta\gamma} = 0.$$

Considérons en particulier celles de ces équations qui se rapportent à une valeur donnée de α et à une valeur donnée de γ; elles sont au nombre de p_α correspondant aux différentes valeurs de l'indice β. Comme les mineurs du

déterminant des x' sont nuls jusqu'à l'ordre $(k_\alpha - 1)$; parmi ces équations, $(p_\alpha - k_\alpha)$ seulement sont distinctes, de sorte que nos p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\gamma}$ dépendront encore de k_α arbitraires; il en sera de même des p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$, de sorte que les p_α^2 inconnues y' relatives à notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 ion dépendent de $k_\alpha p_\alpha$ arbitraires et que les r inconnues y' dépendent en tout de

$$\sum k_\alpha p_\alpha - k$$

arbitraires.

En d'autres termes, le déterminant de $\mathrm{T}'(x)$ [et par conséquent aussi le déterminant $\Delta(x)$] sera nul, ainsi que ses mineurs des $(k-1)$ premiers ordres.

En d'autres termes encore, l'équation $xy = 0$ admet k solutions distinctes, de sorte qu'on a

$$xy^{(1)} = xy^{(2)} = \ldots = xy^{(k)} = 0,$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ étant k nombres complexes linéairement indépendants, c'est-à-dire que x est k fois diviseur de zéro.

Si nous multiplions x par r nombres complexes quelconques linéairement indépendants, les produits obtenus ne seront pas linéairement indépendants, puisque nous venons de voir que k de leurs combinaisons linéaires sont nulles; parmi ces produits, $(r-k)$ seulement seront distincts.

Donc x fait partie d'un sous-système semi-invariant à droite de $(r-k)$ nombres.

De même, x fera partie d'un sous-système semi-invariant à gauche de $(r-k)$ nombres. Mais il ne faudrait pas en conclure que x fait partie d'un sous-système invariant de $(r-k)$ nombres, car ces deux sous-systèmes semi-invariants ne sont pas identiques. Du reste, nous n'envisagerons ici que des sous-systèmes semi-invariants à droite.

Nous pourrons dire qu'un sous-système semi-invariant s de h nombres est *premier* quand il ne contiendra aucun sous-système semi-invariant de moins de h nombres, d'où il suit qu'on peut reproduire *tous* les nombres du sous-système s en multipliant un nombre *quelconque* x de ce sous-système par les divers nombres complexes y du système S. Car s'il n'en était pas ainsi, ceux des nombres de s qu'on obtiendrait en multipliant x par les divers nombres de S, ne reproduisant pas le sous-système s tout entier, formeraient un sous-système semi-invariant de moins de h nombres contenu dans s.

Dans un sous-système semi-invariant premier s, tous les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ qui ne sont pas nuls ont même premier indice α (et correspondent par conséquent

à un même p^2 ion). Et, en effet, supposons qu'il y ait dans s des nombres où deux coefficients x' dont les premiers indices α et α' soient différents, et qui ne soient pas nuls. Multiplions ces nombres par des nombres complexes

$$y = \sum y'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

où tous les coefficients y' soient nuls, sauf ceux dont le premier indice est α; dans les produits, les coefficients seront aussi tous nuls, sauf ceux dont le premier indice serait α, et ces produits formeront un sous-système semi-invariant contenu dans s; donc s ne serait pas premier.

Je dis maintenant que, dans le sous-système premier s, il y a, entre les p_α^2 coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$, des relations linéaires distinctes de la forme

$$(1) \qquad \sum A_\beta x'_{\alpha\beta\delta} = 0,$$

où les A_β sont des coefficients constants ne dépendant pas des x' ni du second indice δ, et que ces relations sont au nombre de $(p_\alpha - 1)$, de sorte que, finalement, le sous-système se compose de p_α nombres distincts.

Et, en effet, soit X un nombre quelconque de notre sous-système premier s; tous les nombres du sous-système pourront être obtenus en multipliant l'un quelconque d'entre eux par d'autres nombres complexes, sans quoi ceux qu'on pourrait obtenir de cette façon formeraient un sous-système semi-invariant contenu dans s.

Considérons les nombres $X e'_{\alpha\beta\gamma}$; ils font tous partie de s, ils ne peuvent pas être tous nuls, et, en effet, si l'on pose

$$e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

il vient

$$X = X e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} X e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Les termes où le premier indice n'est pas égal à α sont déjà tous nuls; si ceux où ce premier indice est α étaient également tous nuls, il faudrait que X fût nul.

Soit donc $X e'_{\alpha\beta\gamma} \gtrless 0$; le sous-système s pourra être obtenu en multipliant $X e'_{\alpha\beta\gamma}$ par un nombre complexe quelconque. On obtient ainsi le sous-système semi-invariant

$$X e'_{\alpha\beta 1}, \quad X e'_{\alpha\beta 2}, \quad \ldots, \quad X e'_{\alpha\beta p},$$

qui se compose de p_α nombres et qui doit être identique à s.

Je dis maintenant que tout système semi-invariant non premier peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes semi-invariants premiers n'ayant aucun nombre en commun et de telle façon que tout nombre du sous-système total puisse, d'une manière et d'une seule, être regardé comme une somme de nombres appartenant aux divers sous-systèmes composants.

Soit en effet X un nombre appartenant à un sous-système semi-invariant s non premier; nous aurons

$$X = \sum C_{\alpha\beta\gamma} X e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or $X e'_{\alpha\beta\gamma}$ appartient à s et appartient en même temps au sous-système premier formé des nombres $X e'_{\alpha\beta\delta}$ $(\delta = 1, 2, \ldots, p_\alpha)$.

Dans ses derniers Mémoires parus dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1899 à 1901 et intitulés *Darstellung der Gruppen durch lineare Transformationen*, M. Frobenius cherche à former les groupes de substitutions linéaires isomorphes à un groupe fini donné. Ce problème pourrait être résolu en s'appuyant sur les principes suivants :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables indépendantes et φ un polynome linéaire et homogène par rapport à ces variables. Soit σ_i une substitution quelconque de G et e_i l'unité complexe correspondante. Soit G′ un groupe de substitutions linéaires entre les n variables ξ, isomorphe à G, et σ'_i la substitution de G correspondant à σ_i; soit φe_i ce que devient le polynome φ par cette substitution.

S'il n'y avait entre les fonctions linéaires φe_i aucune relation linéaire, le groupe G′ pourrait être ramené à un groupe de permutations entre les φe_i, et, plus généralement, l'étude du groupe G′ peut se ramener à celle des relations linéaires entre les φe_i.

Soit $X = \sum X_i e_i$ un nombre complexe quelconque; nous poserons

$$\varphi X = \sum X_i \varphi e_i,$$

et alors les relations linéaires cherchées seront de la forme

$$\varphi X = 0.$$

Il nous suffira de remarquer que l'ensemble des nombres X qui satisfont à cette relation forme un sous-système semi-invariant à gauche, et que, inversement, étant donné un sous-système semi-invariant à gauche, on peut s'en servir de cette façon pour définir un groupe linéaire G′ isomorphe à G.

VI. — Applications du théorème de Frobenius.

Reprenons, comme dans les paragraphes 2 et 3 : 1° notre groupe fini H d'ordre m; 2° nos groupes fuchsiens G et G' et les fonctions fuchsiennes correspondantes; 3° les intégrales de première espèce $K(z)$ et les intégrales de seconde espèce $P(z, a)$. Conservons les mêmes notations, de telle sorte que σ désigne une substitution de G et S une substitution de G'.

Envisageons d'autre part, comme au paragraphe 5, le système d'unités complexes

$$(1) \qquad e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_m$$

correspondant au groupe H, de sorte qu'à chaque substitution de G corresponde une substitution de H et, par conséquent, une des unités (1). Supposons qu'on ait réduit le système de nombres complexes correspondant, que j'appellerai *le système* Σ, à sa forme canonique (en le décomposant en p^2 ions), et soient

$$e'_{\alpha\beta\gamma}$$

les nouvelles unités complexes, le triple indice ayant même signification que plus haut.

Nous emploierons les notations suivantes : soit $F(z)$ une intégrale abélienne quelconque, combinaison des $K(z)$ et $P(z, a)$; considérons

$$F(z\sigma_i^{-1}),$$

σ_i étant une substitution de G. A cette substitution correspondra une unité complexe e_i, mais à cette unité correspondront plusieurs substitutions de G que j'appellerai σ_i, σ'_i, ..., et, par conséquent, plusieurs intégrales $F(z\sigma_i^{-1})$, $F(z\sigma_i'^{-1})$, ...; mais *toutes ces intégrales ne différeront les unes des autres que par des constantes;* car on aura $\sigma'_i \doteq \sigma_i S$, S appartenant à G'. Si donc je conviens de poser

$$F(z\sigma_i^{-1}) = F(z)e_i,$$

la fonction $F(z)e_i$ sera définie *à une constante près.*

Soit maintenant

$$X = \sum X_i e_i = \sum X'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

je conviendrai de poser

$$F(z)X = \sum X_i [F(z)e_i].$$

Nous aurons

$$[F(z)e_i]e_k = [F(z\sigma_i^{-1})]e_k = F(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) = F(z)(e_i e_k),$$

puisque $\sigma_i \sigma_k$ correspond à $e_i e_k$; et plus généralement

$$[F(z)X]Y = F(z)(XY),$$

de sorte que je pourrai écrire simplement $F(z)XY$.

Autre remarque : si $F(z)$ est une intégrale de première espèce, ou se réduit à une fonction algébrique (je veux dire une fonction algébrique de x et de y et, par conséquent, une fonction fuchsienne de z), ou se réduit à une constante, il en sera de même de $F(z)X$.

Si nous rapprochons ces deux remarques, nous verrons que, si l'on considère une fonction $F(z)$ quelconque, l'ensemble des nombres X qui seront tels que la fonction $F(z)X$ jouisse de l'une de ces trois propriétés, formeront un sous-système semi-invariant à droite; car il est clair que, si $F(z)X$ jouit d'une de ces propriétés, il en est de même de $F(z)XY$, quel que soit le nombre Y.

Par exemple, nous avons q intégrales de première espèce $K(z)$; supposons

$$q < m$$

et considérons les m intégrales

$$(2) \qquad K(z\sigma_1), \quad K(z\sigma_2), \quad \ldots\ldots, \quad K(z\sigma_m);$$

il y aura entre elles au moins $(m - q)$ relations linéaires distinctes. Or une combinaison linéaire quelconque des intégrales (2) peut s'écrire d'après notre nouvelle notation

$$K(z)X,$$

X étant un nombre complexe du système Σ. Parmi ces combinaisons, il y en aura [pour le moins $(m - q)$] qui se réduiront à des constantes et les nombres X correspondants formeront un sous-système semi-invariant.

Supposons que, parmi les intégrales (2), il y en ait q' qui soient linéairement indépendantes; le nombre q' sera au plus égal au genre q; d'où $q' \leqq q$.

Quoi qu'il en soit, le sous-système semi-invariant formé par les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$ comprendra précisément $(m - q')$ nombres complexes linéairement indépendants.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres X tels que l'on ait *à la fois* [pour toutes les intégrales (2)]

$$K(z\sigma_1)X = \text{const.}, \qquad K(z\sigma_2)X = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad K(z\sigma_m)X = \text{const.}$$

Cet ensemble formera un sous-système non plus semi-invariant, mais *invariant*, car il est clair qu'on aura

$$K(z)YX = \text{const.}, \qquad K(z)YXZ = \text{const.},$$

Y et Z étant deux nombres complexes quelconques.

Cela posé, nous dirons qu'une intégrale de première espèce $K(z)$ *appartient* à un p^2 ion Π si l'on a

$$K(z)X = \text{const.},$$

X étant un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que Π, et si la même relation n'a pas lieu pour *tous* les nombres complexes de Π.

Il résulte de cette définition que toute intégrale de première espèce peut être regardée comme la somme de plusieurs autres dont chacune *appartient* à un p^2 ion déterminé.

Soit, en effet,

$$K(z) - K(z\sigma_1) = K(z)e_1$$

cette intégrale, nous pouvons écrire

$$e_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_p,$$

chacun des nombres X_i faisant partie d'un p^2 ion déterminé. Nous aurons alors

$$K(z) = K(z)X_1 + K(z)X_2 + \ldots + K(z)X_p.$$

Alors $K(z)X_i$ ou bien se réduira à une constante ou appartiendra au même p^2 ion que X_i; car on aura évidemment

$$K(z)X_i X_k = \text{const.},$$

si X_k fait partie d'un autre p^2 ion que X_i, puisque alors on aurait $X_i X_k = 0$, et, d'autre part, si X_i et X_k font partie du même p^2 ion, on n'aura pas la même relation, quel que soit X_k, puisqu'il y a un nombre X_k tel que $X_i X_k = X_i$.

Examinons maintenant ce qui se passe, s'il y a des p^2 ions auxquels n'appartient aucune intégrale de première espèce, et il y en aura forcément si $m > q$. Soit X un nombre d'un de ces p^2 ions et $K(z)$ une intégrale quelconque, on aura

$$K(z)X = \text{const.} \tag{3}$$

Considérons les périodes de nos intégrales; les périodes de $K(z\sigma_i^{-1})$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$ et les coefficients entiers de ces combinaisons pourront être déterminés comme nous

l'avons vu au paragraphe 3. Celles de $K(z)X$ seront encore des combinaisons linéaires de celles de $K(z)$; mais les coefficients ne seront plus entiers; ces coefficients toutefois seront aisés à déterminer, puisque ce seront à leur tour des combinaisons linéaires à coefficients entiers des coefficients X_i du nombre complexe

$$X = \sum X_i e_i.$$

Si alors ω est une période de $K(z)$ et si ωX est la période correspondante de $K(z)X$, alors, en vertu de (3), on aura

$$(4) \qquad \omega X = 0.$$

La relation (4) est une relation linéaire entre les périodes de $K(z)$ et, d'après nos hypothèses, ces relations doivent avoir lieu pour toutes les intégrales $K(z)$.

Or, nous savons qu'il existe q intégrales admettant chacune $2q$ périodes.

Parmi ces périodes, q peuvent être choisies arbitrairement; il y a donc entre les $2q$ périodes q relations qui restent vraies pour toutes les intégrales et il n'y en a que q.

Ces relations sont bien connues. Si $K(z)$ et $K'(z)$ sont deux intégrales quelconques, on sait qu'il y a entre les périodes de ces deux intégrales une relation bilinéaire à coefficients entiers, dite de Riemann, qui s'écrira, par exemple,

$$\omega_1\omega'_1 - \omega_2\omega'_2 + \omega_3\omega'_3 - \omega_4\omega'_4 + \ldots + \omega_{2q-1}\omega'_{2q} - \omega_{2q}\omega'_{2q-1} = 0,$$

si les ω_i sont les périodes normales de $K(z)$ et les ω'_i celles de $K'(z)$.

Si, dans ces relations bilinéaires, on prend pour $K'(z)$ successivement q intégrales de première espèce linéairement indépendantes, on aura, entre les périodes de $K(z)$, q relations linéaires distinctes et qui resteront les mêmes quelle que soit l'intégrale $K(z)$. *Il ne peut y avoir d'autre relation linéaire entre ces périodes.*

Donc, de deux choses l'une : ou bien la relation (4) sera une identité, et alors tous les coefficients de cette relation devront s'annuler, ce qui nous donnera *un certain nombre de relations linéaires à coefficients entiers entre les* X_i $\Big($c'est-à-dire entre les coefficients du nombre complexe $X = \sum X_i e_i\Big)$, *qui seront vraies pour tous les nombres complexes du* p^2 *ion considéré.*

Ou bien la relation (4) est l'une des relations dont nous venons de parler, que l'on obtient à l'aide d'une intégrale $K'(z)$ et dont les coefficients sont des périodes de cette intégrale $K'(z)$; et alors *il y aura une intégrale de première espèce dont les périodes seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des* X_i.

Pour savoir lequel de ces deux cas se présentera, je considère l'intégrale de seconde espèce $P(z, a)$ et je forme

$$P(z, a)X.$$

On démontrerait de la même manière : 1° que les nombres X tels que $P(z, a)X$ soit une fonction algébrique, forment un sous-système semi-invariant à droite; 2° que les nombres X tels que tous les $P(z\sigma, a)X$ soient des fonctions algébriques, forment un système invariant; 3° qu'une intégrale de seconde espèce quelconque peut toujours être décomposée en une somme d'une fonction algébrique et de plusieurs intégrales de seconde espèce appartenant chacune à un p^2 ion déterminé.

Il convient, bien entendu, de dire que $P(z, a)$ appartient au p^2 ion Π, si $P(z, a)X$ est algébrique quand X est un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que Π et si cela n'est plus vrai quand X fait partie de Π (ou du moins pour tous les nombres complexes X faisant partie de Π).

Soit alors un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de seconde espèce; soit $\varphi(a)$ l'une des périodes de $P(z, a)$ et $\varphi(a)X$ la période correspondante de $P(z, a)X$, on devra avoir

$$\varphi(a)X = 0, \tag{4 bis}$$

X étant un nombre quelconque du p^2 ion envisagé et quelle que soit l'intégrale $P(z, a)$.

La relation (4 *bis*) est une relation linéaire entre les périodes de $P(z, a)$ formée avec ces périodes comme la relation (4) l'était avec celles de $K(z)$. Mais ces périodes d'une intégrale de deuxième espèce peuvent être choisies arbitrairement.

Donc la relation (4 *bis*) est une identité, et il en est de même de la relation (4).

On est donc dans le premier cas et il y a entre les X_i des relations linéaires à coefficients entiers.

Soit maintenant un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de

première espèce et auquel appartienne pourtant une intégrale de deuxième espèce. Alors la relation (4) ne pourra être une identité, sans quoi il en serait de même de (4 *bis*) et $P(z, a)X$ serait algébrique quelle que soit $P(z, a)$, contrairement à l'hypothèse.

On est donc dans le second cas et il y a une intégrale de première espèce dont les périodes sont des combinaisons à coefficients entiers des X_i.

Nous devons donc distinguer trois sortes de p^2 ions :

Première sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *sont des fonctions algébriques.*

Deuxième sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *ne sont pas des fonctions algébriques, mais tous les* $K(z)X$ *sont des constantes.*

Troisième sorte : *Tous les* $K(z)X$ *ne sont pas des constantes.*

Plaçons-nous à un autre point de vue. Considérons les unités complexes (1) $e_1, e_2, \ldots, e_m$: elles seront liées aux unités complexes nouvelles $e'_{\alpha\beta\gamma}$ par des relations linéaires à coefficients constants. On aura, par exemple,

$$e'_{\alpha\beta\gamma} = \sum A_i e_i,$$

et les coefficients A_i seront des nombres *algébriques*. Supposons que pour l'un des p^2 ions, que j'appellerai le p^2 ion Π_α, les coefficients A_i qui entrent dans les expressions des unités $e'_{\alpha\beta\gamma}$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers d'une certaine racine ζ d'une équation algébrique L à coefficients entiers.

Plus généralement, supposons que le p^2 ion Π_α puisse être engendré par p^2 unités fondamentales e'', qui pourront être différentes des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$, et que l'on ait

$$e'' = \sum A_i e_i,$$

les A_i étant des fonctions rationnelles de ζ.

Il suffit pour cela que le nombre commutable qui fait partie de Π_α ait ses coefficients rationnels en ζ. En effet, on obtiendra les nombres de Π_α en multipliant ce nombre commutable par un nombre complexe quelconque. Si nous multiplions ce nombre commutable par des nombres complexes entiers, les produits auront leurs coefficients rationnels en ζ et l'on pourra choisir les p^2 unités fondamentales parmi les produits ainsi obtenus.

Soient $\zeta', \zeta'', \ldots$ les autres racines de cette équation L. Soit B_i ce que

devient A_i quand on y remplace ζ par ζ'; il existera un autre p^2 ion Π_δ dont les unités fondamentales seront

$$\sum B_i e_i.$$

Les p^2 ions Π_α, Π_δ et ceux qu'on formerait avec ζ'', ..., comme on a formé Π_δ avec ζ', seront dits *conjugués*.

Il peut arriver, il est vrai, que Π_α, Π_δ et tous les p^2 ions conjugués se confondent en un seul, et c'est ce qui arrive en particulier avec les quaternions ordinaires de Hamilton, si l'on veut faire dériver ces quaternions des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$; mais si l'on ne s'astreint pas à choisir ces unités canoniques comme unités fondamentales, on peut toujours supposer que tous les conjugués de Π_α sont distincts. Il suffit pour cela de prendre pour unités fondamentales p^2 produits du nombre commutable par des nombres complexes entiers.

Je dis que si un p^2 ion est de la première sorte, il en sera de même de tous ses conjugués.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que Π_α soit de la première sorte, c'est que la relation (4), pour tous les nombres de ce p^2 ion, se réduise à une identité, c'est-à-dire que l'on ait *identiquement*, pour toutes les unités fondamentales de Π_α,

$$\omega e'' = 0,$$

quelle que soit la période ω choisie, c'est-à-dire enfin que l'on ait, pour toutes ces unités fondamentales, certaines relations

$$\sum m_i A_i = 0,$$

dont les coefficients m_i sont des entiers faciles à déterminer.

Mais, comme ces coefficients sont entiers, les relations devront subsister quand on y remplacera ζ par ζ'; on aura donc encore

$$\sum m_i B_i = 0,$$

de sorte que Π_δ sera encore de la première sorte.

Remarquons maintenant que le nombre des intégrales de première espèce appartenant à un p^2 ion (d'ordre p) est toujours un multiple de p. Et, en effet, partons d'une intégrale $K(z)$ quelconque et formons les diverses intégrales $K(z)X$, où X est un nombre complexe du p^2 ion considéré; il y en

aura p^2, puisqu'il y a p^2 nombres X dans le p^2 ion, mais elles ne seront pas toutes distinctes; il peut y avoir en effet des relations de la forme

$$\text{(5)} \qquad K(z)X = \text{const.}$$

Nous savons que les nombres X jouissant de cette propriété forment un sous-système semi-invariant à droite et il en est de même des nombres X jouissant de cette propriété et faisant partie de notre p^2 ion.

Or, les sous-systèmes semi-invariants faisant partie de ce p^2 ion peuvent être décomposés en un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants *premiers* contenant chacun p nombres. Le nombre des relations (5) distinctes sera donc un multiple de p et il en sera de même par conséquent du nombre des intégrales $K(z)X$ *distinctes*.

Nous pouvons dire que les intégrales $K(z)X$ *dérivent* de l'intégrale $K(z)$, où X est un nombre quelconque du p^2 ion.

Il en résultera que le nombre des intégrales distinctes qui dérivent d'une même intégrale et qui appartiennent à un même p^2 ion, est un multiple de p.

Nous dirons qu'un système d'intégrales est *fermé*, si elles appartiennent à un même p^2 ion et si toutes les intégrales qui dérivent d'une intégrale du système font également partie du système. Nous dirons qu'un système fermé est *premier* s'il ne contient aucun système fermé plus petit.

Je dis alors qu'un système fermé premier quelconque se compose de p intégrales. Je n'ai qu'à répéter les raisonnements que j'ai faits au paragraphe 5 à propos des sous-systèmes semi-invariants premiers. Le système étant premier, toute intégrale du système pourra être regardée comme dérivant de l'une quelconque d'entre elles $K(z)$, ou encore de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ [à moins que $K(z)\,e'_{\alpha\beta\gamma}$ ne se réduise à une constante]; mais cela ne peut pas être vrai de tous les $K(z)\,e'_{\alpha\beta\gamma}$, sans quoi

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma}\,K(z)\,e'_{\alpha\beta\gamma}$$

se réduirait à une constante. Mais les intégrales dérivant de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ sont les intégrales

$$K(z)e'_{\alpha\beta\delta} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, p),$$

et elles sont au nombre de p. C. Q. F. D.

Je dis maintenant qu'un système fermé quelconque peut être décomposé en systèmes premiers. Car si $K(z)$ est une intégrale quelconque du système, on

peut écrire

$$K(z) = K(z_1)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

D'ailleurs nous pouvons toujours supposer que ces systèmes premiers sont distincts, c'est-à-dire qu'il n'y a entre les intégrales de ces systèmes premiers aucune relation linéaire, sans quoi on se servirait de ces relations linéaires pour éliminer les systèmes premiers qui ne seraient pas distincts des autres.

On en conclut aisément que *le nombre des intégrales d'un système fermé quelconque et*, en particulier, *le nombre total des intégrales distinctes appartenant à un p^2 ion, est toujours un multiple de p.*

Examinons maintenant les relations entre lès périodes. Soit

$$K(zS\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega e_i.$$

S appartenant à G' et

$$\omega X = \sum X_i(\omega e_i)$$

si $X = \sum X_i e_i$. Quels sont les nombres complexes X pour lesquels on a

$$\omega X = 0\,?$$

1° Je suppose d'abord que ωX reste nul *quelle que soit l'intégrale* K pour une substitution S donnée de G'; on aura

$$\omega' e_i = K'(zS\sigma_i^{-1}) - K'(z\sigma_i^{-1}).$$

et, si l'on prend $K'(z) = K(z\sigma_k^{-1})$,

$$\omega' e_i = K(zS\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) = \omega e_k e_i.$$

$$\omega' X = \sum X_i(\omega e_k e_i) = \omega e_k X.$$

Comme on doit avoir $\omega' X = 0$, on aura

$$\omega e_k X = 0.$$

et, par conséquent,

$$\omega Y X = 0.$$

quel que soit le nombre complexe Y.

Les nombres X formeront un sous-système semi-invariant à gauche.

2° Je suppose que ωX reste nul pour une intégrale K donnée *pour toutes les substitutions* S de G'.

Alors

$$\omega X e_k = \sum X_i \omega e_i e_k = \sum X_i[K(zS\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})].$$

Mais, G' étant un sous-groupe invariant, on a

$$S\sigma_k^{-1} = \sigma_k^{-1} S',$$

S' appartenant à G', d'où

$$\omega X e_k = \sum X_i [K(z\sigma_k^{-1} S' \sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})]$$
$$= \sum X_i [K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1})].$$

Or nous pouvons poser

$$K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega' e_i,$$

ω' étant une période telle que, d'après notre hypothèse, $\omega' X$ soit nul; on aura donc

$$\omega X e_k = \sum X_i (\omega' e_i) = \omega' X = 0.$$

Donc ωe_k et ωXY seront nuls, Y étant un nombre complexe quelconque.

Les nombres X formeront un sous-système semi-invariant à droite.

Les nombres X pour lesquels $\omega X = 0$ pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour toutes les substitutions S formeront évidemment un système invariant; ce système nous est déjà connu, puisqu'il est formé de tous les p^2 ions de la première sorte.

Nous avons vu au paragraphe 3 qu'au groupe H se rattachent deux groupes linéaires remarquables; étudions ces deux groupes de la façon que nous avons expliquée à la fin du paragraphe 5 et d'abord le groupe des transformations à coefficients entiers que subissent les périodes.

Il s'agit de rechercher les relations de la forme $\omega X = 0$, qui sont vraies pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour une substitution S donnée; d'après ce que nous venons de voir, les nombres X formeront un sous-système invariant à gauche, comprenant d'abord tous les p^2 ions de la première sorte et comprenant encore d'autres nombres complexes.

De plus, on peut supposer, vu la nature du groupe, que tous les nombres X sont entiers.

Convenons donc de dire qu'un ensemble de nombres complexes entiers forme un *sous-système entier semi-invariant à gauche* quand tout nombre du sous-système multiplié à gauche par un nombre *entier* quelconque du système total fait encore partie du sous-système. Alors les nombres X formeront un sous-système *entier* semi-invariant à gauche.

Il est clair que, si l'on considère un p^2 ion et tous ses conjugués, leur ensemble formera un sous-système invariant, et que les nombres entiers de ce sous-système formeront un *sous-système invariant entier*. Les sous-systèmes invariants entiers formés de cette façon avec les p^2 ions de la première sorte feront évidemment partie du sous-système des nombres X, mais ce sous-système comprend encore d'autres nombres complexes.

Ce sous-système des nombres X peut être décomposé en *sous-systèmes semi-invariants entiers premiers*, si j'appelle ainsi les sous-systèmes semi-invariants entiers qui n'en contiennent pas d'autre plus restreint.

Comment peut-on former les sous-systèmes semi-invariants entiers premiers? Considérons un sous-système semi-invariant premier *non entier;* soit Σ ce sous-système, il appartiendra à un certain p^2 ion Π et se composera de p nombres distincts (si p est l'ordre de Π).

Soient Σ', Σ'', ... les sous-systèmes *conjugués* de Σ (au sens arithmétique donné plus haut à ce mot). L'ensemble des systèmes Σ, Σ', Σ'', ... formera un nouveau sous-système semi-invariant qui (à l'inverse de ce qui arrive pour chacun des systèmes partiels Σ, Σ', ...) contiendra des nombres entiers. Les nombres entiers de ce système formeront un sous-système semi-invariant entier que j'appelle Σ_1.

Voici comment on peut former les nombres de ce sous-système. Soit X un nombre de Σ, dont les coefficients X_i seront les fonctions rationnelles de la quantité algébrique ζ envisagée plus haut; soient X', X'', ... les nombres conjugués de X, où ζ est remplacé par ζ', ζ'', ... Soit ensuite R une fonction rationnelle quelconque de ζ; soient R', R'', ... les fonctions correspondantes de ζ', ζ'', ... Le nombre complexe

$$(X) = XR + X'R' + X''R'' + \dots$$

sera rationnel et, en le multipliant par un entier ordinaire convenable, on obtiendra un nombre entier complexe. On obtiendra de la sorte tous les nombres du sous-système Σ_1.

Maintenant, ce sous-système entier est-il premier? Il me suffit, pour le décider, de chercher si, en multipliant à gauche un nombre entier *quelconque* du sous-système par un nombre complexe convenable, on peut retrouver un nombre entier *quelconque* du sous-système.

Nous pouvons toujours supposer que tous les p^2 ions conjugués de Π sont distincts.

Dans ce cas, tous les nombres X, X′, X″, ... appartiennent à des p^2 ions distincts. Soient alors Y et Z deux nombres appartenant au même sous-système que X; soient S et U deux fonctions rationnelles de ζ; soient Y′, Y″, ..., Z′, Z″, ..., S′, S″, ..., U′, U″, ... leurs conjugués. Les nombres Y et X′ appartenant à des p^2 ions différents, les produits tels que YX′ seront nuls.

Cela posé, considérons les nombres complexes

$$(Y) = YS + Y'S' + Y''S'' + \dots,$$
$$(Z) = ZU + Z'U' + Z''U'' + \dots.$$

On aura alors

$$(YX) = YXRS + Y'X'R'S' + Y''X''R''S'' + \dots.$$

Or, le sous-système semi-invariant dont fait partie X étant premier, on peut choisir Y de façon que YX ou YXRS soit égal à un nombre quelconque du sous-système; nous supposerons donc

$$YXRS = ZU,$$

d'où, en changeant ζ en ζ', ζ'', ...,

$$Y'X'R'S' = Z'U', \qquad Y''X''R''S'' = Z''U'', \qquad \dots,$$

et enfin

$$(Z) = (Y)(X).$$

Or, (Z) et (X) sont deux nombres *quelconques* du système Σ_1; on peut néanmoins trouver un nombre (Y) qui, multiplié par (X), reproduise (Z). Donc notre sous-système est premier. C. Q. F. D.

Ces considérations suffisent pour nous faire comprendre l'origine et la nature du groupe linéaire à coefficients entiers dont il s'agit.

Passons à l'autre groupe : quand on change z en $z\sigma_i$, les intégrales de première espèce $K(z)$ subissent une substitution linéaire; nous avons posé

$$K(z\sigma_i) = K(z)e_i, \qquad K(z)X = \sum X_i K(z)e_i.$$

L'étude du groupe en question revient à chercher les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$; nous avons vu que ces nombres forment un sous-système semi-invariant à droite; ce sous-système comprend d'abord tous les p^2 ions de première et de deuxième sorte, puis un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants premiers contenus dans les p^2 ions de la troisième sorte.

On s'étonnera peut-être que ce sous-système soit semi-invariant à droite, puisque nous avons vu à la fin du paragraphe 5 que les nombres complexes X

qui servent à la définition d'un groupe doivent former un sous-système semi-invariant à gauche.

Il est aisé de voir d'où vient la différence. Supposons qu'on ait posé

$$K(z\sigma_i) = (K)e_i, \qquad (K)Y = \sum Y_i(K)e_i.$$

Nous nous serions retrouvés dans les mêmes conditions qu'à la fin du paragraphe 5, et les nombres Y auraient dû former un sous-système semi-invariant à gauche. C'est, en effet, ce qui arrive. Nous avons

$$(K)Y = \sum Y_i K(z\sigma_i), \qquad K(z)X = \sum X_i K(z\sigma_i^{-1}).$$

On aura donc $(K)Y = K(z)X$ si

$$Y = \sum X_i e_i^{-1}.$$

Soit maintenant

$$X' = Xe_k = \sum X'_i e_i, \qquad Y' = \sum X'_i e_i^{-1},$$

il est aisé de voir que $Y' = e_k Y$, ce qui prouve que si les X forment un sous-système semi-invariant à droite, les Y formeront un sous-système semi-invariant à gauche.

A la fin du paragraphe 3, nous avons été amenés à considérer certains nombres que nous avons appelés b_i et avec lesquels nous avons formé un déterminant de groupe. Ces nombres devaient être choisis de telle façon que ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs jusqu'à un certain ordre. Nous avons distingué ensuite deux cas suivant que les sommes $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1})$ se réduisaient ou non à des constantes quelle que soit l'intégrale K choisie.

Je dis maintenant que les deux cas peuvent se présenter. Et, en effet, pour que notre déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des premiers ordres, il suffit, par exemple, que le nombre $\sum b_i e_i$ appartienne à un p^2 ion. Alors le premier cas se présentera si ce p^2 ion est de la première ou de la deuxième sorte, et le second cas si le p^2 ion est de la troisième sorte.

VII. — Application à l'exemple du paragraphe IV.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4, où le groupe H se composait de 168 substitutions. Ces 168 substitutions se répartissent en six classes (en grou-

pant dans la même classe la substitution σ_i et ses transformées $\sigma_\lambda^{-1}\sigma_i\sigma_\lambda$; je désignerai ces six classes par les lettres E, P, Q, R, S, S_2 :

La classe	E	comprendra	1	substitution de période	1	(substitution identique σ_0).
»	P	»	24	»	7	
»	Q	»	24	»	7	
»	R	»	56	»	3	
»	S	»	42	»	4	
»	S_2	»	21	»	2	
			168			

Désignons alors par les lettres

$$E = e_1, \; P, \; Q, \; R, \; S, \; S_2$$

les nombres complexes obtenus en faisant la somme des unités complexes correspondant aux diverses substitutions de la classe désignée par la même lettre. Ces six nombres seront commutables.

D'après M. Frobenius [*loco citato* (*Die Gruppencharactere*), *in fine*], le système des nombres complexes se décompose en six p^2 ions; chacun de ces p^2 ions contient un nombre commutable et un seul, et ce nombre suffit pour le caractériser, puisque tous les autres nombres du p^2 ion s'obtiennent en le multipliant par un nombre complexe quelconque. Nous avons donc six nombres commutables remarquables que j'appellerai

$$\alpha_1 = E + P + Q + R + S + S_2,$$
$$\alpha_2 = 7E + R - S - S_2,$$
$$\alpha_3 = 3E + TP + T'Q + S - S_2,$$
$$\alpha_4 = 3E + T'P + TQ + S - S_2,$$
$$\alpha_5 = 8E + P + Q - R,$$
$$\alpha_6 = 6E - P - Q + 2S_2.$$

On a, comme au paragraphe 4,

$$2T = -1 + \sqrt{-7}, \qquad 2T' = -1 - \sqrt{-7}.$$

Je désignerai les six p^2 ions par les mêmes lettres que les nombres commutables correspondants et je trouverai que :

$$p = 1, \quad p^2 = 1 \quad \text{pour } \alpha_1;$$
$$p = 7, \quad p^2 = 49 \quad \text{pour } \alpha_2;$$
$$p = 3, \quad p^2 = 9 \quad \text{pour } \alpha_3;$$
$$p = 3, \quad p^2 = 9 \quad \text{pour } \alpha_4;$$
$$p = 8, \quad p^2 = 64 \quad \text{pour } \alpha_5;$$
$$p = 6, \quad p^2 = 36 \quad \text{pour } \alpha_6.$$

$$\overline{168}$$

On voit que les nombres commutables α_1, α_2, α_5, α_6 sont rationnels, que les nombres α_3 et α_4 contiennent l'irrationalité $\sqrt{-7}$ et sont conjugués. Il en est donc de même des p^2 ions correspondants.

Nous savons qu'il y a trois intégrales abéliennes de première espèce et six intégrales de première et de deuxième espèces distinctes (c'est-à-dire telles qu'aucune de leurs combinaisons linéaires n'est algébrique).

Je vois d'abord que le p^2 ion α_1 est de première sorte, car il ne contient qu'un nombre α_1 qui est la somme de toutes les unités complexes, de sorte qu'on aura

$$\alpha_1 = \sum e_i, \qquad \mathrm{P}(z, a)\alpha_1 = \mathrm{P}(z\sigma_i^{-1}, a);$$

si donc

$$\mathrm{P}(z, a) = \int \mathrm{Q}(x, y)\,dx,$$

on aura, en appelant $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les diverses déterminations de y,

$$\mathrm{P}(z, a) = \sum \int \mathrm{Q}(x, y_i)\,dx = \int \mathrm{R}(x)\,dx,$$

R étant rationnel en x, de sorte que $\mathrm{P}(z, a)\alpha_1$ sera algébrique.

C. Q. F. D.

Je dis que les p^2 ions α_2, α_5, α_6 ne peuvent être de la troisième sorte, sans quoi le nombre des intégrales de première espèce serait, pour α_2, un multiple de 7, pour α_5 un multiple de 8, pour α_6 un multiple de 6, ce qui est impossible, puisque le nombre total des intégrales de première espèce n'est que de trois.

Comme il faut qu'il y ait au moins un p^2 ion de la troisième sorte, ce ne pourra être que α_3 ou α_4; ils ne pourront l'être tous les deux, sans quoi il y aurait au moins trois intégrales appartenant à α_3, au moins trois à α_4, en tout au moins six et il n'y en a que trois.

L'un des deux p^2 ions est donc de troisième sorte; l'autre ne peut être de la première sorte, car si un p^2 ion est de la première sorte, il en est de même de tous ses conjugués; il sera donc de la deuxième sorte.

Le nombre des intégrales de première et de deuxième espèces qui appartiennent à α_3 est un multiple de 3; de même pour celles qui appartiennent à α_4. Le nombre de ces intégrales qui appartiennent à α_2 et à α_4 est donc au moins six et, comme le nombre total est six, il faut conclure que tous les autres p^2 ions sont de la première sorte.

En résumé, sur nos six p^2 ions, quatre sont de la première sorte, un de la deuxième et un de la troisième.

VIII. — Remarques diverses.

Étant donné un groupe fini H, on peut, *d'une infinité de manières*, former les groupes fuchsiens G et G'. On engendrerait donc d'une infinité de manières les systèmes correspondants de fonctions fuchsiennes ou d'intégrales abéliennes.

La comparaison de ces différentes manières et de ces différents systèmes serait sans doute très intéressante.

Je me bornerai à la remarque suivante : on peut se demander à quoi correspondent les groupes linéaires à coefficients entiers que nous avons rencontrés; il suffit de se reporter à leur origine expliquée au paragraphe 3.

Soient G un groupe auquel H soit mériédriquement isomorphe, et G' le sous-groupe invariant de G auquel correspond dans H la substitution identique; soient s_i une substitution de H et σ_i la substitution correspondante de G.

Supposons maintenant que G' dérive de q substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_q,$$

et soit S une combinaison quelconque de ces substitutions fondamentales. Alors

$$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$$

sera aussi une combinaison de ces substitutions fondamentales.

Soit maintenant G'' un groupe mériédriquement isomorphe à G', défini comme il suit; il admettra toutes les relations de structure de G', mais de plus toutes ses substitutions seront permutables. Si donc T est la substitution de G'' qui correspond à S et T' celle qui correspond à S', la substitution de G'' qui correspondra à SS' sera identique à celle qui correspondra à S'S, de sorte qu'on aura

$$TT' = T'T.$$

Il pourrait arriver que le groupe G'' ainsi défini se réduisît à la substitution identique, mais cela n'arrivera pas si G' est un groupe fuchsien de genre > o.

Soient T_1, T_2, ..., T_q les substitutions de G'' qui correspondent à S_1, S_2, ..., S_q; à S correspondra dans G'' une substitution

$$T = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_q^{\alpha_q},$$

où α_1 est la somme des exposants de S_1 dans la combinaison S, etc.; à

$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma$ correspondra

$$T' = T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \ldots T_q^{\beta_q},$$

où β_1 est la somme des exposants de S_1 dans la combinaison S', etc.

Il est aisé de voir que les β sont des combinaisons linéaires des α. *A chaque substitution s de H correspondra donc une transformation linéaire à coefficients entiers dont l'ensemble formera un groupe isomorphe à H.* Voilà la signification de ces groupes linéaires à coefficients entiers.

Faisons en passant une autre remarque; *tout groupe fini contenu dans le groupe linéaire conserve une forme quadratique définie positive, ou bien une forme à indéterminées conjuguées.*

Supposons en effet d'abord que le groupe soit réel, c'est-à-dire que toutes les substitutions du groupe aient leurs coefficients réels. Soient X_1 une forme linéaire quelconque de nos n variables, $X_2, X_3, \ldots, X_h$ ses transformées; alors le groupe conservera la forme quadratique définie positive

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2,$$

qui ne peut être identiquement nulle.

Supposons que le groupe ne soit pas réel; soient G ce groupe, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nos variables indépendantes; soit alors G_0 un groupe imaginaire conjugué du précédent portant sur les variables $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ imaginaires conjuguées des x.

Soit alors X_1 une forme linéaire quelconque des x; soient $X_2, X_3, \ldots, X_h$ ses transformées par le groupe G; soit X_1^0 une forme linéaire des x_0, imaginaire conjuguée de X_1; soient X_2^0, X_h^0 ses transformées par les substitutions correspondantes de G_0. Alors la forme à indéterminées conjuguées

$$F = X_1 X_1^0 + X_2 X_2^0 + \ldots + X_h X_h^0$$

sera invariante.

Soient y_i et z_i les parties réelle et imaginaire de x_i; alors G pourra être regardé comme un groupe réel portant sur les $2n$ variables y et z, et F sera une forme quadratique définie de ces $2n$ variables, de sorte qu'on est ramené au cas précédent.

Cette remarque bien simple pourrait peut-être simplifier l'application du théorème de M. Jordan; elle ramène en effet la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire à l'étude géométrique de la division régulière d'une sphère à plus de trois dimensions.

GROUPES CONTINUS

ANALYSE DES TRAVAUX DE H. POINCARÉ SUR LES GROUPES CONTINUS FAITE PAR LUI-MÊME.

Acta mathematica, t. 39, p. 90-92 (1913).

On vient de voir comment mes recherches sur l'algèbre m'avaient amené à m'occuper des groupes continus. C'est ainsi que j'avais montré (¹) le lien qui unit ces groupes aux nombres complexes : j'avais énoncé à ce sujet un théorème dont, détourné par d'autres travaux, je n'ai jamais publié la démonstration, mais qui a été depuis démontré par M. Study.

Je me suis servi également des groupes continus dans un travail relatif aux géométries non euclidiennes (²).

Mais ce n'est que beaucoup plus récemment que j'ai abordé la théorie générale de ces groupes.

Lie avait démontré au sujet de ces groupes trois théorèmes fondamentaux. D'après le troisième de ces théorèmes, il existe toujours un groupe qui admet des équations de structure données pourvu que ces équations satisfassent aux conditions jacobiennes.

Lie a donné de ce théorème deux démonstrations. La première s'applique seulement aux groupes qui ne contiennent pas de substitutions permutables à toutes les autres substitutions. Elle ne laisse rien à désirer au point de vue de la simplicité. La seconde s'applique à tous les groupes; elle est beaucoup plus indirecte et plus compliquée.

Je me suis proposé de donner de ce troisième théorème une démonstration

(¹) *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, Paris, t. 99, 1884, p. 740-742.
(²) *Bulletin de la Société math. de France*, t. 15, 1887, p. 203-216.

directe et simple, applicable à tous les cas. J'y suis parvenu (178, 274) grâce à l'emploi d'une notation symbolique très abrégée.

Je dois dire quelques mots sur le caractère de cette démonstration. Étant données les équations de structure, c'est-à-dire les règles de la composition des substitutions infinitésimales, j'ai cherché à en déduire les règles de la composition des substitutions finies. Or ces règles s'expriment par des séries infinies; j'ai reconnu que ces séries pouvaient se sommer par des formules où n'entrent pas d'autres transcendantes que des exponentielles.

Je me plaçais ainsi au point de vue formel, en introduisant des formules qui, faisant complètement abstraction de la « matière » du groupe, sont également applicables à tous les groupes isomorphes. Mais ces formules elles-mêmes nous font connaître les transformations que subissent les paramètres qui définissent une substitution du groupe lorsque l'on compose cette substitution avec une autre substitution du groupe. Ces transformations forment un groupe isomorphe à celui que l'on proposait de former; ce groupe porte le nom de groupe paramétrique.

Nos formules nous permettent donc de former effectivement ce groupe paramétrique. Ainsi non seulement elles démontrent l'existence d'un groupe de structure donnée, mais elles donnent le moyen de le former effectivement. Lie avait démontré que la formation d'un pareil groupe pouvait se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. J'ai fait voir que non seulement on pouvait sans intégration former les substitutions infinitésimales du groupe, mais que dans le cas le plus défavorable, la formation des substitutions finies pouvait se ramener à une simple quadrature.

Dans le cas particulier auquel s'appliquait la première démonstration de Lie, les formules auxquelles on parvient sont assez simples, moins simples toutefois que celles de Lie. En tout cas, elles sont différentes et l'on ne voit pas immédiatement comment on peut passer des unes aux autres. La comparaison des deux sortes de formules n'en est que plus instructive. Elle nous fait retrouver un certain nombre de théorèmes de Killing. L'étude des formules obtenues nous fait d'ailleurs, même dans le cas général, retomber sur ces mêmes théorèmes.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX GROUPES CONTINUS.

178. *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. 128, 1899, p. 1065-1069.
274. *Cambridge Philosophical Transactions*, t. 18, 1900, p. 220-255.

SUR

LES GROUPES CONTINUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 128, p. 1065-1069 (1er mai 1899).

Je désirerais faire quelques observations au sujet de cette belle théorie des groupes continus, dont la Science est redevable au génie de notre regretté correspondant M. Lie. Je voudrais, en particulier, faire voir que l'on peut démontrer l'existence d'un groupe de structure donnée par un procédé un peu différent de celui qu'a employé ce grand géomètre.

Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soient $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$, n fonctions de ces mêmes variables. Je poserai, suivant l'usage,

$$X(f) = X^{(1)}\frac{df}{dx_1} + X^{(2)}\frac{df}{dx_2} + \ldots + X^{(n)}\frac{df}{dx_n}.$$

On voit que $YX(f) = Y[X(f)]$ n'est pas égal, en général, à $XY(f)$: je supprimerai généralement l'indication (f) et j'écrirai X et YX au lieu de $X(f)$ et $YX(f)$. Un opérateur quelconque, combinaison des opérateurs X, Y, Z, se présentera sous la forme d'un *polynome symbolique* en X, Y, Z. Seulement, il convient d'observer que dans un produit symbolique on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des facteurs.

Ainsi XY n'est pas égal à YX ; et $(X + Y)^2$ n'est égal ni à

$$X^2 + 2XY + Y^2$$

ni à

$$X^2 + 2YX + Y^2,$$

mais bien à

$$X^2 + XY + YX + Y^2.$$

Un polynome symbolique sera dit *normal* si tous les termes qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs ont même coefficient; en général, un

polynome symbolique ne peut pas être mis sous la forme d'une somme de puissances de polynomes linéaires; les polynomes normaux le peuvent seuls.

Je poserai, suivant l'usage,

$$XY - YX = [X, Y]$$

et je supposerai que nos opérateurs sont liés par certaines relations (que j'appellerai *relations de structure* parce qu'elles définissent la structure du groupe) et qui seront de la forme

$$[X, Y] = U,$$

U étant un polynome linéaire par rapport à nos opérateurs. Les coefficients de ces polynomes linéaires U ne seront pas quelconques; mais ils devront être choisis de façon à satisfaire aux *identités associatives*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Les relations de structure permettent de transformer les polynomes symboliques et l'on commence par démontrer que si les identités associatives ont lieu, on peut toujours transformer d'une manière, et *d'une seule*, un polynome symbolique quelconque en un polynome normal.

Cela posé, considérons n opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, satisfaisant à un système de relations de structure et d'identités associatives; envisageons les substitutions infinitésimales qui changent f en $f + \varepsilon_k X_k(f)$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont n constantes infiniment petites, et les puissances de ces substitutions. On sait qu'une puissance quelconque de la substitution $1 + \varepsilon_k X_k$ est égale à

$$1 + \frac{tX_k}{1!} + \frac{t^2X_k^2}{2!} + \frac{t^3X_k^3}{3!} + \ldots,$$

où t est une constante et peut être représentée symboliquement par e^{tX_k}.

Considérons plus généralement une combinaison linéaire quelconque de ces substitutions infinitésimales

$$1 + \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \ldots + \varepsilon_n X_n;$$

une puissance quelconque de cette combinaison pourra s'écrire

$$1 + \frac{t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_nX_n}{1} + \ldots + \frac{(t_1X_1 + \ldots + t_nX_n)^p}{p!} + \ldots;$$

les t sont des constantes, et se représentera symboliquement par

$$e^{t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_nX_n}.$$

Soient maintenant deux combinaisons linéaires

$$T = t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n, \qquad V = v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n.$$

Considérons l'opérateur

$$e^T e^V = e^T [e^V(f)].$$

Cet opérateur se présentera sous la forme d'une série dont tous les termes sont des polynomes symboliques en $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Grâce aux relations de structure, ces polynomes peuvent être transformés en polynomes normaux.

Je dis qu'une fois cette transformation faite, notre opérateur se présentera sous la forme d'une série symbolique

$$e^W = \sum \frac{W^p}{p!},$$

où

$$W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_n X_n.$$

Ce théorème serait évident si nous savions d'avance que le groupe existe; encore faudrait-il chercher à déterminer les w en fonction des t et des v, ou ce qu'on pourrait appeler les règles de multiplication des substitutions du groupe.

Mais nous voulons précisément démontrer l'existence du groupe dont nous ne connaissons que la structure.

Supposons d'abord que V soit infiniment petit, et soit $W = V + U_0$,

$$U_0 = u_1 X_1 + \ldots + u_n X_n$$

étant un opérateur infiniment petit. Posons maintenant

$$[T, U_0] = U_1, \quad [T, U_1] = U_2, \quad [T, U_2] = U_3, \quad \ldots;$$

on trouvera aisément, en s'aidant des relations de structure et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$V = \sum \frac{(-1)^q U_q}{q!}.$$

Cette équation nous donne les v en fonctions des u et des t, linéaires par rapport aux u, et l'on aura

$$v_i = \sum u_k \varphi_{i,k}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Les $\varphi_{i,k}$ sont des fonctions entières des t, d'une forme toute particulière; car elles s'expriment rationnellement en fonctions : 1° des t; 2° des racines $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ d'une équation de degré n en θ, dont le premier membre est un

polynome entier par rapport à θ et aux t; 3° et enfin des exponentielles e^{θ_1}, e^{θ_2}, ..., e^{θ_n}.

Cela posé, je vais démontrer, en me bornant à indiquer la marche générale et le principe de la démonstration, que $e^{T}e^{hV}$ est, quel que soit le coefficient h, de la forme e^{W}.

En effet, d'après ce que nous venons de voir, le théorème est vrai pour h infiniment petit; je dis maintenant que, s'il est vrai pour $h = h_0$, il sera vrai aussi pour $h = h_0 + \delta h$; car si l'on a

$$e^{T}e^{h_0 V} = e^{W_0},$$

on aura aussi, puisque δh est infiniment petit,

$$(1) \qquad e^{W_0}e^{\delta h V} = e^{W_0 + \delta W},$$

ou, à cause de l'associativité,

$$e^{T}e^{(h_0 + \delta h)V} = e^{W_0 + \delta W}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous voyons en même temps, par l'équation (1), que les w, considérés comme fonctions de h, satisfont aux équations différentielles

$$(2) \qquad v_i\, dh = \sum dw_k\, \varphi_{i,k}(w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

On achèvera de déterminer les w en remarquant que w_k doit se réduire à t_k pour $h = 0$. Les règles de multiplication des substitutions du groupe sont donc établies, sans connaître autre chose que la structure de ce groupe.

L'existence du groupe est en même temps démontrée, puisque nous avons formé le groupe paramétrique.

La considération du groupe adjoint permettrait d'intégrer les équations (2) en termes finis ou du moins par quadrature.

SUR

LES GROUPES CONTINUS

Cambridge Philosophical Transactions, vol. 18, p. 220-255 (1899).

I. — Introduction.

La théorie des groupes continus, ce titre immortel de gloire du regretté Sophus Lie, repose sur trois théorèmes fondamentaux.

Le *premier théorème* de Lie nous apprend comment dans tout groupe continu il y a des substitutions infinitésimales et comment ce groupe peut être formé à l'aide des opérateurs

$$X(f) = \Sigma(X_i) \frac{df}{dx_i}.$$

Considérons r opérateurs de cette forme

(1) $$X_1(f), \quad X_2(f), \quad \ldots, \quad X_r(f);$$

et convenons de poser

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k).$$

D'après le *second théorème* de Lie, si les symboles $(X_i X_k)$ sont liés aux opérateurs X_i par des relations linéaires de la forme

(2) $$(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s,$$

où les c sont des constantes, les r opérateurs (1) donneront naissance à un groupe.

Les relations linéaires (2) pourront s'appeler *relations de structure* puisqu'elles définissent la « structure » du groupe qui dépend uniquement des constantes c.

C'est le *troisième théorème* de Lie qui attirera surtout notre attention. Quelles sont les conditions pour qu'on puisse former un groupe de structure

donnée, c'est-à-dire trouver r opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ satisfaisant à des relations de la forme (2) dont les coefficients c sont donnés?

On voit tout de suite que les coefficients c ne peuvent être choisis arbitrairement. On doit d'abord avoir

$$c_{iks} = -c_{kis}. \tag{3}$$

Ensuite, d'après la définition même du symbole $(X_i X_k)$, on a identiquement

$$((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0, \tag{4}$$

d'où résultent entre les c certaines relations connues sous le nom d'*identités de Jacobi* [1].

Une condition nécessaire pour que l'on puisse former un groupe de structure donnée, c'est donc que les coefficients c satisfassent à ces identités de Jacobi auxquelles il convient d'adjoindre les relations (3).

Le troisième théorème de Lie nous enseigne que cette condition est suffisante.

Pour la démonstration de ce théorème, nous devons distinguer deux familles de groupes.

Les *groupes de la première famille* sont ceux qui ne contiennent aucune substitution permutable à toutes les substitutions du groupe.

Les *groupes de la deuxième famille* sont ceux qui contiennent des substitutions permutables à toutes les substitutions du groupe.

En ce qui concerne les groupes de la première famille, la démonstration de Lie, fondée sur la considération du groupe adjoint, ne laisse rien à désirer par sa simplicité.

En ce qui concerne les groupes de la deuxième famille, Lie a donné une démonstration entièrement différente, beaucoup moins simple, mais qui permet cependant de former les opérateurs $X_i(f)$ par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Dans une Note récemment insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, j'ai donné une démonstration nouvelle du troisième théorème de Lie.

Les résultats contenus dans cette Note étaient moins nouveaux que je ne le croyais quand je l'ai publiée.

D'une part, en effet, Schur avait, dans les *Berichte der k. sächsischen*

---

[1] L'identité (4) est l'identité de Jacobi; les relations entre les c qui en résultent sont dues S. Lie. J. D.

Gesellschaft der Wissenschaften 1891 et dans le tome 41 des *Mathematische Annalen*, donné du théorème en question une démonstration entièrement différente de celle de Lie.

Cette démonstration présente la plus grande analogie avec celle que je propose; mais elle n'a pour ainsi dire pas été poussée jusqu'au bout. Comme le fait remarquer Engel, le résultat dépend de séries que Schur forme et dont il démontre la convergence; au contraire Lie ramène le problème à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Je suis arrivé comme Lie lui-même à des équations différentielles ordinaires qui même sont susceptibles d'être complètement intégrées.

D'autre part, Campbell a donné sous une autre forme quelques-unes des formules auxiliaires qui m'ont servi de point de départ (*Proceedings of the London Mathematical Society*, tome 28, page 381 et tome 29, page 612).

Il m'a semblé néanmoins que cette Note contenait encore assez de résultats nouveaux pour qu'il y eût quelque intérêt à la développer.

Je ramène en effet la formation d'un groupe, de structure donnée, à l'intégration d'équations différentielles simples, intégration qui peut se faire en termes finis.

Ces équations sont moins simples que celles que Lie a formées pour les groupes de la première famille; mais même dans ce cas, il peut y avoir intérêt à les connaître, car elles sont d'une forme différente et ne s'en déduisent pas immédiatement.

De plus elles sont applicables aux groupes de la deuxième famille et dans ce cas elles nous fournissent une solution du problème plus simple que celle de Lie.

II. — Définition des opérateurs.

Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit X un opérateur qui change f en

$$(X_1)\frac{df}{dx_1} + (X_2)\frac{df}{dx_2} + \ldots + (X_n)\frac{df}{dx_n},$$

où les (X_i) sont n fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte que

$$X(f) = \Sigma (X_i)\frac{df}{dx_i}.$$

Soient Y, Z, etc. d'autres opérateurs analogues de telle façon que

$$Y(f) = \Sigma(Y_i)\frac{df}{dx_i}, \qquad Z(f) = \Sigma(Z_i)\frac{df}{dx_i}, \qquad \ldots,$$

les (Y_i), les (Z_i), ... étant d'autres fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans ces conditions

$$X^2(f) = X[X(f)], \qquad XY(f) = X[Y(f)],$$
$$X^2Y(f) = X[XY(f)], \qquad XYZ(f) = X[YZ(f)], \qquad \ldots$$

seront des combinaisons linéaires des dérivées partielles des divers ordres de la fonction f, multipliées par des fonctions données des x_i.

Ainsi se trouveront définis de nouveaux opérateurs X^2, XY, X^2Y, XYZ, ..., qui sont des combinaisons des opérateurs simples X, Y, Z, ... On voit que ces produits symboliques obéissent à la loi associative, mais n'obéissent pas, en général, à la loi commutative, de sorte que XY ne doit pas être confondu avec YX.

Ces opérateurs sont ainsi symboliquement représentés par des monomes; mais on peut définir des opérateurs qui seront symboliquement représentés par des polynomes tels que

$$1 + aX, \quad aX + bY, \qquad aX^2 + 2bXY + cY^2, \qquad \ldots,$$

en convenant d'écrire par exemple

$$(1 + aX)(f) = f + aX(f); \qquad (aX + bY)(f) = aX(f) + bY(f), \qquad \ldots.$$

On voit que les polynomes opérateurs ainsi définis obéissent à la fois à la loi associative et à la loi distributive, de sorte qu'on aura

$$(aX + bY)(cX + dY) = acX^2 + adXY + bcYX + bdY^2,$$

et en particulier

$$(X + Y)^2 = X^2 + XY + YX + Y^2,$$

expression qu'il ne faut pas confondre avec $X^2 + 2XY + Y^2$.

On peut aussi introduire des opérateurs qui seront représentés symboliquement par des séries infinies. Je citerai par exemple l'opérateur

$$f + \alpha(X + Y)(f) + \alpha^2(X + Y)^2(f) + \alpha^3(X + Y)^3(f) + \ldots$$

que je représenterai symboliquement par

$$\left[\frac{1}{1 - \alpha(X + Y)}\right](f),$$

ou plus simplement par

$$\frac{1}{1 - \alpha(X + Y)};$$

et l'opérateur

$$f+\frac{\alpha}{1!}X(f)+\frac{\alpha^2}{2!}X^2(f)+\frac{\alpha^3}{3!}X^3(f)+\ldots,$$

que je représenterai par $e^{\alpha X}(f)$ ou simplement par $e^{\alpha X}$.

On peut se demander si l'emploi de ces opérateurs représentés par des séries est légitime et si la convergence des opérations est assurée.

Il y a des cas où cette convergence est certaine. C'est ainsi que Lie a démontré que

$$e^{tX}(f)=f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

où les x'_i sont définis par les équations différentielles

$$\frac{dx'_i}{dt}=X_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

et par les conditions initiales

$$x'_i=x_i \quad \text{pour } t=0.$$

Les opérateurs définis par des séries symboliques obéissent évidemment aux lois distributive et associative, ce qui permet par exemple d'écrire des égalités telles que celle-ci :

$$(e^X e^{aX} e^Z)(e^{-Z} e^{bX} e^Y)=e^X e^{(a+b)X} e^Y.$$

Il y a aussi un cas où ils obéissent à la loi commutative. Soient

$$\Phi(X)=\Sigma a_n X^n, \qquad \Psi(X)=\Sigma b_n X^n$$

deux séries symboliques dépendant d'un seul opérateur élémentaire X.

On a alors

$$\Phi(X)[\Psi(X)(f)]=\Psi(X)[\Phi(X)(f)].$$

Les deux produits symboliques $\Phi(X)\Psi(X)$ et $\Psi(X)\Phi(X)$ sont en effet des sommes de monomes dont tous les facteurs sont égaux à X. Si tous les facteurs sont identiques, il est clair que l'ordre de ces facteurs est indifférent et que les opérations sont commutatives.

Mais cela ne sera plus vrai si les séries symboliques dépendent de plusieurs opérateurs élémentaires différents; il ne faudrait pas, par exemple, confondre

$$e^X e^Y=\Sigma\frac{X^m Y^n}{m!\,n!}$$

avec

$$e^Y e^X=\Sigma\frac{Y^n X^m}{m!\,n!},$$

ni avec

$$e^{X+Y}=\Sigma\frac{(X+Y)^p}{p!}.$$

III. — Calcul des polynomes symboliques.

Soient X, Y, Z, T, U, ..., n opérateurs élémentaires. Par leurs combinaisons on pourra former d'autres opérateurs représentés symboliquement par des monomes ou des polynomes.

Deux monomes seront dits *équipollents* lorsqu'ils ne différeront que par l'ordre de leurs facteurs; il en sera de même de deux polynomes qui seront des sommes de monomes équipollents chacun à chacun.

Nous appellerons *polynome régulier* tout polynome qui peut être regardé comme une somme de puissances de la forme

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots)^p.$$

Il résulte de cette définition :

1° Que si un polynome régulier contient parmi ses termes un certain monome, tous les monomes équipollents figureront dans ce polynome avec le même coefficient. Cette condition est suffisante pour que le polynome soit régulier.

2° Que parmi les polynomes équipollents à un polynome donné il y a un polynome régulier et un seul.

Le polynome

$$XY - YX$$

jouit de la même propriété que les opérateurs élémentaires, c'est-à-dire que

$$(XY - YX)(f)$$

est comme $X(f)$, $Y(f)$, etc. une combinaison linéaire des dérivées *du premier ordre seulement* de la fonction f multipliées par des fonctions données des x_i.

Nous supposerons que les opérateurs élémentaires et leurs combinaisons linéaires sont seuls à jouir de cette propriété. (Si cela n'avait pas lieu, nous introduirions parmi les opérateurs élémentaires tous ceux qui en jouiraient.) Nous devrons donc avoir des relations de la forme

$$XY - YX = (XY), \tag{1}$$

où (XY) est une combinaison linéaire des opérateurs élémentaires; nous reconnaissons là les relations de Lie, dites relations de structure

$$X_i X_k - X_k X_i = \Sigma c_{iks} X_s.$$

Cela posé, deux polynomes seront *équivalents* lorsqu'on pourra les réduire l'un à l'autre en tenant compte des relations (1).

Par exemple le produit

$$\text{(2)} \qquad P[XY - YX - (XY)]Q$$

(où le premier et le dernier facteurs P et Q sont deux monomes quelconques) est équivalent à zéro; et il en est de même des produits analogues et de leurs combinaisons linéaires. Les produits de la forme (2) sont ce que j'appellerai des *produits trinomes*.

La différence de deux monomes qui ne diffèrent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs est équivalente à un polynome de degré moindre.

Soient en effet X et Y ces deux facteurs consécutifs. Nos deux monomes s'écriront

$$PXYQ, \quad PYXQ,$$

P et Q étant deux monomes quelconques, et leur différence

$$P[XY - YX]Q$$

sera équivalente à

$$P(XY)Q,$$

dont le degré est d'une unité plus petit, puisque (XY) est du premier degré, XY et YX du deuxième degré.

Soient maintenant M et M′ deux monomes équipollents quelconques, c'est-à-dire ne différant que par l'ordre des termes. On pourra trouver une suite de monomes

$$M, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_p, \quad M',$$

dont le premier et le dernier sont les deux monomes donnés et qui seront tels que chacun d'eux ne diffère du précédent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs. La différence $M - M'$, qui est la somme des différences $M - M_1$, $M_1 - M_2$, ..., $M_p - M'$, sera donc encore équivalente à un polynome de degré moindre.

Plus généralement, la différence de deux polynomes équipollents est équivalente à un polynome de degré moindre.

Je dis maintenant qu'*un polynome quelconque est toujours équivalent à un polynome régulier*.

Soit en effet P_n un polynome quelconque de degré n; il sera équipollent à un polynome régulier P'_n; on aura alors l'équivalence

$$P_n = P'_n + P_{n-1}.$$

où P_{n-1} est un polynome de degré $n-1$ qui sera à son tour équipollent à un polynome régulier P'_{n-1}, d'où l'équivalence

$$P_{n-1} = P'_{n-1} + P_{n-2},$$

et ainsi de suite; on finira par arriver à un polynome de degré zéro, de sorte que nous pouvons écrire l'équivalence

$$P_n = P'_n + P'_{n-1} + P'_{n-2} + \ldots,$$

dont le second membre est un polynome régulier.

On a donc un moyen de réduire un polynome quelconque à un polynome régulier en se servant des relations (1). Il reste à rechercher si cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière.

Le problème peut encore se présenter sous la forme suivante : *un polynome régulier peut-il être équivalent à zéro?* Ou bien encore peut-on trouver une somme de *produits trinomes* de la forme

$$(2) \qquad P[XY - YX - (XY)]Q,$$

qui soit un polynome régulier non identiquement nul? Toutes les sommes de pareils produits sont en effet équivalentes à zéro.

Le degré d'un produit trinome sera égal à 2 plus la somme des degrés des polynomes P et Q. Si je considère ensuite une somme S de produits (2), ce que j'appellerai le degré de cette somme S, ce sera le plus élevé des degrés des produits qui y figurent, quand même les termes du degré le plus élevé de ces différents produits se détruiraient mutuellement.

Le produit trinome (2) peut être considéré comme la somme de deux produits, le *produit binome*

$$(2\,bis) \qquad P[XY - YX]Q,$$

où je distinguerai le *monome positif* PXYQ et le *monome négatif* $-$PYXQ; et le produit

$$-P(XY)Q,$$

que j'appellerai le *produit complémentaire*.

Soit donc S une somme quelconque de produits trinomes de degré p ou de degré inférieur; je pourrai écrire

$$S = S_p + T_p + S_{p-1} + T_{p-1} + \ldots + S_2 + T_2,$$

où S_h est une somme de produits binomes de degré h

$$(2\,ter) \qquad P[XY - YX]Q,$$

tandis que $-T_k$ est la somme des produits complémentaires correspondants

$$-P(XY)Q.$$

Il s'agit de savoir si la somme S peut être un polynome régulier sans être identiquement nulle. J'observe d'abord que si S est un polynome régulier, il doit en être de même de S_p; car S_p représente l'ensemble des termes de degré p dans S; tandis que $(S_{p-1} - T_p)$, $(S_{p-2} - T_{p-1})$, ..., $(S_2 - T_3)$, $-T_2$ représentent respectivement l'ensemble des termes de degré $p-1$, $p-2$, ..., 2, 1.

On voit immédiatement que S_p est équipollent à zéro; comme zéro est un polynome régulier, et que deux polynomes réguliers ne peuvent être équipollents sans être identiques, il faut que S_p soit identiquement nul.

Soit en particulier $p = 3$,

$$S_3 = \Sigma[XY - YX]Z - \Sigma Z[XY - YX],$$

le signe Σ signifie que l'on fait la somme du terme qui est explicitement exprimé sous ce signe et des deux termes qu'on en peut deduire en permutant circulairement les trois lettres X, Y, Z.

On aura

$$T_3 = \Sigma(XY)Z - \Sigma Z(XY),$$

puis

$$S_2 = \Sigma[(XY)Z - Z(XY)],$$

$$T_2 = \Sigma[(XY)Z],$$

$$S = S_3 - T_3 + S_2 - T_2 = \Sigma[XY - YX - (XY)]Z - \Sigma Z[XY - YX - (XY)]$$
$$+ \Sigma[(XY)Z - Z(XY) - ((XY)Z)].$$

Il est aisé de vérifier que S_3 et $S_2 - T_3$ sont identiquement nuls, de sorte que S se réduit à $-T_2$.

Or

$$T_2 = [(XY)Z] + [(YZ)X] + [(ZX)Y]$$

est un polynome de premier degré, car $[(XY)Z]$ comme (XY) lui-même est un polynome du premier degré.

Or, dans un polynome du premier degré, chaque terme ne contenant qu'un seul facteur, on n'a pas à se préoccuper de l'ordre des facteurs. Tout polynome du premier degré est donc un polynome régulier. Si donc le polynome T_2 n'est pas identiquement nul, la somme S sera égale à un polynome régulier qui ne sera pas identiquement nul.

Donc, pour qu'un polynome puisse être réduit d'une seule manière à un polynome régulier, il faut qu'on ait les identités suivantes :

$$(3) \qquad [(XY)Z] + [(YZ)X] + [(ZX)Y] = 0.$$

On reconnaît là les *identités de Jacobi* qui jouent un si grand rôle dans la théorie de Lie.

[Si d'ailleurs ces identités n'avaient pas lieu, les opérateurs élémentaires seraient liés par les équations (3) qui ne seraient plus des identités; ils ne seraient plus linéairement indépendants; on pourrait donc en réduire le nombre.]

Les identités (3) sont donc la condition nécessaire pour que la réduction d'un polynome à un polynome régulier ne puisse se faire que d'une seule manière.

Il me reste à montrer que cette condition est suffisante.

Je dirai, pour abréger, une *somme régulière*, pour désigner une somme de produits trinomes qui est un polynome régulier.

Soit alors

$$S = S_p - T_p + S_{p-1} - T_{p-1} + \dots$$

une somme de produits trinomes; les deux premiers termes $S_p - T_p$ représentent la somme des produits trinomes du degré le plus élevé, c'est ce que j'appellerai la *tête* de la somme S.

J'ai distingué plus haut dans un produit trinome trois parties que j'ai appelées le monome positif, le monome négatif et le produit complémentaire. Je dirai qu'une somme de produits trinomes forme une *chaîne* si le monome négatif de chaque produit est égal et de signe contraire au monome positif du produit suivant. Le monome positif du premier produit et le monome négatif du dernier seront alors les *monomes extrêmes* de la chaîne.

Il résulte de cette définition que tous les monomes positifs d'une même chaîne ne diffèrent que par l'ordre de leurs facteurs.

Une chaîne sera *fermée* si les deux monomes extrêmes sont égaux et de signe contraire. Si $S_p - T_p$ est une chaîne fermée de produits trinomes (S_p représentant la somme des produits binomes et $-T_p$ celle des produits complémentaires), il est clair que S_p est identiquement nul puisque les monomes positifs et négatifs se détruisent deux à deux.

Nous avons vu que si S est une somme régulière, S_p est identiquement nul, d'où il résulte que la tête d'une somme régulière S se compose toujours d'une ou plusieurs chaînes fermées.

Si deux chaînes ont mêmes monomes extrêmes, leur différence est une chaîne fermée.

Nous nous servirons de cette remarque pour montrer qu'une chaîne fermée

peut toujours de plusieurs manières *se décomposer* en deux ou plusieurs chaînes fermées. Une chaîne fermée quelconque peut de plusieurs manières être regardée comme la différence de deux chaînes C et C′ ayant mêmes monomes extrêmes; soit alors C″ une troisième chaîne ayant mêmes monomes extrêmes. La chaîne fermée C — C′ se trouve ainsi *décomposée* en deux autres chaînes fermées C — C″ et C′ — C″.

Il s'agit de montrer que *toute somme régulière est identiquement nulle* et en effet, quand cela aura été démontré, il sera évident qu'un polynome régulier dont tous les coefficients ne seront pas nuls ne pourra être équivalent à zéro, puisque tout polynome régulier équivalent à zéro est par définition une somme régulière.

Supposons que le théorème ait été établi pour les sommes de degré 1, 2, ..., $p-1$; je me propose de l'étendre aux sommes de degré p.

Je remarque d'abord que si une somme régulière de degré p est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les sommes régulières de degré *p qui ont même tête*. La différence de ces deux sommes serait en effet une somme régulière de degré $(p-1)$ qui serait identiquement nulle d'après notre hypothèse.

Il me suffira donc de former toutes les chaînes fermées de degré p et de montrer que chacune d'elles peut être regardée comme la tête d'une somme régulière identiquement nulle.

Toute somme régulière S d'ordre p a en effet pour tête une de ces chaînes fermées, par exemple S′; si donc je montre que l'une des sommes régulières dont la tête est S′ est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les autres et en particulier de S.

Pour établir ce point, je vais *décomposer* la chaîne fermée envisagée en plusieurs chaînes fermées composantes.

Il me suffira de démontrer la proposition pour chacune des composantes.

J'appellerai *chaîne simple de la première sorte* toute chaîne où le premier facteur de tous les monomes, soit positifs, soit négatifs, sera partout le même.

J'appellerai *chaîne simple de la deuxième sorte* toute chaîne où le dernier facteur de tous les monomes sera partout le même.

Une chaîne simple peut d'ailleurs être ouverte ou fermée.

Il est évident que toute chaîne fermée peut être regardée comme la somme d'un certain nombre de chaînes simples, alternativement de la première et de la deuxième sorte.

Soient donc S une chaîne fermée, C_1, C_2, ..., C_n des chaînes simples de la première sorte, C'_1, C'_2, ..., C'_n des chaînes simples de la deuxième sorte, on aura

$$S = C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2 + \ldots + C_n + C'_n,$$

le monome négatif extrême de chaque chaîne étant, bien entendu, égal et de signe contraire au monome positif extrême de la chaîne suivante, et le monome négatif extrême de C'_n égal et de signe contraire au monome positif extrême de C_1.

Soit X le premier facteur de tous les monomes de C_1, Z le dernier facteur de tous les monomes de C'_1, Y le premier facteur de tous les monomes de C_2, T le dernier facteur de tous les monomes de C'_2 (je n'exclus pas le cas où deux des opérateurs X, Y, Z, T seraient identiques).

Soit alors C'' une chaîne simple de la deuxième sorte ayant son monome positif extrême égal et de signe contraire au monome négatif extrême de C'_2, dont tous les monomes ont pour dernier facteur T, et dont le monome négatif extrême a pour premier facteur X.

Soit C''' une chaîne simple de la première sorte dont tous les monomes ont pour premier facteur X et dont les monomes extrêmes sont respectivement égaux et de signe contraire au monome négatif extrême de C'' et au monome positif extrême de C_1.

La chaîne fermée S se trouvera décomposée en deux chaînes fermées composantes, à savoir :

$$S' = C''' + C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2 + C'',$$
$$S'' = -C'' + C_3 + C'_3 + \ldots + C_n + C'_n - C'''.$$

S' ne contient que quatre chaînes simples; car $(C''' + C_1)$ et $(C'_2 + C'')$ sont des chaînes simples; S'' contient deux chaînes simples de moins que S.

En poursuivant on finira par décomposer S en chaînes fermées composantes, formées seulement de quatre chaînes simples. Il nous suffit donc d'envisager les chaînes fermées formées de quatre chaînes simples comme par exemple S'.

Les monomes positifs extrêmes des quatre chaînes simples qui forment S ont respectivement pour premier et dernier facteurs

pour $C''' + C_1$, X et T.
» C'_1, X et Z.
» C_2, Y et Z.
» $C'_2 + C''$, Y et T.

Soient M_1, M'_1, M_2, M'_2 ces quatre monomes.

Tous ces monomes sont équipollents entre eux et équipollents à un certain monome que j'appellerai XYPZT.

Nous allons alors construire une série de chaînes simples, comprises dans le tableau suivant, où dans la première colonne se trouve la lettre qui désigne la chaîne, dans la seconde le monome extrême positif, dans la troisième le monome extrême négatif; je fais figurer dans le même tableau les quatre chaînes simples qui forment S′ et je pose pour abréger :

$$Q_1 = XYPZT; \qquad Q'_1 = XYPTZ; \qquad Q_2 = YXPTZ; \qquad Q'_2 = YXPZT.$$

Nom de la chaîne.	Monome positif.	Monome négatif.	Nom de la chaîne.	Monome positif.	Monome négatif.
$C''' + C_1$	M_1	$-M'_1$	D_2	M_2	Q_2
C'_1	M'_1	$-M_2$	D'_2	M'_2	$-Q'_2$
C_2	M_2	M'_2	E_1	Q_1	$-Q'_1$
C'_2	M'_2	$-M_1$	E'_1	Q'_1	$-Q_2$
D_1	M_1	$-Q_1$	E_2	Q_2	$-Q'_2$
D'_1	M'_1	Q'_1	E'_2	Q'_2	$-Q_1$

On peut supposer que tous les monomes de la chaîne D_1 ont pour premier et dernier facteurs X et T; de sorte que D_1 est à la fois une chaîne simple de première sorte et une chaîne simple de deuxième sorte. Il en est de même des autres chaînes D. On peut supposer de plus que les chaînes E se réduisent à un seul produit trinome de manière que par exemple

$$E_1 = XYP[ZT - TZ - (ZT)].$$

La chaîne fermée

$$S' = (C''' + C_1) + C'_1 + C_2 + C'_2$$

peut être décomposée en cinq chaînes fermées composantes, à savoir :

$$U_1 = C''' + C_1 + D'_1 - E_1 - D_1,$$
$$U'_1 = C'_1 + D_2 - E'_1 - D'_1,$$
$$U_2 = C_2 + D'_2 - E_2 - D_2,$$
$$U'_2 = C'_2 + C' + D_1 - E'_2 - D'_2,$$
$$V = E_1 + E'_1 + E_2 + E'_2.$$

Il s'agit donc de montrer que chacune de ces cinq chaînes fermées est la tête d'une somme régulière identiquement nulle.

Pour les quatre premières, qui sont des chaînes *simples* fermées, le théorème est évident. On l'a supposé démontré, en effet, pour les chaînes fermées d'ordre

inférieur à p. Or il est clair que l'on a par exemple

$$U_1 = XH,$$

H étant une chaîne fermée d'ordre $(p-1)$.

Quant à V, ce sera la tête de la somme régulière

$$\begin{aligned}
&[XY - YX - (XY)]PZT + YXP[ZT - TZ - (ZT)] - [XY - YX - (XY)]PTZ \\
&\quad - XYP[ZT - TZ - (ZT)] + (XY)P[ZT - TZ - (ZT)] \\
&\quad - [XY - YX - (XY)]P(ZT),
\end{aligned}$$

qui est identiquement nulle.

Il reste à envisager ce qui se passe quand deux des opérateurs X, Y, Z, T sont identiques, par exemple $X = Y$, ou $X = Z$.

Nous devons alors distinguer le cas où les divers monomes positifs ou négatifs de notre chaîne contiennent deux facteurs identiques, l'un jouant le rôle de X et l'autre le rôle de Y (ou l'un le rôle de X et l'autre celui de Z); il n'y a alors rien à changer à l'analyse qui précède.

Et, d'autre part, le cas où ces monomes ne contiennent qu'un seul facteur X.

Le premier cas pourra seul se présenter si l'on suppose $X = Z$, ou $X = T$, et s'il y a plus de trois facteurs en tout.

Le second cas pourra au contraire se présenter si l'on suppose par exemple $X = Y$; mais on posera alors

$$Q_1 = Q'_2 = XPZT; \qquad Q'_1 = Q_2 = XPTZ.$$

La définition des diverses chaînes demeurera d'ailleurs la même et l'on constatera immédiatement que la chaîne V est identiquement nulle.

Le théorème est donc démontré pour les sommes d'ordre p, s'il l'est pour les sommes d'ordre moindre.

La démonstration précédente n'est toutefois pas applicable au cas de $p = 3$; car la chaîne V n'existe que s'il y a au moins quatre facteurs. Mais la seule chaîne fermée du troisième ordre est la chaîne $S_3 - T_3$ envisagée plus haut et nous avons vu qu'elle est la tête d'une somme régulière qui est identiquement nulle si les identités (3) ont lieu.

Le théorème est donc établi dans toute sa généralité.

Toute somme régulière est identiquement nulle.

Donc un polynome régulier qui n'est pas identiquement nul ne peut pas s'annuler en vertu des relations (1).

Donc, en résumé :

Si les identités (3) *ont lieu, les relations* (1) *permettent d'une manière, et d'une seule, de réduire un polynome quelconque à un polynome régulier.*

IV. — Problème de Campbell.

Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

r opérateurs élémentaires; supposons qu'ils soient liés par les relations

$$X_a X_b - X_b X_a = (X_a X_b), \tag{1}$$

$(X_a X_b)$ étant une combinaison linéaire des X_k; supposons de plus qu'on ait les identités

$$((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0. \tag{3}$$

D'après le deuxième théorème de Lie, ces opérateurs donnent naissance à un « groupe continu », qui admet r transformations infinitésimales indépendantes. Ces transformations infinitésimales changent f en

$$f + \varepsilon X_k(f),$$

ε étant une constante infiniment petite.

Soit

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r$$

une combinaison linéaire de ces opérateurs. Les t_k sont des coefficients constants quelconques. La transformation finie la plus générale du groupe s'exprimera par le symbole

$$e^{T}(f).$$

Soient maintenant

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r,$$
$$V = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_r X_r,$$

deux combinaisons linéaires des X. Comme les transformations e^T forment un groupe, le produit

$$e^V e^T$$

devra également faire partie du groupe, de sorte que nous devrons avoir

$$e^V e^T = e^W, \tag{4}$$

où

$$W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_r X_r$$

est une autre combinaison linéaire des X.

Les coefficients w sont évidemment des fonctions des v et des t.

Développons le produit

$$e^{X} e^{T} = \Sigma \frac{X^{m} T^{n}}{m!\, n!}.$$

Le terme général $\frac{X^{m} T^{n}}{m!\, n!}$ est un polynome d'ordre $(m+n)$. Par les relations (1) on peut le réduire à un polynome régulier, et cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{X^{m} T^{n}}{m!\, n!} = \Sigma_{p} W(p, m, n)$$

où $W(p, m, n)$ est un polynome régulier et homogène d'ordre $p (\leq m + n)$; on a donc

$$e^{X} e^{T} = \Sigma_{p, m, n} W(p, m, n).$$

Si nous réunissons les termes de même degré et que nous posions

$$W_{p} = \Sigma_{m, n} W(p, m, n)$$

il viendra

$$e^{X} e^{T} = \Sigma_{p} W_{p}.$$

Le second théorème de Lie, que je viens de rappeler, nous apprend que le second membre doit être de la forme e^{W}, et par conséquent que

$$(5) \qquad W_{p} = \frac{W^{p}}{p!}.$$

C'est là une proposition dont la simplicité serait inattendue, si l'on ne connaissait pas la théorie des groupes.

Si l'on pouvait la démontrer directement on aurait, comme l'a remarqué Campbell, une nouvelle démonstration du second théorème de Lie.

Mais il y a plus; on aurait une nouvelle démonstration du *troisième théorème de Lie*.

Les égalités (1) nous font connaître des relations entre les opérateurs élémentaires et les combinaisons $XY - YX$; ce sont ces relations qui déterminent la *structure* du groupe. Cette structure est donc entièrement définie quand on connaît les r^3 coefficients c des r^2 fonctions linéaires (XY).

Mais ces r^3 constantes c ne sont pas toutes indépendantes; tous les coefficients de (XX) doivent être nuls; les coefficients de (YX) sont égaux et de signe contraire à ceux de (XY). Enfin les constantes c doivent être choisies de telle façon que les identités (3) soient satisfaites. J'adjoins donc aux identités (3) les

identités suivantes qui sont évidentes :

$$(3\ bis) \qquad (XX) = 0, \qquad (XY) = -(YX).$$

Le troisième théorème de Lie nous apprend qu'on peut toujours trouver un groupe de structure donnée, pourvu que les coefficients c qui définissent cette structure satisfassent aux identités (3) et (3 *bis*), c'est-à-dire aux identités de Jacobi.

Mais supposons inversement qu'on ait démontré directement l'identité (5) et par conséquent la formule (4). Les coefficients w seront donnés en fonctions de v et de t; et je puis écrire

$$(6) \qquad w_k = \Phi_k(v_i, t_i).$$

Pour former les fonctions Φ_k, il suffit de savoir former le polynome W, par conséquent de savoir former les polynomes $W(p, m, n)$, c'est-à-dire de savoir réduire un polynome quelconque à un polynome régulier; pour cela il suffit de connaître les coefficients c.

Soient

$$e^V e^T = e^W, \qquad e^W e^U = e^Z, \qquad e^T e^U = e^Y,$$

où

$$U = \Sigma u_i X_i, \qquad Z = \Sigma z_i X_i, \qquad Y = \Sigma y_i X_i.$$

Le caractère associatif de nos opérateurs nous montre que l'on a

$$e^V e^Y = e^Z,$$

d'où les relations suivantes :

$$w_i = \Phi_i(v, t), \qquad y_i = \Phi_i(t, u),$$
$$(7) \qquad z_i = \Phi_i(w, u) = \Phi_i(v, y).$$

Regardons dans les équations (6) les t comme des constantes; ces équations (6) définiront une transformation qui transforme $v_1, v_2, \ldots, v_r$ en $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Les relations (7) nous enseignent que l'ensemble de ces transformations constitue un groupe, le groupe *paramétrique*.

(C'est ce que Lie appelle « die erste Parametergruppe ».)

Les substitutions infinitésimales de ce groupe sont :

$$X_i(f) = \Sigma \frac{df}{dv_k} \frac{d\Phi_k}{dt_i},$$

où dans $\Phi_k(v_i, t_i)$ on annule les t après la différentiation.

Les r substitutions infinitésimales $X_i(f)$ sont linéairement indépendantes. Et en effet, pour qu'elles ne le fussent pas, il faudrait que le déterminant fonc-

tionnel des Φ_k par rapport aux t fût nul quels que soient les v, quand les t s'annulent. Or cela n'a pas lieu, car ce déterminant devient égal à 1 quand les v s'annulent.

Ayant ainsi défini les opérateurs élémentaires $X_i(f)$, leurs combinaisons $T = \Sigma t_i X_i(f)$, e^T, etc. se trouvent définies elles-mêmes.

Ces opérateurs étant associatifs, on aura

$$e^V(f) = e^T e^U(f),$$

c'est-à-dire, en négligeant les quantités du troisième ordre par rapport aux t et aux u,

$$V = T + U + \frac{TU - UT}{2}.$$

D'autre part, d'après la manière dont ont été formées les fonctions Φ_k, on vérifie que

$$V = T + U + \frac{1}{2}(TU) = \Sigma t_i X_i + \Sigma u_k X_k + \frac{1}{2}\Sigma (t_i u_k - t_k u_i)(X_i X_k),$$

et la comparaison de ces deux identités donne

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k),$$

où les coefficients des fonctions linéaires $(X_i X_k)$ sont bien les r^3 coefficients c donnés.

Le groupe ainsi formé a donc bien la structure donnée et le troisième théorème de Lie est démontré.

C'est au fond la démonstration de Schur.

Ce que j'appellerai le problème de Campbell consiste donc à démontrer directement la formule (5), ce qui démontre à la fois le second et le troisième théorème de Lie.

V. — Le symbole $\Phi(\theta)$.

Considérons r opérateurs élémentaires

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r,$$

et une de leurs combinaisons linéaires

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r.$$

Soit ensuite V un autre opérateur élémentaire qui pourra être ou ne pas être une combinaison linéaire des opérateurs X.

Supposons que les opérateurs V et X soient liés par des relations de la forme

$$VX_i - X_iV = b_{i,1}X_1 + b_{i,2}X_2 + \ldots + b_{i,r}X_r$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

on aura alors

$$VT - TV = \Sigma u_k X_k,$$

où

$$u_k = \Sigma b_{i,k} t_i.$$

Je poserai

$$VT - TV = \theta(T).$$

Donc $\theta(T)$ est, comme T, une combinaison linéaire des X; et les coefficients de $\theta(T)$ se déduisent de ceux de T par une substitution linéaire.

Je poserai

$$\theta[\theta(T)] = \theta^2(T), \quad \ldots, \quad \theta[\theta^m(T)] = \theta^{m+1}(T),$$

de sorte que $\theta^m(T)$ sera, comme T, une combinaison linéaire des X, les coefficients de $\theta^m(T)$ se déduisant de ceux de T en répétant m fois cette même substitution linéaire.

Si maintenant

$$\Phi(\theta) = \Sigma g_k \theta^k$$

est un polynome ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de θ, j'écrirai

$$\Phi(\theta)(T)$$

au lieu de

$$\Sigma g_k \theta^k(T).$$

Considérons l'équation, dite *caractéristique*,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \theta, & b_{12}, & \ldots, & b_{1r} \\ b_{21}, & b_{22} - \theta, & \ldots, & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1}, & \ldots\ldots, & \ldots, & b_{rr} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a toutes ses racines distinctes et si ces racines sont θ_1, θ_2, ..., θ_r, il existe r combinaisons linéaires des X_i, à savoir :

$$(2) \qquad Y_k = \Sigma \alpha_{ik} X_i,$$

telles que

$$VY_k - Y_kV = \theta_k Y_k.$$

Si alors

$$T = \Sigma t_i X_i = \Sigma t'_k Y_k,$$

on aura

$$\Phi(\theta)(T) = \Sigma \Phi(\theta_k) t'_k Y_k.$$

Si nous posons

$$\Phi(\theta)(T) = \Sigma h_i X_i.$$

nous voyons d'abord que les coefficients h_i sont des fonctions linéaires des t; ce sont d'autre part des fonctions des b; étudions ces fonctions.

Si $\Phi(\theta)$ est un polynome entier d'ordre p en θ, les h_i seront des polynomes entiers d'ordre p par rapport aux b. Si donc $\Phi(\theta)$ est une série ordonnée suivant les puissances de θ, les h_i se présenteront sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des b. Nous allons voir bientôt quelles sont les conditions de convergence de ces séries.

Des équations (2) on tire en effet

$$X_i = \Sigma \beta_{ik} Y_k.$$

d'où

$$t'_k = \Sigma \beta_{ik} t_i.$$

$$\Phi(\theta)(T) = \Sigma \Phi(\theta_k) t'_k \alpha_{ik} X_i.$$

d'où enfin

$$h_i = \Sigma t_j \Phi(\theta_k) . \alpha_{ik} \beta_{jk}.$$

Pour déterminer les produits $\alpha_{ik}\beta_{jk}$ faisons

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\xi - \theta};$$

ξ étant une constante quelconque.

On a alors

$$\frac{1}{\xi - \theta}(T) = \Sigma h_i X_i = H,$$

où

$$h_i = \Sigma \frac{t_j \alpha_{ik} \beta_{jk}}{\xi - \theta_k}.$$

Mais on a aussi

$$(\xi - \theta)(H) = T,$$

ce qui peut s'écrire

$$\xi h_i - \Sigma b_{ki} h_k = t_i.$$

De ces équations on peut tirer les h en fonctions des t et l'on trouve

$$(3) \qquad h_i = \Sigma \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

où P_{ij} est un polynome entier par rapport aux b et à ξ; quant à $F(\xi)$, c'est le premier membre de l'équation (1) où θ a été remplacé par ξ.

Le second membre de l'équation (3) est une fraction rationnelle en ξ; décomposons-la en éléments simples; il viendra

$$h_i = \Sigma \frac{t_j P^k_{ij}}{F'(\theta_k)(\xi - \theta_k)},$$

où P^k_{ij} est ce que devient P_{ij} quand on y remplace ξ par θ_k.

On a donc

$$\alpha_i \beta_{jk} = \frac{P^k_{ij}}{F'(\theta_k)},$$

d'où enfin, pour une fonction $\Phi(\theta)$ quelconque,

$$(4) \qquad \Phi(\theta)(T) = \Sigma \frac{t_j P^k_{ij} \Phi(\theta_k) X_i}{F'(\theta_k)}.$$

On voit que les h_i s'expriment *rationnellement* en fonctions des b, des θ_k et des $\Phi(\theta_k)$.

La formule (4) peut se mettre sous une autre forme; nous pouvons écrire

$$(4\,bis) \qquad \Phi(\theta)(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi\, \Phi(\xi)\, \Sigma t_j P_{ij} X_i}{F(\xi)},$$

l'intégrale étant prise dans le plan des ξ le long d'un cercle de rayon assez petit pour que la fonction $\Phi(\xi)$ soit holomorphe à l'intérieur; nous le supposerons de plus assez grand pour que les points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ soient à l'intérieur du cercle. Cela nous amène à supposer en même temps que le rayon de convergence de la série $\Phi(\xi)$ est plus grand que le plus grand module des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

On a alors pour tous les points du contour d'intégration

$$|\xi| > |\theta_1|, \qquad |\xi| > |\theta_2|, \qquad \ldots, \qquad |\xi| > |\theta_r|,$$

d'où il résulte que la fonction rationnelle

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

est développable suivant les puissances croissantes des b. Il en est donc de même des h_i.

Nous avons dit plus haut que les h_i sont développables en séries procédant suivant les puissances des b; et d'après ce qui précède, il suffit, pour que ces séries convergent, que le rayon de convergence de la série $\Phi(\xi)$ soit plus grand que la plus grande des quantités

$$|\theta_1|, \quad |\theta_2|, \quad \ldots, \quad |\theta_r|.$$

Si donc $\Phi(\xi)$ est une fonction entière, les h_i seront des fonctions entières des b.

Qu'arrive-t-il maintenant si l'équation caractéristique

$$F(\theta) = 0$$

a des racines multiples? Il est aisé de s'en rendre compte en partant du cas général et passant à la limite.

Je suppose par exemple que θ_1 soit une racine triple. Alors $F(\xi)$ contient le facteur $(\xi - \theta_1)^3$. Si je décompose le second membre de (3) en éléments simples, trois de ces éléments deviendront infinis pour $\xi = \theta_1$.

Soient

$$\frac{A_1^i}{\xi - \theta_1} + \frac{A_2^i}{(\xi - \theta_1)^2} + \frac{A_3^i}{(\xi - \theta_1)^3}$$

ces trois éléments simples. Alors il faudra, dans la formule (4), remplacer le terme

$$\Sigma \frac{t_i P'_{1i} \Phi(\theta_1) X_i}{F'(\theta_1)}$$

(qui n'aurait plus de sens dans le cas d'une racine multiple) par les trois termes suivants :

$$\Sigma A_1^i X_i \Phi(\theta_1) + (1!) \Sigma A_2^i X_i \Phi'(\theta_1) + (2!) \Sigma A_3^i X_i \Phi''(\theta_1).$$

On opérerait de même pour les autres racines multiples.

Donc les h_i, dans le cas des racines multiples, sont des fonctions rationnelles des b, des θ_k, des $\Phi(\theta_k)$ et de leurs dérivées $\Phi'(\theta_k)$, $\Phi''(\theta_k)$, ...; on pousse jusqu'à $\Phi^{(p)}(\theta_k)$ si θ_k est une racine multiple d'ordre $p+1$.

Remarquons que je n'aurais pu faire ce raisonnement par passage à la limite, si je m'étais astreint dès le début à supposer que V est une combinaison linéaire des X, et que les X sont liés par les relations (1) et (3) du paragraphe IV (relations de structure et identités de Jacobi).

Alors, en effet, les cas où l'équation caractéristique a des racines multiples ne pourraient plus être regardés comme des cas particuliers de ceux où toutes les racines sont distinctes. On aurait pu, il est vrai, démontrer directement la formule (4 *bis*) et se servir de cette formule; mais j'ai préféré ne pas m'imposer au début cette hypothèse restrictive, quitte à l'introduire dans la suite du calcul, de façon à avoir le droit de raisonner par passage à la limite.

Quoi qu'il en soit, le cas le plus intéressant au point de vue des applications à la théorie des groupes, c'est celui où cette hypothèse restrictive est satisfaite. Supposons donc que V soit une combinaison linéaire des X

$$V = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_r X_r.$$

Supposons de plus que les X soient liées par les relations (1) du paragraphe précédent

$$X_i X_j - X_j X_i = \Sigma c_{ijs} X_s.$$

et que les constantes c satisfont à des relations telles que les identités (3) du paragraphe précédent aient lieu.

On aura alors

$$\theta(\mathrm{T}) = \Sigma c_{ijs} v_i t_j \mathrm{X}_s,$$

d'où

$$b_{i,k} = c_{1,i,k} v_1 + c_{2,i,k} v_2 + \ldots + c_{r,i,k} v_r.$$

Les résultats, démontrés dans le cas général, seront évidemment encore vrais dans ce cas particulier; si donc on pose

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \Sigma h_i \mathrm{X}_i.$$

les h_i seront des fonctions linéaires des t, et des fonctions rationnelles des v, des θ_k, des $\Phi(\theta_k)$ et de quelques-unes de leurs dérivées. Les θ_k sont les racines d'une équation algébrique dont le premier membre est un polynome entier homogène de degré r par rapport aux v et à l'inconnue θ.

De plus les h_i dépendent linéairement des $\Phi(\theta_k)$ et de leurs dérivées.

Si $\Phi(\xi)$ est une fonction entière de ξ, les h_i sont des fonctions entières des v.

Dans tous les cas, le symbole $\Phi(\theta)(\mathrm{T})$ se trouve entièrement défini.

Je terminerai par deux remarques :

1° Si $\mathrm{X}(\xi)$ est le produit des deux fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$, on aura

$$\Phi(\theta)[\Psi(\theta)(\mathrm{T})] = \Psi(\theta)[\Phi(\theta)(\mathrm{T})] = \mathrm{X}(\theta)(\mathrm{T}).$$

2° Si l'on a

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \mathrm{U},$$

on aura

$$\frac{1}{\Phi(\theta)}(\mathrm{U}) = \mathrm{T}.$$

Cette dernière égalité n'a de sens que si $\Phi(\xi)$ ne s'annule pas pour $\xi = 0$, de telle façon que $\frac{1}{\Phi(\theta)}$ soit développable suivant les puissances de θ.

VI. — Formules fondamentales.

Considérons l'expression

(1) $$e^{-\alpha \mathrm{V}} e^{\beta \mathrm{T}} e^{\alpha \mathrm{V}},$$

V et T ayant même signification que dans le paragraphe précédent, tandis que α et β sont des constantes très petites. Développons cette expression en négli-

geant les termes du troisième ordre par rapport à α et β; il viendra

$$\left(1 - \alpha V + \frac{\alpha^2 V^2}{2}\right)\left(1 + \beta T + \frac{\beta^2 T^2}{2}\right)\left(1 + \alpha V + \frac{\alpha^2 V^2}{2}\right)$$

ou

$$1 + \beta T + \frac{\beta^2 T^2}{2} - \alpha\beta(VT - TV).$$

ou, avec la même approximation,

$$e^{\beta T - \alpha\beta(VT - TV)}.$$

On aura donc, toujours avec cette approximation,

$$(2) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \qquad \text{où } U = T - \alpha\,\theta(T),$$

ou encore, avec la même approximation,

$$(2\,bis) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \qquad \text{où } U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

Je me propose maintenant de démontrer que la formule (2 *bis*) est vraie quelque loin que l'on pousse l'approximation; et d'abord qu'elle est vraie quand on néglige le carré de β et qu'on pousse l'approximation par rapport à α aussi loin que l'on veut.

Supposons donc qu'on pousse l'approximation jusqu'aux termes en β et jusqu'aux termes en α^m inclusivement. Dans l'expression (1) nous remplacerons $e^{\beta T}$ par $1 + \beta T$, $e^{\alpha V}$ et $e^{-\alpha V}$ par les $m+1$ premiers termes de leurs développements; en effectuant le produit (et négligeant dans ce produit α^{m+1}), nous obtiendrons un polynome symbolique que nous pourrons rendre régulier par les procédés du paragraphe III. Soit

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Sigma A H,$$

le polynome régulier ainsi obtenu; H est un monome symbolique, et A son coefficient qui est un polynome entier en α et β.

Nous avons alors

$$(3) \qquad \Phi(\alpha + d\alpha, \beta) = e^{-(\alpha + d\alpha)V} e^{\beta T} e^{(\alpha + d\alpha)V} = e^{-d\alpha\,V}\,\Phi(\alpha, \beta)\,e^{d\alpha\,V}.$$

En effectuant le produit du troisième membre de cette double égalité, et négligeant le carré de la différentielle $d\alpha$, on obtiendra un polynome régulier de même forme dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes du premier degré par rapport à $d\alpha$ d'une part, par rapport aux coefficients A d'autre part. Telle est la forme du polynome $\Phi(\alpha + d\alpha, \beta)$.

D'autre part, on a

$$(3\,bis) \qquad \Phi(\alpha + d\alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta) = d\alpha\,\Sigma\frac{dA}{d\alpha}H.$$

Cette égalité, rapprochée de la remarque que nous venons de faire, montre que $\frac{dA}{d\alpha}$ est une combinaison linéaire des coefficients A.

Donc ces coefficients A, considérés comme fonctions de α, satisfont à des équations linéaires à coefficients constants.

De plus, pour $\alpha = 0$ ils doivent se réduire aux coefficients de $e^{\beta T}$. Ces conditions suffisent pour les déterminer.

Or je dis que l'on peut y satisfaire en faisant (conformément à la formule 2 *bis*)

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^{\beta U}; \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

En effet cette formule nous donne

$$\Phi(\alpha + d\alpha, \beta) = e^{\beta U'}, \qquad U' = e^{-(\alpha + d\alpha)\theta}(T),$$

et il s'agit de vérifier que

$$e^{-d\alpha.V} e^{\beta U} e^{d\alpha.V} = e^{\beta U'}.$$

Or la formule (2 *bis*) démontrée quand on néglige d'une part le carré de β, d'autre part le carré de α, peut s'appliquer ici puisque nous négligeons le carré de β et celui de $d\alpha$. Nous avons donc

$$e^{-d\alpha.V} e^{\beta U} e^{d\alpha.V} = e^{\beta U''}, \qquad U'' = e^{-d\alpha.\theta}(U),$$

d'où

$$U'' = e^{-d\alpha.\theta}[e^{-\alpha\theta}(T)] = e^{-(\alpha + d\alpha)\theta}(T) = U'.$$

On a donc bien

$$\Phi(\alpha + d\alpha, \beta) = e^{-d\alpha.V} e^{\beta U} e^{d\alpha.V} = e^{\beta U'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La formule (2 *bis*) satisfait donc à nos équations différentielles, et comme ces équations ne comportent qu'une solution, cette formule se trouve vérifiée.

Poussons maintenant l'approximation aussi loin que nous voulons tant par rapport à β que par rapport à α.

Nous avons

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V};$$

d'où

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{-\alpha V} e^{(\beta + d\beta)T} e^{\alpha V} = (e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V})(e^{-\alpha V} e^{d\beta T} e^{\alpha V}),$$

ou

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = \Phi(\alpha, \beta)\Phi(\alpha, d\beta).$$

Comme nous négligeons le carré de $d\beta$, je puis écrire

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{d\beta.U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T);$$

d'où

$$(4) \qquad \Phi(\alpha, \beta + d\beta) = \Phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta.U}.$$

Cette formule (4) représente sous forme condensée des équations différen-

tielles de même forme que les équations (3 *bis*), auxquelles doivent satisfaire les coefficients A de

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Sigma \mathrm{A}.\Pi.$$

C'est ainsi que la formule (4) représentait sous forme condensée les équations (3 *bis*).

On peut satisfaire à ces équations par la formule (2 *bis*); cette formule donne en effet

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{(\beta + d\beta)\mathrm{T}} = e^{\beta\mathrm{T}} e^{d\beta\,\mathrm{T}} = \Phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta.\mathrm{T}}.$$

Les équations différentielles ne comportant comme les équations (3 *bis*) qu'une seule solution, la formule (2 *bis*) se trouve vérifiée dans tous les cas.

Cette formule (2 *bis*) n'est d'ailleurs que la traduction symbolique d'une formule bien connue et, si j'ai développé la démonstration, c'est uniquement pour mieux faire comprendre les symboles employés et pour faire connaître un mode de raisonnement applicable à des questions analogues; je veux parler de celui où s'introduisent les équations différentielles (3 *bis*) ou les équations analogues.

Il importe avant d'aller plus loin de préciser la portée de la démonstration que nous venons de donner. Pour qu'elle soit valable, il faut que tout polynome puisse être réduit d'une manière et d'une seule à être régulier. Or, d'après le paragraphe III, cela a lieu dans deux cas.

1° Si V et T sont des combinaisons linéaires des opérateurs X,

$$\mathrm{V} = \Sigma c_i \mathrm{X}_i, \qquad \mathrm{T} = \Sigma t_i \mathrm{X}_i,$$

et si ces opérateurs sont liés par des relations

$$\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k \mathrm{X}_i = \Sigma c_{iks} \mathrm{X}_s,$$

les constantes c satisfaisant aux identités

$$(\mathrm{X}_i, (\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l)) + (\mathrm{X}_k, (\mathrm{X}_l, \mathrm{X}_i)) + (\mathrm{X}_l, (\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k)) = 0;$$

si, en d'autres termes, les opérateurs X définissent un groupe de Lie et si $e^{\alpha\mathrm{V}}$, $e^{\beta\mathrm{T}}$ sont deux transformations quelconques de ce groupe :

Dans ce premier cas la formule (2 *bis*) *est toujours vraie.*

2° Elle sera donc vraie en particulier si l'on suppose que

$$\mathrm{V}; \quad \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{X}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_r$$

sont $(r+1)$ opérateurs liés par les relations

$$\mathrm{V}\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_i \mathrm{V} = \Sigma b_{ik} \mathrm{X}_k \tag{5}$$

et

(6) $$X_i X_k - X_k X_i = 0.$$

Ces relations entraînent en effet l'identité

$$(V(X_i X_k)) + (X_i(X_k V)) + (X_k(V X_i)) = 0,$$

en désignant suivant la coutume par (VX_i) et $(X_i X_k)$ les seconds membres des relations (5) et (6). On aura donc dans cette hypothèse

(2 *bis*) $$e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

On aura de même en permutant V et T

(2 *ter*) $$e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha W}, \qquad W = e^{-\beta\eta}(V),$$

$e^{-\beta\eta}$ étant un symbole analogue à $e^{-\alpha\theta}$ et défini de la manière suivante : le symbole η est formé avec T comme le symbole θ avec V; on a donc, si Y est un opérateur quelconque,

$$\eta(Y) = TY - YT.$$

On aura donc

$$\eta(V) = TV - VT = -\theta(T),$$

et en vertu des relations (6)

$$\eta(X) = 0, \qquad \eta^2(V) = 0, \qquad \dots, \qquad \eta^m(V) = 0,$$
$$e^{-\beta\eta}(V) = V - \beta\eta(V) = V + \beta\theta(T).$$

La formule (2 *ter*) devient ainsi

(2 *quater*) $$e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)}.$$

Si l'on suppose maintenant que les relations (5) subsistent, mais que les relations (6) n'aient plus lieu, les formules (2 *bis*) et (2 *quater*) cesseront d'être vraies quels que soient α et β.

Cependant supposons que l'on regarde les opérateurs X comme très petits et qu'on en néglige les carrés; à ce degré d'approximation, les relations (6), dont les premiers membres sont du deuxième ordre par rapport aux X, se trouvent satisfaites d'elles-mêmes.

Les relations (2 *bis*) et (2 *quater*) sont donc vraies si l'on néglige les carrés des X, ou, ce qui revient au même, si l'on néglige le carré de T, ou encore si l'on néglige le carré de β (puisque T ne figure qu'affecté du facteur β).

Si donc V *et les* X *sont* $r+1$ *opérateurs liés par les relations* (5), *les relations* (2 *bis*) *et* (2 *quater*) *ont lieu aux quantités près de l'ordre de* β^2.

Au même degré d'approximation la formule (2 *quater*) peut s'écrire

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - \beta T e^{\alpha V} + e^{\alpha V} \beta T,$$

ou encore

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - e^{\beta T} e^{\alpha V} + e^{\alpha V} e^{\beta T},$$

ou en vertu de la relation (2 *bis*)

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - e^{\alpha V} e^{\beta U} + e^{\alpha V} e^{\beta T}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T);$$

ou, toujours en négligeant le carré de β,

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V}(1 - \beta U + \beta T) = e^{\alpha V} e^{\beta(T-U)}.$$

Si nous posons

$$+\alpha\theta(T) = W, \qquad T - U = Y,$$

il vient

(7) $$e^{\alpha V + \beta W} = e^{\alpha V} e^{\beta Y}, \qquad Y = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W).$$

Soit

$$W = \Sigma w_i X_i$$

une combinaison linéaire quelconque des X_i; peut-on déterminer les coefficients t de la combinaison $T = \Sigma t_i X_i$ de telle façon que l'on ait

$$-\alpha\theta(T) = W?$$

Cela est évidemment toujours possible si le déterminant des coefficients b_{ik} n'est pas nul. Dans ce cas la formule (7) est vraie quel que soit W.

Si maintenant ce déterminant est nul, il suffit de partir du cas où ce déterminant n'est pas nul, de faire varier les coefficients b d'une manière continue de façon que ce déterminant devienne de plus en plus petit et de passer à la limite, pour démontrer que la formule (7) est encore vraie quel que soit W.

Si enfin V, au lieu d'être un opérateur indépendant des X, n'est qu'une combinaison linéaire des X, la formule (7) est évidemment encore vraie, puisqu'elle ne peut cesser de l'être par suite de l'introduction de nouvelles relations entre nos opérateurs.

Remarquons que ce raisonnement par passage à la limite n'aurait pas été possible, si nous nous étions astreint dès le début à supposer que V et T sont des combinaisons des opérateurs X, que les X définissent un groupe de Lie, que $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta T}$ sont deux substitutions finies de ce groupe de Lie. Dans ce cas en effet le déterminant des b_{ik} aurait été constamment nul.

La formule (7) peut s'établir directement :

En effet, en négligeant le carré de β, on a

$$e^{\alpha V+\beta W} = \sum \frac{(\alpha V+\beta W)^n}{n!}$$
$$= e^{\alpha V} + \beta \sum \frac{\alpha^{n-1}}{n!}(V^{n-1}W + V^{n-2}WV + V^{n-3}WV^2 + \ldots + VWV^{n-2} + WV^{n-1}).$$

Or on trouve aisément

$$V^{n-1}W + V^{n-2}WV + \ldots + WV^{n-1}$$
$$= \frac{n!}{1!(n-1)!}V^{n-1}W - \frac{n!}{2!(n-2)!}V^{n-2}\theta(W)$$
$$+ \frac{n!}{3!(n-3)!}V^{n-3}\theta^2(W) - \ldots \pm \frac{n!}{(n-1)!1!}V\theta^{n-2}(W) \mp \frac{n!}{n!0!}\theta^{n-1}(W),$$

d'où

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V} + \beta \sum \frac{\alpha^{n-1}}{n!}\left[\sum \frac{n!}{(n-p)!p!}V^{n-p}(-\theta)^{p-1}(W)\right],$$

ou

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V} + \beta \sum \left[\frac{(\alpha V)^{n-p}}{(n-p)!}\frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right] = e^{\alpha V}\left[1 + \beta \sum \frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right],$$

ou enfin

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V}(1+\beta Y) = e^{\alpha V}e^{\beta Y}, \qquad Y = \frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W).$$

C. Q. F. D.

VII. — Formation des substitutions infinitésimales d'un groupe de structure donnée.

Soient donc $X_1, X_2, \ldots, X_r$, r opérateurs élémentaires liés par les relations

(1) $$X_iX_k - X_kX_i = (X_iX_k) = \sum c_{iks}X_s,$$

les c étant des constantes telles que les identités de Jacobi du paragraphe III aient lieu.

Soient

$$T = \sum t_iX_i, \qquad U = \sum u_iX_i, \qquad V = \sum v_iX_i, \qquad W = \sum w_iX_i$$

diverses combinaisons linéaires de ces opérateurs.

Considérons le produit

$$e^{\alpha V}e^{\beta T};$$

effectuons ce produit qui sera une série de polynomes symboliques; réduisons chacun de ces polynomes à des polynomes réguliers en nous servant des relations (1); je me propose d'étudier la nouvelle série ainsi obtenue que j'appelle $\Phi(\alpha, \beta)$; le raisonnement sera le même que dans le paragraphe précédent, mais je le développerai un peu plus.

Tous les termes de cette série $\Phi(\alpha, \beta)$ sont des polynomes réguliers; et les coefficients de ces polynomes se présentent eux-mêmes sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de β. Je puis ordonner $\Phi(\alpha, \beta)$ suivant les puissances croissantes de β, en groupant tous les termes qui contiennent en facteur une même puissance de β. J'obtiens ainsi

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0 + \beta\Phi_1 + \beta^2\Phi_2 + \ldots.$$

D'autre part j'ai

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{\alpha V} e^{\beta T} e^{d\beta.T} = \Phi(\alpha, \beta) e^{d\beta.T} = \Phi(\alpha, \beta)(1 + d\beta.T),$$

ou

(2) $$\frac{d\Phi}{d\beta} = \Phi.T,$$

ou

(3) $$m\Phi_m = \Phi_{m-1}.T;$$

ces conditions, jointes à

(4) $$\Phi_0 = e^{\alpha V},$$

suffisent pour déterminer Φ.

Or on y satisfait de la manière suivante : Faisons

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^{W}, \qquad \Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{W+dW};$$

soit η un symbole qui soit à W ce que θ est à V.

Il s'agit de satisfaire à l'équation (2) ou, ce qui revient au même, à

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = \Phi(\alpha, \beta) e^{d\beta.T};$$

on doit donc avoir

$$e^{W+dW} = e^{W} e^{d\beta.T}.$$

Or, en vertu de la formule (7) du paragraphe précédent, on satisfera à cette condition si l'on a

(5) $$d\beta.T = \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}(dW).$$

Cette formule (5) représente symboliquement un système d'équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les coefficients w_i.

En vertu de la formule (4 *bis*) du paragraphe V, ces équations peuvent s'écrire

(5 *bis*) $$t_i\, d\beta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi}{\xi} \frac{1 - e^{-\xi}}{F(\xi)} \Sigma_j\, dw_j P_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on a

$$WX_i - X_i W = \Sigma c_{k,i,s} w_k X_s,$$

$F(\xi)$ est le déterminant dont l'élément est (pour la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne)

$$-(c_{1,i,s}w_1 + c_{2,i,s}w_2 + \ldots + c_{r,i,s}w_r),$$

sauf les éléments de la diagonale principale ($i = s$) qui sont égaux à

$$-(c_{1,i,i}w_1 + c_{2,i,i}w_2 + \ldots + c_{r,i,i}w_r) + \xi;$$

les P_{ij} sont les mineurs de ce déterminant. L'intégrale du second membre de (5 *bis*) est prise dans le plan des ξ, le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$.

La condition (2) sera donc satisfaite si les w satisfont aux équations (5 *bis*); la condition (4) le sera également si les valeurs initiales des w pour $\beta = 0$ sont

$$w_i = v_i.$$

Les équations (5 *bis*) admettant toujours une solution telle que pour $\beta = 0$ on ait $w_i = v_i$, et d'autre part les conditions (2) et (4) suffisant pour déterminer Φ, on aura

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^W, \qquad W = \Sigma w_i X_i,$$

les w étant des fonctions de β définies par les équations (5 *bis*) et les conditions initiales $w_i = v_i$.

La série $\Phi(\alpha, \beta)$ n'est donc autre chose qu'une exponentielle dont l'exposant est une combinaison linéaire des X_i; c'est le théorème que j'ai annoncé au paragraphe IV; et comme d'autre part ce théorème a été établi en s'appuyant simplement sur les relations (1) et en en faisant des combinaisons purement formelles, le problème de Campbell est résolu et le troisième théorème de Lie, en vertu de la remarque faite dans ce paragraphe IV, se trouve démontré

Il est aisé de se rendre compte de la forme relativement simple de ces équations (5 *bis*). Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ les p racines distinctes de l'équation $F(\xi) = 0$; ce sont des fonctions algébriques des w, puisque $F(\xi)$ est un polynome entier par rapport à ξ et aux w. Les $\frac{dw_j}{d\beta}$ seront donnés par des équations linéaires dont les seconds membres seront des constantes; tandis que les coefficients des premiers membres seront des fonctions rationnelles des w, des ξ_k et des $e^{-\xi_k}$; ces coefficients ne dépendront d'ailleurs que linéairement des exponentielles $e^{-\xi_k}$; ce seront des fonctions symétriques des racines.

Résolvons ces équations par rapport aux $\frac{dw_j}{d\beta}$, nous trouverons

$$\frac{dw_j}{d\beta} = A_{1,j}t_1 + A_{2,j}t_2 + \ldots + A_{r,j}t_r, \tag{6}$$

les coefficients A étant rationnels par rapport aux w, aux ξ_k et aux $e^{-\xi_k}$.

Le problème qui se pose à propos du troisième théorème de Lie est ainsi complètement résolu.

Il s'agit de trouver r opérateurs

$$X_1(f),\quad X_2(f),\quad \ldots,\quad X_r(f),$$

satisfaisant aux relations (1); on y satisfait en faisant

$$X_i(f) = A_{i,1}\frac{df}{dw_1} + A_{i,2}\frac{df}{dw_2} + \ldots + A_{i,r}\frac{df}{dw_r}.$$

Les équations (5 *bis*) peuvent se mettre sous plusieurs autres formes. Soit

$$\Sigma c_{k,i,s} w_k = b_{i,s}.$$

On aura (puisque les P_{ij} sont les mineurs du déterminant F)

$$\xi P_{ij} - \Sigma b_{ki} P_{kj} = 0 \qquad \text{pour } i \gtrless j$$

et

$$\xi P_{ii} - \Sigma b_{ki} P_{ki} = F \qquad \text{pour } i = j.$$

Nos équations

(5 *bis*) $$t_i\, d\beta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\, \Sigma_j\, \frac{dw_j P_{ij}}{F}$$

donnent

$$d\beta\, \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi.F}\, \Sigma_j\, dw_j\, \Sigma_i b_{ik} P_{ij},$$

d'où

$$d\beta\, \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,(1-e^{-\xi})\, \frac{\Sigma_j\, dw_j P_{kj}}{F} - \frac{dw_k}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}.$$

La deuxième intégrale étant nulle, nous pouvons écrire tout simplement

(5 *ter*) $$d\beta\, \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,(1-e^{-\xi})\, \frac{\Sigma_j\, dw_j P_{kj}}{F} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

D'autre part l'équation (5) peut s'écrire

(7) $$\frac{dW}{d\beta} = \frac{\eta}{1-e^{-\eta}}(T),$$

d'où

$$\frac{dw_i}{d\beta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\xi\, d\xi}{1-e^{-\xi}}\, \frac{\Sigma_j t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

ce qui donne

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\xi\, d\xi}{(1-e^{-\xi})F(\xi)}\, \Sigma_j P_{ji}\, \frac{df}{dw_j}.$$

Cette dernière intégrale doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $F(\xi) = 0$, mais n'enveloppant pas les points

$$\xi = 2k\pi\sqrt{-1} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ ad inf.}).$$

VIII. — Formules de vérification.

Soit

$$e^{V+\delta V} = e^V e^Y,$$

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad \delta V = \Sigma \delta v_i X_i, \qquad Y = \Sigma y_i X_i;$$

on aura, en vertu de la formule (7) du paragraphe VI,

$$Y = \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)$$

[posant $\theta(T) = VT - TV$ comme dans le paragraphe V].

Soit maintenant

$$e^{-V} e^T e^V = e^U,$$

on aura, par la formule (2 *bis*) du paragraphe VI,

$$U = e^{-\theta}(T).$$

Soit

$$e^{-(V+\delta V)} e^T e^{V+\delta V} = e^{U'},$$

on aura

$$U' = e^{-(\theta+\delta\theta)}(T),$$

où $\theta + \delta\theta$ est un symbole qui est à $V + \delta V$ ce que θ est à V. On aura d'autre part

$$e^{U'} = e^{-Y} e^{-V} e^T e^V e^Y = e^{-Y} e^U e^Y,$$

d'où, en négligeant le carré de Y qui est infiniment petit,

$$e^{U'} = e^U - Y e^U + e^U Y = e^{U+UY-YU},$$

d'où

$$U' - U = UY - YU.$$

Si je conviens de poser

$$e^{-(\theta+\delta\theta)} - e^{-\theta} = \delta(e^{-\theta}),$$

il viendra

$$U' - U = \delta(e^{-\theta})(T).$$

Nous arrivons ainsi à la formule symbolique suivante :

(1) $$\delta(e^{-\theta})T = [e^{-\theta}(T)]\left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)\right] - \left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)\right][e^{-\theta}(T)].$$

Pour mieux expliquer le sens de cette formule, rappelons que nous avons trouvé plus haut

(2) $$\Phi(\theta)(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\Phi(\xi)\,\Sigma h_i X_i,$$

où les h_i sont des fonctions rationnelles des t, des v et de ξ données par les

équations

$$(3)\qquad \xi h_i - \Sigma b_{ki} h_k = t_i, \qquad b_{ki} = c_{1,k,i} v_1 + c_{2,k,i} v_2 + \ldots + c_{r,k,i} v_r.$$

Alors on aura

$$\delta e^{-\theta}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi\, e^{-\xi} \Sigma\, \delta h_i \mathrm{X}_i,$$

où les δh_i sont les accroissements que subissent les fonctions h_i quand les variables v_k subissent les accroissements δv_k.

Si alors les h'_i sont ce que deviennent les h_i quand on y remplace les t_k par les δv_k, la formule (1) pourra prendre la forme

$$(1\ bis)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\, \Sigma \mathrm{X}_i \int d\xi\, e^{-\xi}\, \delta h_i = \Sigma (\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k \mathrm{X}_i) \int d\xi \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} h'_k \int d\xi\, e^{-\xi} h_i.$$

Dans le premier membre le signe Σ se rapporte aux r valeurs de l'indice i; dans le deuxième membre aux $r(r-1)$ *arrangements* des deux indices i et k (l'arrangement i, k étant regardé comme différent de l'arrangement k, i).

Cette formule nous fait connaître un certain nombre de relations auxquelles doivent satisfaire les expressions $\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k \mathrm{X}_i$ ou $(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k)$. Ces relations sont curieuses; mais la plupart ont déjà été démontrées par Killing et il semble que les autres pourraient se démontrer facilement par les procédés de Killing. Je n'y insiste donc que comme procédé de vérification.

Les deux membres de cette équation sont d'une forme particulière.

Le premier membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles X_i, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta_i}$ (les θ_i étant les racines de l'équation $\mathrm{F} = 0$). Les coefficients de cette fonction linéaire sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des v et des θ_i.

Le second membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles $(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k)$, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta_i}$ et $e^{-\theta_i - \theta_k}$ (θ_i et θ_k étant deux racines de $\mathrm{F} = 0$). Les coefficients de cette fonction linéaire sont encore rationnels par rapport aux v et aux θ_i.

Les θ_i étant les racines de l'équation $\mathrm{F} = 0$ sont des fonctions algébriques des v. Dans les deux membres de l'équation (1 *bis*) entrent en outre linéairement un certain nombre de fonctions transcendantes; il y a d'abord les exponentielles $e^{-\theta_i}$ et il y en a autant que l'équation $\mathrm{F} = 0$ a de racines distinctes. Il y a ensuite les exponentielles $e^{-(\theta_i + \theta_k)}$ qui peuvent être distinctes des précédentes, mais qui peuvent également ne pas en être toutes distinctes si l'une des

racines de l'équation $F = 0$ est constamment égale à la somme de deux autres racines.

Supposons qu'il y ait q exponentielles et soient

$$e^{\eta_1}, \quad e^{\eta_2}, \quad \ldots, \quad e^{\eta}$$

ces exponentielles.

Les deux membres de l'équation (1 *bis*) seront alors des fonctions linéaires des produits de la forme

$$(4) \qquad t_m \, \delta v_h \, e^{\eta_\mu},$$

où m et h peuvent prendre les valeurs 1, 2, ..., r, et où μ peut prendre les valeurs 1, 2, ..., q.

Les coefficients de ces produits sont des fonctions algébriques des v, ne dépendant ni des t, ni des δv. Pour que l'identité puisse avoir lieu, il faut que l'on puisse égaler dans les deux membres de (1 *bis*) les coefficients d'un même produit (4).

Nous aurons ainsi un certain nombre de relations linéaires entre les symboles X_i d'une part, les symboles $(X_i X_k)$ d'autre part; les coefficients de ces relations linéaires sont des fonctions algébriques des v. Ces relations linéaires doivent être identiques aux relations de structure ou en être des conséquences.

J'examinerai seulement le cas particulier où $F(\xi) = 0$ a toutes ses racines distinctes. Je puis alors supposer que les opérateurs élémentaires X_i ont été choisis de telle sorte que

$$X X_i - X_i X = \theta_i X_i,$$

θ_i étant l'une de ces racines.

Égalons alors dans l'équation (1 *bis*) les coefficients de $t_m \delta v_h$; il vient

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Sigma X_i \int d\xi \, e^{-\xi} \frac{d^2 h_i}{dv_h \, dt_m} = (X_m X_h) \frac{1 - e^{-\theta_h}}{\theta_h} e^{-\theta_m}.$$

Le premier membre ne dépend que des exponentielles $e^{-\theta_i}$, mais le second membre, outre l'exponentielle $e^{-\theta_m}$, contient encore $e^{-\theta_h - \theta_m}$.

Égalons les coefficients de $e^{-\theta_h - \theta_m}$. Si $\theta_h + \theta_m$ n'est pas égal à une racine de $F = 0$, cette exponentielle ne figurera pas dans le premier membre; nous aurons donc

$$(X_m X_h) = 0.$$

On reconnaît là l'un des théorèmes de Killing.

Si au contraire $\theta_h + \theta_m$ est racine de $F = 0$, l'exponentielle pourra figurer dans le premier membre et $(X_m X_h)$ pourra ne pas être nul.

Je n'insisterai pas sur les autres vérifications, ni sur le cas où les racines ne sont pas distinctes et où l'on retrouverait les autres théorèmes de Killing.

Je me bornerai à faire remarquer que la vérification de la formule (1 *bis*) n'est pas immédiate, et qu'il faut pour la faire avoir recours aux identités de Jacobi et aux théorèmes que Killing en a déduits.

IX. — Intégration des équations différentielles et formation des substitutions finies des groupes.

Soit

$$e^{V+dV} = e^V e^{dA}, \tag{1}$$

où

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad dV = \Sigma dv_i X_i, \qquad dA = \Sigma d\alpha_i . X_i.$$

On aura, en vertu de la formule (7) du paragraphe VI,

$$dA = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} (dV). \tag{2}$$

Cette formule, identique sauf les notations à la formule (5) du paragraphe VII, comprend, sous la forme symbolique, r systèmes d'équations différentielles, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer au paragraphe VII.

Annulons tous les $d\alpha$, sauf $d\alpha_k$; égalons ensuite les coefficients de X_1, X_2, ..., X_r dans la formule (2). Nous aurons r équations différentielles qui définiront

$$\frac{dv_1}{d\alpha_k}, \quad \frac{dv_2}{d\alpha_k}, \quad \ldots, \quad \frac{dv_r}{d\alpha_k}$$

en fonctions des v. Ce sont là, comme nous l'avons vu au paragraphe VII, les équations différentielles qui définissent une des substitutions infinitésimales du groupe, si l'on prend les v comme variables indépendantes.

En donnant à l'indice k les valeurs 1, 2, ..., r, on obtiendra r systèmes d'équations différentielles correspondant aux r substitutions infinitésimales du groupe.

Nous devons prévoir que ces équations peuvent se ramener, au moins dans le cas des groupes de la première famille (*vide supra* paragraphe I), à des équations linéaires, puisque c'est là un résultat bien connu obtenu par Lie.

Voici le changement de variables qu'il faudrait faire pour retrouver ces équations; soit

$$U = \Sigma u_i X_i, \qquad e^{-V} e^U e^V = e^L, \qquad L = \Sigma l_i X_i.$$

on aura

$$(3) \qquad L = e^{-\theta}(U).$$

Cette équation symbolique (3) nous apprend que les l_i sont des fonctions des v et des u, linéaires par rapport aux u, et nous permet de former ces fonctions. Si alors on pose

$$e^{-V-dV}e^{U}e^{V+dV} = e^{L+dL},$$

on aura

$$e^{L+dL} = e^{-dA}e^{L}e^{dA},$$

ou, puisque dA est infiniment petit,

$$(4) \qquad dL = L\,dA - dA\,.\,L.$$

Cette formule (4) représente symboliquement r systèmes d'équations différentielles qui ne sont autre chose que ce que deviennent les r systèmes d'équations différentielles représentées symboliquement par la formule (2) quand on prend les l_i pour variables nouvelles.

Celui de ces systèmes que l'on obtient en annulant tous les $d\alpha$ sauf $d\alpha_k$ s'écrit

$$(4\ bis) \qquad \frac{dL}{d\alpha_k} = LX_k - X_k L.$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants et s'intègrent immédiatement; ce sont celles auxquelles Lie arrive par la considération du groupe adjoint. Il importe de remarquer que la réduction des équations différentielles (2) aux équations (4) par le changement de variables (3) n'est pas immédiate et qu'on ne peut la faire qu'en tenant compte des identités de Jacobi.

Considérons de plus près le cas des groupes de la deuxième famille. Nous pourrons alors choisir les opérateurs élémentaires X_i de telle manière qu'on en puisse distinguer de deux classes. Ceux de la deuxième classe seront permutables à tous les opérateurs, ce seront les X''_i; quant à ceux de la première classe que j'appellerai les X'_i, ils seront caractérisés par la propriété suivante : aucune combinaison linéaire des X'_i ne sera permutable à tous les opérateurs.

Pour mettre en évidence cette distinction, j'écrirai quand il y aura lieu

$$\Sigma v_i X_i = \Sigma v'_i X'_i + \Sigma v''_i X''_i, \quad \Sigma v'_i X'_i = V', \quad \Sigma v''_i X''_i = V'', \quad V = V' + V''.$$

Les v'_i seront ainsi les coefficients des X'_i et les v''_i ceux des X''_i. Les lettres u'_i, u''_i; l'_i, l''_i; U', U''; L', L'', etc. auront une signification analogue.

Il est clair qu'on aura

$$X''T - TX'' = X'T'' - T''X' = 0.$$

d'où

$$\theta(\mathrm{T}) = \mathrm{VT} - \mathrm{TV} = \mathrm{V'T'} - \mathrm{T'V'}.$$

J'introduis alors un symbole nouveau : soit

$$\mathrm{V'T'} - \mathrm{T'V'} = \Sigma \lambda'_i \mathrm{X}'_i + \Sigma \lambda''_i \mathrm{X}_i ;$$

je poserai

$$\theta'(\mathrm{T}) = \Sigma \lambda'_i \mathrm{X}'_i, \qquad \theta''(\mathrm{T}) = \Sigma \lambda''_i \mathrm{X}''_i,$$

et je définis $\Phi(\theta')$ à l'aide de θ' comme j'ai défini $\Phi(\theta)$ à l'aide de θ. On a alors

$$\theta(\mathrm{X}_i) = 0, \qquad \theta[\theta''(\mathrm{T})] = 0, \qquad \Phi(\theta)(\mathrm{T}'') = 0;$$

et l'on trouve aisément

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \Phi(\theta)(\mathrm{T}') = \Phi(\theta')(\mathrm{T}') = \theta'\left[\frac{\Phi(\theta') - \Phi(0)}{\theta'}(\mathrm{T}')\right] + \Phi(0)\mathrm{T}'.$$

Remarquons que les expressions

$$\theta(\mathrm{T}), \quad \theta'(\mathrm{T}), \quad \theta''(\mathrm{T})$$

dépendent des v' et des t', mais sont indépendantes des v'' et des t''; et il en est de même de $\Phi(\theta)(\mathrm{T})$ si $\Phi(0)$ est nul.

Les l_i étant linéaires par rapport aux u, je puis écrire

$$l_i = \Sigma \frac{dl_i}{du_k} u_k.$$

Les $\frac{dl_i}{du_k}$ sont des fonctions des v. Voyons combien de ces fonctions sont indépendantes les unes des autres. Je dis d'abord que ces fonctions ne dépendent que des v'. Nous avons en effet (e^{U} étant une substitution quelconque du groupe)

$$e^{\mathrm{V}'} e^{\mathrm{V}''} = e^{\mathrm{V}''} e^{\mathrm{V}'}, \qquad e^{-\mathrm{V}''} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}''} = e^{\mathrm{U}},$$

d'où

$$e^{\mathrm{L}} = e^{-\mathrm{V}} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}} = e^{-\mathrm{V}'} e^{-\mathrm{V}''} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}''} e^{\mathrm{V}'} = e^{-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'},$$

ce qui montre que L ne dépend que de V′, mais pas de V″.

Je dis maintenant que le nombre des fonctions $\frac{dl}{du}$ indépendantes les unes des autres est précisément celui des variables v'. En d'autres termes, si l'on pose

$$e^{\mathrm{L}} = e^{-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'}, \qquad e^{\mathrm{L}_1} = e^{-\mathrm{V}'_1} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'_1},$$

l'identité $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1$, si elle a lieu quel que soit U, entraîne l'identité $\mathrm{V}' = \mathrm{V}'_1$. Si en effet $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1$, on aura, quel que soit U,

$$e^{\mathrm{V}'_1} e^{-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'} e^{-\mathrm{V}'_1} = e^{\mathrm{U}},$$

ce qui montre que $e^{\mathrm{V}'} e^{-\mathrm{V}'_1}$ est permutable à toutes les substitutions du groupe.

C'est donc une substitution qui ne dépend que des X''_i, de sorte que je puis écrire

$$e^{X} e^{-X_1} = e^{W''},$$

W'' étant une combinaison linéaire des X''_i; on en tire

$$e^{X} = e^{W''} e^{X_1} = e^{X_1 + W''},$$

d'où

$$X = X_1 + W'',$$

$$X' = X'_1, \qquad X'' = X''_1 + W''.$$

Donc

$$X' = X'_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous pourrons prendre comme variables les $\frac{dl}{du}$ et les v'', au lieu des v' et des v''.

Les $\frac{dl}{du}$ sont définis par les équations (4 *bis*), qui étant par rapport à ces variables des équations linéaires à coefficients constants s'intègrent immédiatement.

Les équations (4 *bis*) nous font donc connaître les $\frac{dl}{du}$ et par conséquent les v' en fonctions de la variable α_k.

Pour obtenir les v'', revenons aux équations (2); si nous posons

$$1 - e^{-\theta} = \theta - \theta^2 \Psi(\theta),$$

elle peuvent s'écrire

$$dX' = dX'_1 - \theta\Psi(\theta)(dX'_1),$$
$$dX'' = dX''_1 - \theta\Psi(\theta)(dX'_1).$$

On a

$$dX'_1 = \Sigma d\alpha'_k X'_k, \qquad dX''_1 = \Sigma d\alpha''_k X''_k.$$

Si l'on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha''_k$, nos équations donnent simplement

$$v'_i = \text{const.}, \qquad v''_i = \text{const.} \quad (i \neq k); \qquad v''_k - \alpha''_k = \text{const.}$$

Si l'on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha'_k$, les équations deviennent

$$X'_k d\alpha'_k = dX'' - \theta\Psi(\theta)(dX''),$$
$$0 = dX' - \theta\Psi(\theta)(dX').$$

La première de ces équations, équivalente aux équations (4 *bis*), est susceptible, comme nous l'avons vu, d'être ramenée à la forme d'un système d'équations linéaires à coefficients constants. L'intégration est immédiate et nous donne les v' en fonction de la variable α'_k.

La seconde équation est équivalente à un système d'équations de la forme

$$dv''_i - dv'_1 F^i_1 - dv'_2 F^i_2 - \dots - dv'_m F^i_m = 0.$$

les F étant des fonctions données des v'. En remplaçant les v' par leurs valeurs en fonctions de α'_k, elle prend la forme

$$dv''_i - \Phi(\alpha'_k)\, d\alpha_k = 0$$

et s'intègre immédiatement par quadrature.

QUELQUES REMARQUES

SUR

LES GROUPES CONTINUS [1]

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 15 (1901).

I. — Introduction.

A l'occasion du jubilé de Sir G. G. Stokes, j'ai publié un Mémoire [2] où je me suis occupé des groupes finis et continus de Lie. C'est ce Mémoire que je citerai dans la suite sous le nom de « Mémoire de Cambridge ».

J'y ai entre autres choses donné une démonstration nouvelle de ce théorème de Lie, qu'il existe toujours des groupes de structure donnée, pourvu que cette structure satisfasse aux conditions dites de Jacobi.

J'ai mis sous une autre forme la formule de Lie pour la construction du groupe adjoint; j'ai donné ensuite les équations différentielles du groupe paramétrique, et j'ai montré que ces équations pouvaient s'intégrer, au moins par quadratures.

La première chose que j'aurai à faire sera donc de rappeler toutes ces formules.

Nous avons ainsi deux méthodes pour former le groupe, soit en partant du groupe adjoint, soit en partant du groupe paramétrique. Ces deux méthodes doivent conduire au même résultat. Mais il arrive ceci : quand on égale les résultats obtenus par ces deux méthodes, on n'obtient pas des identités immédiates, on obtient des propriétés plus ou moins cachées du groupe.

Beaucoup de ces propriétés étaient déjà connues; d'autres auraient pu être

(1) Présenté le 3 avril 1901, imprimé le 21 juin 1901.

(2) *Sur les groupes continus* (Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the Jubilee of Sir George Gabriel Stokes, Bart., Hon, LL. D., Hon. Sc. D. Lucasian Professor (Cambridge, At the University Press, 1900), p. 220-255).

obtenues par une autre voie; il m'a paru qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à les relier entre elles de cette manière.

Malheureusement je n'ai pu aller bien loin dans cette direction; j'ai fait très peu et je serai heureux si j'ai pu faire comprendre à peu près ce qu'il y aurait à faire.

Les singularités des relations finies qui définissent le groupe paramétrique, ainsi que celles des équations différentielles d'où elles dérivent, peuvent être étudiées au point de vue de la théorie des fonctions, mais je me suis borné à cet égard à de brèves indications.

Dans le cours de ce travail j'ai eu à envisager tantôt des transformations infinitésimales, tantôt des transformations finies. Les premières je les ai représentées, tantôt par le symbole

$$X = X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r},$$

tantôt par le symbole

$$e^{\varepsilon X}.$$

Les transformations finies étaient toujours représentées par le symbole exponentiel. Je crois qu'il ne peut pas résulter de là de confusion fâcheuse.

J'ai employé indifféremment les deux mots « substitution » et « transformation ». J'aurais pu tirer profit de cette double dénomination, soit en réservant l'un des noms pour les opérations du groupe envisagé et l'autre pour les opérations correspondantes du groupe adjoint, soit de bien d'autres manières. Au contraire, je n'en ai fait usage que comme un simple littérateur, pour éviter les répétitions de mots. J'ai eu tort, mais j'espère que ce n'est qu'un péché véniel.

II. — Formation du groupe adjoint.

La première des formules que je dois rappeler était connue depuis longtemps; je crois cependant devoir en parler pour familiariser le lecteur avec les notations employées.

Soit

$$X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r}$$

un opérateur quelconque. Je conviendrai d'écrire

$$\begin{aligned} XY(f) &= X[Y(f)], \\ (XY) &= X[Y(f)] - Y[X(f)], \\ X^m(f) &= X[X^{m-1}(f)]. \end{aligned}$$

Si je considère la substitution infinitésimale qui change f en $1 + \varepsilon X(f)$, les puissances de cette substitution engendrent un groupe dépendant d'un seul paramètre t et dont la transformation la plus générale peut être représentée par la notation

$$e^{tX},$$

puisqu'elle change f en

$$f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X^2(f) + \frac{t^3}{1.2.3} X^3(f) + \ldots.$$

Si je considère maintenant un groupe continu G dérivant de r opérations

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r,$$

la transformation la plus générale de ce groupe pourra être représentée par la notation

$$e^T \qquad (T = t_1 X_1 + \ldots + t_r X_r).$$

Ces transformations formant un groupe, on devra avoir identiquement

$$e^T e^U = e^V \qquad \begin{cases} T = t_1 X_1 + \ldots + t_r X_r, \\ U = u_1 X_1 + \ldots + u_r X_r, \\ V = v_1 X_1 + \ldots + v_r X_r, \end{cases}$$

les v étant des fonctions convenablement choisies des t et des u.

La même condition s'exprime, comme on le sait, d'une autre manière; on doit avoir

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \Sigma_s c_{iks} X_s,$$

les c_{iks} étant des constantes.

Soient alors

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad T = \Sigma t_i X_i,$$

de sorte que e^V et e^T soient deux transformations quelconques du groupe; posons

$$e^{-V} e^T e^V = e^{T'}.$$

$e^{T'}$ sera encore une substitution du groupe, de sorte qu'on aura

$$T' = t'_1 X_1 + t'_2 X_2 + \ldots + t'_r X_r.$$

On voit aisément qu'on doit avoir

$$e^{-V} T e^V = T',$$

ce qui montre que les t' sont des fonctions linéaires des t; c'est-à-dire qu'à chaque substitution e^V de G correspond une substitution linéaire qui change

les t en t'. C'est l'ensemble de ces substitutions linéaires qui constitue ce que l'on appelle le groupe *adjoint* de G.

Cela posé, nous avons

$$(\mathrm{XT}) = \Sigma b_{ik} t_i \mathrm{X}_k,$$

où

$$b_{ik} = c_{1,i,k} v_1 + c_{2,i,k} v_2 + \ldots + c_{r,i,k} v_r.$$

Formons l'équation caractéristique de Killing

$$(2) \qquad \mathrm{F}(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11} - \xi, & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} - \xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{r1} & b_{r1} & \ldots & b_{rr} - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre $\mathrm{F}(\xi)$ est un polynome homogène de degré r par rapport à ξ et aux v.

Soient maintenant P_{ij} les mineurs du déterminant $\mathrm{F}(\xi)$, de telle façon que

$$\xi \mathrm{P}_{ij} - \Sigma b_{kj} \mathrm{P}_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$
$$\xi \mathrm{P}_{ii} - \Sigma b_{ki} \mathrm{P}_{ik} = \mathrm{F}(\xi).$$

Ces mineurs seront des polynomes homogènes de degré $(r-1)$ par rapport à ξ et aux v.

Les racines de l'équation $\mathrm{F}(\xi) = 0$ sont donc des fonctions algébriques des v, homogènes de degré 1 par rapport à ces variables.

Cela posé, la première formule que je voulais rappeler est la suivante :

$$(3) \qquad t'_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{-\xi} \frac{\Sigma t_i \mathrm{P}_{ik}}{\mathrm{F}(\xi)} d\xi.$$

L'intégrale du second membre doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $\mathrm{F}(\xi) = 0$.

On voit immédiatement quelle doit être la forme des coefficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T'.

Si les racines de l'équation (2) sont toutes distinctes, et si ces racines sont $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, nos coefficients seront des combinaisons linéaires des exponentielles

$$e^{-\omega_1}, \quad e^{-\omega_2}, \quad \ldots, \quad e^{-\omega_r},$$

ou plutôt seront de la forme

$$\Sigma e^{-\omega_p} \mathrm{R}(\omega_p),$$

R étant une fonction rationnelle homogène de degré zéro par rapport à ω_p et aux v. Je rappelle que l'une des racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ est toujours nulle.

Si les racines ne sont pas toutes distinctes, nos coefficients seront de la forme

$$(4) \qquad \sum e^{-\omega_p} \Pi_p(\omega_p),$$

$\Pi_p(\omega_p)$ étant une fonction rationnelle définie comme il suit :

Si ω_p est une racine d'ordre μ, le dénominateur sera homogène et de degré $(r-\mu)$ par rapport aux v et à ω_p, et le numérateur sera un polynome non homogène de degré $(r-1)$ par rapport aux mêmes variables et où les termes du degré le moins élevé seront de degré $(r-\mu)$.

Si les t sont regardés comme donnés, les t'_i seront des expressions de la forme (4). On pourra choisir les t de telle façon que dans ces expressions tous les termes disparaissent, sauf ceux qui contiennent en facteur l'exponentielle $e^{-\omega_p}$. On dira alors que la transformation T *appartient* à la racine ω_p par rapport à la transformation V.

Soit maintenant

$$e^{-V}\,T\,e^{V} = T', \qquad e^{-V}\,U\,e^{V} = U';$$

on aura aussi

$$e^{-V}(TU-UT)e^{V} = T'U'-U'T'.$$

Si T appartient à la racine ω_p et U à la racine ω_q, T' se réduira à $e^{-\omega_p}$ multiplié par une fonction algébrique, et U' à $e^{-\omega_q}$ multiplié par une fonction algébrique; de sorte que

$$T'U'-U'T'$$

se réduira à l'exponentielle

$$e^{-\omega_p-\omega_q}$$

multiplié par une fonction algébrique.

En d'autres termes,

$$TU-UT=(TU)$$

appartiendra à la racine $\omega_p+\omega_q$.

Si $\omega_p+\omega_q$ n'est pas racine de l'équation (2), on devra conclure que le crochet (TU) est nul.

Ce double théorème est dû, je crois, à Killing. La démonstration qui précède diffère de celle de Killing au moins pour la forme, et elle se présente d'une façon plus concise. Je rappellerai que dans le Mémoire cité de Cambridge j'ai été conduit (p. 251) à une démonstration assez détournée de ce même théorème [1].

La comparaison des deux expressions de (TU), où figure d'une part une

---

[1] Voir *Œuvres* de H. Poincaré, t. III, p. 207.

fonction dépendant de $\omega_p + \omega_q$ et d'autre part une somme dont chaque terme est le produit de deux fonctions dépendant respectivement de ω_p et ω_q, cette comparaison, dis-je, conduirait à d'autres conséquences sur lesquelles je n'insisterai pas.

La formule (3) montre que l'on a

$$t_i' = \Sigma l_{ij} t_j,$$

les l étant des fonctions entières des v, et cette formule définit une substitution linéaire L qui appartient au groupe adjoint.

On peut se proposer inversement de *calculer les* v, *connaissant la substitution* L. Cela n'est pas toujours possible, cela ne peut se faire que si le groupe ne contient pas de transformations *distinguées*, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. S'il en est autrement, tout ce qu'on pourra faire, ce sera de calculer les b_{ik}.

Le calcul repose sur les principes suivants. Considérons l'équation

$$(5) \qquad \Phi(e^{-\xi}) = \begin{vmatrix} l_{11} - e^{-\xi} & l_{12} & \dots & l_{1r} \\ l_{21} & l_{22} - e^{-\xi} & \dots & l_{2r} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ l_{r1} & l_{r2} & \dots & l_{rr} - e^{-\xi} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient Q_{ij} les mineurs de ce déterminant, de telle façon que

$$\begin{aligned} e^{-\xi} Q_{ij} - \Sigma l_{ki} Q_{kj} &= 0 \\ e^{-\xi} Q_{ii} - \Sigma l_{ki} Q_{ki} &= -\Phi(e^{-\xi}) \end{aligned} \qquad (i \neq j).$$

La puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution linéaire L sera évidemment donnée par la formule

$$(6) \qquad t_i' = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{-\alpha\xi} \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \Sigma t_j Q_{ij},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de l'équation (5). Voici ce que j'entends par là. L'équation (5) admet une infinité de racines, mais toutes ces racines peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles, car Φ ne change pas quand on augmente ξ d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Je ne considérerai donc pas comme proprement distinctes deux racines différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ et je supposerai que notre contour est tracé de façon à ne pas envelopper à la fois ces deux racines.

La formule (6) est vraie quel que soit α, entier, fractionnaire, etc.; supposons

α infiniment petit. Alors la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution L se réduit à

$$t'_i = t_i - \alpha \Sigma b_{ji} t_j.$$

D'autre part, en vertu de la formule (6), elle se réduit à

$$t'_i = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int (1 - \alpha\xi) \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \Sigma t_j Q_{ij},$$

d'où

$$(7) \qquad b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} Q_{ij}.$$

Cette formule nous montre d'abord que les b_{ji} ne sont pas toujours des fonctions uniformes des t. En effet, notre contour d'intégration doit envelopper une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de (5). Mais cela ne suffit pas pour déterminer ce contour et par conséquent les b_{ji}. Si, en effet, on remplace une des racines par cette racine augmentée d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient un contour différent qui conduit à une valeur différente de b_{ji}.

Comment maintenant pourra-t-il arriver que les b_{ji} deviennent infinis, ou, plus généralement, cessent d'être des fonctions holomorphes des t?

Il est clair que, tant que le contour n'ira pas passer par un des points singuliers de la fonction sous le signe intégral, c'est-à-dire par une des racines de (5), les b resteront des fonctions holomorphes des t. Mais on pourra toujours maintenir ce contour à distance de ces racines, à moins que l'une de ces racines ne devienne infinie ou que deux de ces racines ne viennent à se confondre; et encore faut-il que les deux racines qui se confondent ainsi soient primitivement l'une à l'extérieur du contour, l'autre à l'intérieur. C'est alors, en effet, que le contour pris entre deux feux ne peut plus fuir devant les racines, et qu'en général les b cesseront d'être des fonctions holomorphes des t.

Cela peut encore s'énoncer autrement. Les racines de (5) ne sont autre chose que celles de l'équation de Killing augmentées d'un multiple arbitraire de $2\pi\sqrt{-1}$. Notre contour doit envelopper toutes les racines de l'équation de Killing et laisser en dehors les autres racines de l'équation (5). Alors, pour que les b restent des fonctions holomorphes, il suffit qu'une racine de l'équation de Killing (qui doit être intérieure au contour) ne se confonde pas avec une racine de (5) n'appartenant pas à l'équation de Killing (et qui doit rester extérieure au contour) : *Les b seront donc des fonctions holomorphes des t, à moins que deux des racines de l'équation de Killing ne diffèrent d'un*

multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ autre que zéro, ou que l'une de ces racines ne devienne infinie.

Nous sommes donc conduits à distinguer parmi les substitutions linéaires finies du groupe adjoint certaines *substitutions singulières*, qui jouissent de cette propriété que deux racines de l'équation de Killing, sans être égales, diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

En général, pour ces substitutions singulières, les b considérées comme fonctions des l seront infinies; c'est-à-dire que ces substitutions singulières ne seront pas une puissance d'une substitution infinitésimale du groupe. Mais il pourra se faire aussi que les b soient des fonctions indéterminées des l, de sorte que la substitution singulière sera une puissance d'une infinité de substitutions infinitésimales différentes.

La distinction entre les deux cas se rattache à la théorie des « Elementartheiler »; formons les équations différentielles linéaires

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum l_{ik}\xi_k.$$

On sait quelle est la forme de l'intégrale générale de ces équations; on a

$$\xi_i = \sum P(t)e^{\omega t},$$

ω étant l'une des racines de l'équation

$$\Phi(\omega) = 0$$

et $P(t)$ un polynome en t dont le degré est au plus égal à $\mu - 1$, si ω est une racine d'ordre μ.

Dans le cas d'une substitution singulière, deux racines de l'équation $\Phi(\omega) = 0$, ordinairement distinctes, viennent à se confondre. Soient ω_1 et ω_2 ces racines, μ_1 et μ_2 leur ordre, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ les polynomes correspondants dont l'ordre est, au plus, $\mu_1 - 1$ et $\mu_2 - 1$.

Quand les racines se confondent, on a une racine ω_1 d'ordre $\mu_1 + \mu_2$, de sorte que les deux termes

$$P_1(t)e^{\omega_1 t}, \quad P_2(t)e^{\omega_2 t}$$

seront remplacés par un terme unique

$$Q(t)e^{\omega_1 t},$$

où Q peut être de degré $\mu_1 + \mu_2 - 1$, mais peut être aussi de degré moindre.

Si le degré de Q ne dépasse pas celui de P_1 (ou celui de P_2, si P_2 est de

degré plus grand que P_1), les b sont des fonctions indéterminées des l. Dans le cas contraire, les b deviennent infinis.

Nous devons aussi réserver le cas des substitutions que j'appellerai *singulières de la deuxième sorte*, c'est-à-dire de celles pour lesquelles une des racines ξ de l'équation de Killing devient infinie; pour cela il faut que l'une des racines $e^{-\xi}$ de l'équation (5) soit nulle ou infinie. Elle ne pourra devenir infinie si les l sont finis; il faut donc qu'elle devienne nulle, c'est-à-dire que le déterminant des l soit nul. C'est ce qui caractérise les substitutions singulières de la deuxième sorte.

Quelques exemples feront d'ailleurs mieux comprendre la nature des différentes sortes de substitutions singulières et justifieront ce que je viens de dire au sujet de la distinction des cas où les b sont, soit infinis, soit indéterminés.

Reprenons notre substitution L et son équation caractéristique

$$\Phi(S) = 0.$$

Si nous considérons les v comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $(r-1)$ dimensions, nous pouvons nous demander quels sont les points, ou les variétés planes à q dimensions qui ne sont pas altérés par la substitution L. Dans le cas général, où l'équation caractéristique a r racines distinctes, il y a r points qui sont conservés ainsi que les variétés planes à q dimensions définies par $(q+1)$ quelconques de ces r points. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_r$ les r racines. A chacune de ces racines S_i correspondra un point M_i inaltéré par L. Si deux racines S_1 et S_2 viennent à se confondre, il arrivera en général que les deux points M_1 et M_2 tendront à se confondre et que la droite M_1M_2 tendra vers une droite D qui sera également inaltérée par L. En général le point $M_1 = M_2$ sera le seul point de D qui sera inaltéré; la substitution sera dite alors *parabolique*; mais il peut arriver aussi que tous les points de D soient inaltérés par L.

Étudions maintenant les b comme fonctions des l; ou, ce qui revient au même, étudions les puissances fractionnaires L^α de L. Soit ξ_i la racine de Killing qui correspond à S_i, de telle sorte que $S_i = e^{-\xi_i}$. Si l'équation caractéristique n'a pas de racine multiple, il n'y a pas de difficulté; il n'y en a pas non plus si S_1 devenant égal à S_2, ξ_1 est égal à ξ_2. Il reste donc à examiner le cas où ξ_1 est égal à ξ_2 plus un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, de telle sorte que S_1 soit égal à S_2.

Si L est parabolique, on ne pourra pas former la substitution L^α. Si cette substitution existait en effet, aux deux racines distinctes ξ_1 et ξ_2 correspon-

draient deux points *distincts* M_1 et M_2 qui devraient être inaltérés par L^α et par conséquent par L. Or il n'en est pas ainsi puisque le seul point inaltéré de D est le point $M_1 = M_2$. Les équations qui donnent les b sont donc *impossibles*, c'est-à-dire que les b sont des fonctions qui deviennent infinies.

Dans le cas où tous les points de D sont inaltérés, il n'en est pas de même.

Choisissons, en effet, sur D deux points quelconques M_1 et M_2. Il y aura une substitution L^α, et une seule, qui conservera ces deux points inaltérés, les racines de Killing ayant pour valeurs ζ_1 et ζ_2; L sera une puissance de cette substitution. On pourra donc résoudre le problème d'une infinité de manières. C'est le *cas d'indétermination*.

Voyons encore le cas d'une racine triple $S_1 = S_2 = S_3$. Si trois racines S_1, S_2, S_3 tendent à se confondre, les trois points inaltérés M_1, M_2, M_3 tendent aussi en général à se confondre, les trois droites $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$ tendent vers une limite commune D, le plan $M_1 M_2 M_3$ tend vers un plan P.

En général, le plan P étant invariant, la seule droite invariante de P est D, le seul point invariant de P est $M_1 = M_2 = M_3$. On verrait comme plus haut que nous sommes encore dans un cas d'impossibilité (sauf si les trois racines de Killing ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont égales, cas où il n'y a pas de singularité).

Il peut se faire aussi qu'il y ait dans P une droite D, et une seule, dont les points sont invariants, et sur D un point, et un seul, tel que toutes les droites de P qui passent par M soient invariantes.

Nous aurons alors impossibilité si les trois racines de Killing sont distinctes, indétermination si deux de ces racines sont égales, la troisième en différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; et enfin il n'y aura pas de singularité si les trois racines sont égales.

Il peut arriver enfin que tous les points et toutes les droites de P soient invariants; on retombe alors sur le cas d'indétermination.

III. — Formation du groupe paramétrique.

J'avais donné en outre une seconde formule d'une forme analogue mais entièrement nouvelle. Supposons que l'on ait

[illegible]

$$V = \sum v_i X_i, \quad T = \sum t_i X_i, \quad dV = \sum dv_i X_i.$$

les t étant *infiniment petits*. Nous pourrons écrire

$$(1) \qquad t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \, \frac{\Sigma \, dv_j \, P_{ij}}{F(\xi)};$$

et d'autre part

$$(2) \qquad dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi \, \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \, \frac{\Sigma \, t_j \, P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Les intégrales doivent être prises le long d'un contour enveloppant toutes les racines de l'équation de Killing $F(\xi) = 0$; pour l'intégrale (2), le contour est assujetti en outre à ne pas envelopper les racines de $1 - e^{-\xi} = 0$, la racine zéro exceptée.

La formule (2) nous apprend en outre que les substitutions du groupe G, ou plutôt de son *groupe paramétrique*, peuvent être mises sous la forme

$$(3) \qquad X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\xi \, d\xi}{(1-e^{-\xi})F(\xi)} \, \Sigma P_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j}.$$

Que signifient ces trois formules et d'abord la formule (1)?

Les t sont des fonctions linéaires des dv et les coefficients sont de la forme suivante :

$$\Sigma R_p(\omega_p) + \Sigma e^{-\omega_p} S_p(\omega_p),$$

où $R_p(\omega_p)$ et $S_p(\omega_p)$ sont des fonctions rationnelles de ω_p et des v. Le dénominateur commun de R_p et de S_p est un polynome homogène de degré r, divisible par ω_p^μ, si ω_p est une racine d'ordre μ. Le numérateur de K_p est un polynome homogène de degré $(r-1)$; celui de S_p est un polynome non homogène de degré $(r-1)$ dont les termes du degré le moins élevé sont de degré $(r-\mu)$.

Il y a exception pour la racine $\omega_p = 0$; pour cette racine les deux termes de la formule peuvent être réunis en un seul; le dénominateur est un polynome homogène de degré $(r-\mu)$ par rapport aux v, si zéro est une racine d'ordre μ; le numérateur est un polynome non homogène de degré $(r-1)$, dont les termes du degré le moins élevé sont d'ordre $(r-\mu)$.

Que nous apprend maintenant la formule (2)?

Elle montre que les dv sont des fonctions linéaires des t. Elle nous apprend aussi quelle est la forme des coefficients de ces fonctions linéaires qui sont en même temps les coefficients des $\frac{\partial f}{\partial v_j}$ dans les expressions des $X_i(f)$ [*voir* formule (3)].

Soit

$$D_0(\omega_p) = \frac{1}{1 - e^{-\omega_p}}$$

et $D_q(\omega_p)$ la $q^{\text{ième}}$ dérivée de $D_0(\omega_p)$ par rapport à ω_p; nos coefficients seront de la forme

$$\Sigma\left[D_0(\omega_p)Q_p^1 + D_1(\omega_p)Q_p^2 + \ldots + D_{\mu-1}(\omega_p)Q_p^{\mu}\right].$$

$Q_p^1, Q_p^2, \ldots, Q_p^{\mu}$ étant des fonctions rationnelles homogènes des v et de ω_p dont le dénominateur commun est d'ordre $(r-\mu)$ et dont les numérateurs sont d'ordre

$$r-\mu+1,\quad r-\mu+2,\quad \ldots,\quad r.$$

Pour la racine $\omega_p = 0$, la même formule pourra être conservée, seulement les $D_q(\omega_p)$ devront être remplacés par l'unité et les degrés des numérateurs des Q devront être abaissés d'une unité.

Nos coefficients seront donc des termes de l'une des deux formes suivantes :

1° Une fonction rationnelle des v (provenant de la racine $\omega_p = 0$).

2° Une puissance négative de $(1 - e^{-\omega_p})$ multipliée par une fonction rationnelle des v et de ω_p.

Exemple.

Un exemple simple fera d'ailleurs mieux comprendre la portée de cette formule (2).

Considérons le groupe des rotations d'un corps solide autour d'un point fixe.

Soit une rotation d'un angle 2θ autour de l'axe de cosinus directeurs α, β, γ; nous pouvons la représenter, en employant la notation des quaternions, par les quatre paramètres

$$\lambda = \cos\theta,\quad \mu = \alpha\sin\theta,\quad \nu = \beta\sin\theta,\quad \rho = \gamma\sin\theta.$$

Mais nous pouvons également la représenter par les trois paramètres

$$v_1 = \alpha\theta,\quad v_2 = \beta\theta,\quad v_3 = \gamma\theta.$$

Si alors t_1, t_2, t_3 représentent les paramètres d'une rotation infiniment petite, si λ, μ, ν, ρ ou v_1, v_2, v_3 définissent, non seulement une rotation finie, mais l'orientation où cette rotation finie amène le corps solide en partant de son orientation initiale, cette orientation variera si le corps subit la rotation infiniment petite t_1, t_2, t_3, de sorte que les λ et les v subiront des accroissements $d\lambda$

et dv. La théorie des quaternions nous donne [1]

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\mu t_1 - \nu t_2 - \rho t_3, \\ d\mu &= \lambda t_1 - \rho t_2 + \nu t_3, \\ d\nu &= \rho t_1 + \lambda t_2 - \mu t_3, \\ d\rho &= -\nu t_1 + \mu t_2 + \lambda t_3. \end{aligned}$$

On en déduit, par exemple,

$$dv_1 = \theta\, d\alpha + \alpha\, d\theta = \frac{\theta\, d\mu}{\sin\theta} + \frac{\theta\alpha\cos\theta\, d\lambda}{\sin^2\theta} - \frac{\alpha\, d\lambda}{\sin\theta},$$

d'où

$$\begin{aligned} dv_1 = {} & t_1[\theta\cot\theta(1-\alpha^2) + \alpha^2] \\ & + t_2[-v_3 + \alpha\beta(1-\theta\cot\theta)] \\ & + t_3[v_2 + \alpha\gamma(1-\theta\cot\theta)]. \end{aligned}$$

Comparons ce résultat avec ce que donne la formule (2). Nous aurons

$$\begin{aligned} X_1 &= -\mu\frac{df}{d\lambda} + \lambda\frac{df}{d\mu} + \rho\frac{df}{d\nu} - \nu\frac{df}{d\rho}, \\ X_2 &= -\nu\frac{df}{d\lambda} - \rho\frac{df}{d\mu} + \lambda\frac{df}{d\nu} + \mu\frac{df}{d\rho}, \\ X_3 &= -\rho\frac{df}{d\lambda} + \nu\frac{df}{d\mu} - \mu\frac{df}{d\nu} + \lambda\frac{df}{d\rho}; \end{aligned}$$

d'où

$$(X_2X_3) = 2X_1, \quad (X_3X_1) = 2X_2, \quad (X_1X_2) = 2X_3.$$

L'équation de Killing s'écrit

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} -\xi & -2v_3 & 2v_2 \\ 2v_3 & -\xi & -2v_1 \\ -2v_2 & 2v_1 & -\xi \end{vmatrix} = 0;$$

elle admet trois racines, qui sont o et $\pm 2i\theta$.

On a

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\xi(\xi^2 + 4\theta^2), \\ P_{11} &= \xi^2 + 4v_1^2, \\ P_{12} &= 4v_1v_2 - 2\xi v_3, \\ P_{13} &= 4v_1v_3 + 2\xi v_2; \end{aligned}$$

et la formule (2) donne

$$dv_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\xi\, d\xi}{1-e^{-\xi}}\, \frac{t_1(\xi^2 + 4v_1^2) + t_2(4v_1v_2 - 2\xi v_3) + t_3(4v_1v_3 + 2\xi v_2)}{-\xi(\xi^2 + 4\theta^2)}.$$

Les résidus sont :

---

(1) Voir aux *Notes*.

1° Pour la racine o,

$$x^2 t_1 + x\beta t_2 + x\gamma t_3;$$

2° Pour la racine $-2i\theta$,

$$-t_1 \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})} - t_2 \frac{4(v_1 v_2 - i v_3 \theta)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})} - t_3 \frac{4(v_1 v_3 - i v_2 \theta)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})};$$

3° Pour la racine $2i\theta$,

$$-t_1 \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)} - t_2 \frac{4(v_1 v_2 - i v_3 \theta)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)} - t_3 \frac{4(v_1 v_3 - i v_2 \theta)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)}.$$

En faisant la somme, on trouve :

1° Pour le coefficient de t_1,

$$x^2 + \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{-4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} = x^2 + \theta \cot\theta (1-x^2);$$

2° Pour le coefficient de t_2,

$$x\beta + \frac{4 v_1 v_2}{-4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} - v_3 = x\beta - \theta\cot\theta . x\beta - v_3;$$

3° Pour le coefficient de t_3,

$$x\gamma + \frac{4 v_1 v_3}{4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} + v_2 = x\gamma - \theta\cot\theta . x\gamma + v_2.$$

On retrouve donc bien par la formule (2) les résultats auxquels conduisait la théorie connue des quaternions.

Si nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut,

$$e^V e^T = e^{V+dV}$$

et si nous supposons

$$T = \varepsilon V,$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux substitutions V et T seront permutables, de sorte qu'on aura aussi

$$dV = \varepsilon V.$$

Si donc les équations linéaires qui lient les dv aux t s'écrivent

$$dv_i = \Sigma V_{ki} t_k,$$

il viendra

(4) $$v_i = \Sigma V_{ki} v_k.$$

Ce sont là des relations importantes auxquelles les fonctions V_{ki} devront

satisfaire identiquement et qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier sur l'exemple simple que nous venons de traiter.

Relation entre le groupe paramétrique et le groupe adjoint.

Dans le paragraphe précédent nous avons donné les équations du groupe adjoint; dans celui-ci nous donnons celles du groupe paramétrique. Il est aisé de voir quelle relation il y a entre ces deux groupes.

Soient e^V, e^T, e^U trois transformations du groupe G : la première finie, les deux autres infinitésimales. Posons

$$e^V e^T = e^{V+dV};$$

la transformation qui change les v_i en $v_i + dv_i$ appartient au groupe paramétrique, je continue à l'appeler e^T; c'est d'ailleurs la transformation

$$\Sigma t_k X_k(f)$$

où les $X_k(f)$ sont définies par la formule (3).

Posons encore

$$e^{-U} V e^{U} = V',$$

$$V = \Sigma v_i X_i, \quad V' = \Sigma v'_i X_i.$$

La transformation qui change les v_i en v'_i appartient au groupe adjoint; je la représenterai par $e^{U'}$ pour ne pas la confondre avec la transformation correspondante e^U du groupe paramétrique. Soit ensuite

$$T' = e^{-U} T e^{U}, \quad dV' = e^{-U} dV e^{U};$$

je vois que la même transformation linéaire $e^{U'}$, qui change les v_i en v'_i, change les t_i en t'_i et les dv_i en dv'_i; et par conséquent les $v_i + dv_i$ en $v'_i + dv'_i$.

On aura aussi

$$e^{-U} e^{T} e^{U} = e^{T'}, \quad e^{-U} e^{V+dV} e^{U} = e^{V'+dV'}, \quad e^{-U} e^{V} e^{U} = e^{V'},$$

d'où

$$e^{V'+dV'} = e^{-U} e^{V+dV} e^{U} = e^{-U} e^{V} e^{T} e^{U} = e^{-U} e^{V} e^{U} e^{-U} e^{T} e^{U} = e^{V'} e^{T'},$$

c'est-à-dire que la transformation $e^{T'}$, qui appartient au groupe paramétrique, change les v'_i en $v'_i + dv'_i$.

Il est donc indifférent de faire subir aux v_i, d'abord la transformation $e^{U'}$ qui les change en v'_i, puis la transformation $e^{T'}$ qui change les v'_i en $v'_i + dv'_i$; ou de faire d'abord la transformation e^T qui change les v_i en $v_i + dv_i$, puis la trans-

formation e^{U} qui change les $v_i + dv_i$ en $v'_i + dv'_i$; ce qui s'écrit

$$e^{U}e^{T} = e^{T'}e^{U},$$

ou

$$e^{T'} = e^{-U}e^{T}e^{U},$$

ou, puisque les substitutions sont infinitésimales,

$$T' = T + (TU_0).$$

D'autre part, l'équation

$$e^{T'} = e^{-U}e^{T}e^{U}$$

nous donne

$$T' = T - (TU),$$

d'où

(5) $$(TU_0) = -(TU).$$

Pour l'intelligence de cette formule (5) il importe de se rappeler que

$$T = \Sigma t_k X_k(f) \quad \text{et} \quad U = \Sigma u_k X_k(f),$$

où les X_k sont donnés par la formule (3), tandis que les t_k et les u_k sont des coefficients constants. Quant à U_0 il est de la forme

$$U_0 = \Sigma u_k X_k(f),$$

où

$$X_k(f) = \Sigma Z_{ki} \frac{df}{dv_i},$$

les Z_{ki} étant des fonctions linéaires des v.

C'est ce qu'on peut encore exprimer de plusieurs autres manières.

Reprenons les équations

$$dv_i = \Sigma V_{ki} t_k.$$

Faisons subir aux v, aux t et au dv une même substitution linéaire appartenant au groupe adjoint; soient v', t', dv' ce que deviennent les v, les t et les dv par suite de cette substitution. Soit V'_{ki} ce que devient V_{ki} quand on y change les v en v' : des équations proposées on pourra déduire alors

$$dv'_i = \Sigma V'_{ki} t'_k.$$

Ou bien encore, considérons l'expression

$$\Sigma u_i t_k V_{ki}.$$

C'est une forme bilinéaire par rapport aux u et aux t dont les coefficients sont des fonctions des v. Cette forme ne sera pas altérée quand on fera subir aux v et aux t une substitution linéaire du groupe adjoint, et aux u la substitution linéaire contragrédiente.

La formule (5) peut aussi s'interpréter comme il suit : *L'ensemble des transformations du groupe adjoint et du groupe paramétrique engendre aussi un groupe* Γ, *et dans ce groupe* Γ *le groupe paramétrique est un sous-groupe invariant*, et en effet (TU) fait aussi partie de ce sous-groupe.

Nos formules (1), (2) et (3) nous suggèrent encore différentes remarques qui nous seront utiles dans la suite.

Supposons que notre groupe G admette un certain nombre de transformations infinitésimales distinguées, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. Soient $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_r$ ces transformations que j'appellerai pour abréger les X″, tandis que les autres transformations $X_1, X_2, \ldots, X_m$ s'appelleront les X′. Comme au dernier paragraphe du Mémoire cité de Cambridge, j'appellerai les t' et les v' ceux des coefficients t et v qui affectent les X′, et les t'' et les v'' ceux qui affectent les X″, et je poserai par exemple

$$V = V' + V'', \qquad V' = \Sigma v' X', \qquad V'' = \Sigma v'' X''.$$

Si nous envisageons alors le déterminant de Killing nous verrons que les $(r-m)$ dernières colonnes sont entièrement composées de zéros sauf les termes de la diagonale principale qui se réduisent à $-\xi$. Il en résulte que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)} = 0 \qquad (i > m,\ i \neq j),$$

$$\frac{P_{ii}}{F(\xi)} = -\frac{1}{\xi} \qquad (i > m).$$

La formule (2) nous donne alors, pour $i > m$,

$$dv_i = t_i + \Sigma X_k t_k \qquad (k \leq m).$$

C'est d'ailleurs ce qui est presque évident ; car V″ et T″ étant permutables à toutes les substitutions du groupe, on a (pour T′ = o)

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{T} = e^{V} e^{T''} = e^{V+T''},$$

d'où

$$dV = T, \qquad dV' = 0, \qquad dV'' = T'';$$

ce qui équivaut à la formule que nous venons de trouver.

Cela posé, je reprends la formule

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{T}$$

et je dis que *les dv ne peuvent jamais s'annuler tous à la fois*. Si cela arrivait en effet, on aurait $dV = 0$, d'où

$$e^{V} = e^{V} e^{T}$$

et si U est une substitution quelconque du groupe

$$e^{-V}Ue^{V} = e^{-T}e^{-V}Ue^{V}e^{T}.$$

en posant

$$e^{-V}Ue^{V} = U'',$$

cela devient

$$U'' = e^{-T}U''e^{T}.$$

Mais U′ est une substitution quelconque du groupe. En effet, quelle que soit U′, nous pourrons toujours poser

$$U = e^{V}U''e^{-V},$$

puisque U est arbitraire. La formule précédente signifie donc que T est une transformation distinguée, ou, avec nos notations, que T = T′. Mais on ne peut avoir à moins que T ne se réduise à zéro .

$$T = T', \quad dV = 0;$$

car nous avons vu plus haut que pour T = T″ on a

$$dV = T''.$$

La proposition est donc démontrée.

Soit maintenant

$$e^{U}e^{W} = e^{V}$$

$$U = \Sigma u_i X_i, \quad W = \Sigma w_i X_i, \quad V = \Sigma v_i X_i.$$

On peut se demander *dans quels cas les v cessent d'être des fonctions holomorphes des u et des w.*

A trois transformations e^U, e^W, e^V correspondent trois substitutions linéaires du groupe adjoint; soient Λ_0, Λ_1, L ces trois substitutions. Soient λ_{ij}^0, λ_{ij}^1, l_{ij} leurs coefficients. Il est clair que L sera la résultante de Λ_0 et Λ_1 et par conséquent que les l sont des polynomes du premier degré tant par rapport aux λ^0 que par rapport aux λ^1.

La formule (3) du paragraphe II nous apprend que les λ^0 et les λ^1 sont des fonctions entières des u et des w; il en est donc de même des l. D'autre part, la formule (7) du paragraphe II et la discussion de cette formule qui termine ce même paragraphe nous apprend que les b_{ik} ne cessent d'être des fonctions holomorphes des l que quand L est une substitution singulière. Si donc cette dernière circonstance ne se présente pas, les b_{ik} sont des fonctions holomorphes des u et des w.

Distinguons maintenant parmi les v ce que nous venons d'appeler les v' et

les v'. Les b_{ik}, comme je viens de l'expliquer, ne dépendent que des v' et pas des v'' : ce sont d'ailleurs des fonctions linéaires des v'. La connaissance des b_{ik} en fonctions des u et des w nous fournit donc un certain nombre d'équations linéaires entre les v'. Il reste à savoir si ces équations suffiront pour déterminer les v', c'est-à-dire si les déterminants formés à l'aide de ces équations ne seront pas tous nuls.

Si cela arrivait c'est que les b_{ik} reprendraient les mêmes valeurs pour deux systèmes différents de valeurs des v', c'est-à-dire qu'il existerait deux transformations

$$V_1 = V'_1 V''_1, \qquad V_2 = V'_2 V''_2$$

(sans que V'_1 soit égal à V'_2) et telles que l'on ait, quel que soit T,

$$(V_1 T) = (V_2 T),$$

et comme

$$(V''_1 T) = (V''_2 T) = 0,$$

on aurait

$$(V'_1 T) = (V'_2 T),$$

ou

$$(V'_1 - V'_2, T) = 0,$$

c'est-à-dire que $V'_1 - V'_2$ serait une transformation distinguée ; ce qui est impossible, puisque V'_1 et V'_2 sont supposés correspondre à des valeurs différentes des v'.

Donc nos déterminants ne sont pas tous nuls ; donc de nos équations linéaires nous tirerons les v' en fonctions holomorphes des u et des w.

J'ajouterai que les λ^0 et les λ^1, et par conséquent les v' dépendent seulement des u' et des w', et pas des u'' et des w''.

Passons maintenant aux v'' [1] : nous avons, d'après la formule (1),

$$dw_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

ou, en posant

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi} = 1 + \xi\psi(\xi),$$

$$dw_i - dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

---

[1] H. Poincaré a signalé plus tard [*Nouvelles remarques sur les groupes continus* (*Rendiconti*..., t. 25, 1908, et *Œuvres*, t. 3)] que le premier membre dw_i doit être remplacé par l'expression analogue à celle qui figure au second membre, mais où les v_i sont remplacés par les w_i. Il prouve que la conclusion fondamentale, en italiques au bas de la page suivante, n'est pas altérée (J. D.).

Je suppose que les indices $1, 2, \ldots, m$ correspondent aux transformations non distinguées, c'est-à-dire aux v', aux u' et aux w', et que les indices $m+1$, $m+2$, $\ldots$, r correspondent aux transformations distinguées, c'est-à-dire aux v'', aux u'' et aux w''. Soit $i > m$; alors, si $j > m$, le rapport

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

sera égal à zéro ou à $\frac{1}{\xi}$, suivant que i est différent de j ou égal à j. En tout cas le terme correspondant de l'intégrale est nul, la fonction sous le signe intégral étant une fonction entière de ξ.

Nous pourrons donc ne conserver dans le second membre que les termes en dv_j où $j < m+1$, c'est-à-dire les termes qui dépendent des dv', et écrire

$$(6) \qquad dv_i - dw_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)} \qquad (i > m,\ j < m+1).$$

Cette formule est tout à fait équivalente à la dernière formule de la page 254 du Mémoire cité de Cambrige.

Le second membre ne dépend que des v'; ce doit être une différentielle exacte, soit $d\Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)$.

L'équation (6) nous donne alors

$$v_i - w_i - \Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots, v'_m) = \text{const.}$$

Pour $w = 0$ on doit avoir $v = u$, ce qui détermine la constante, et il vient

$$(7) \qquad v_i = u_i + w_i - \Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots, v'_m) + \Theta_i(u'_1, u'_2, \ldots, u'_m).$$

Comment les v'' pourraient-ils cesser d'être fonctions holomorphes des u et des w?

J'observe que $\xi\psi(\xi)$ est une fonction entière de ξ. Donc, en vertu d'une remarque faite à la page 238 du Mémoire cité de Cambridge [1], les dérivées

$$\frac{d\Theta_i}{dv_j}$$

seront des fonctions entières des v'. Il en sera donc de même des Θ_i. Donc les v'' ne pourront cesser d'être des fonctions holomorphes que si les v' cessent eux-mêmes de l'être, c'est-à-dire si la substitution L est singulière.

En résumé : *les v seront des fonctions holomorphes des u et des w, à moins que la substitution* L *ne soit singulière.*

---

(1) Ce tome, page 194.

Quand je dis singulière je veux dire singulière de la première sorte ; le cas de ce que j'ai appelé, à la fin du paragraphe précédent, substitutions singulières de la deuxième sorte, ne se présentera jamais. Et en effet ce serait le cas où le déterminant de la substitution L serait nul. Or cela n'arrivera pas puisque c'est le produit des déterminants des deux substitutions composantes A_0 et A_1, qui sont tous deux différents de zéro.

IV. — Groupes de rang zéro.

Il y a un cas où les formules se simplifient considérablement, c'est celui où l'équation de Killing a toutes ses racines nulles, c'est-à-dire celui où le groupe G est de rang nul. Dans ce cas, $F(\xi)$ se réduisant à $(-\xi)^r$ l'intégrale (3) du paragraphe II prend la forme suivante : nous avons sous le signe intégral, au numérateur $e^{-\xi}$ multiplié par un polynome entier par rapport aux v et à ξ, et au dénominateur ξ^r.

Il en résulte que les coefficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T' seront des polynomes entiers par rapport aux v.

Les formules (1), (2) et (3) du paragraphe III subissent des simplifications analogues. Les fonctions sous le signe intégral se réduisent en effet à des polynomes entiers par rapport aux v et à ξ, divisés par ξ^r et multipliés par l'une des deux fonctions

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}, \qquad \frac{\xi}{1-e^{-\xi}}.$$

Il résulte de là que les t sont des fonctions linéaires des dv et les dv des fonctions linéaires des t, et que les coefficients de ces deux substitutions linéaires inverses sont des polynomes entiers par rapport aux v.

On en conclut immédiatement que le déterminant de l'une ou de l'autre de ces substitutions linéaires se réduit à une constante. En effet, ce déterminant est un polynome entier par rapport aux v ; et comme les coefficients de la substitution inverse sont aussi des polynomes, il faut que ce déterminant divise tous ses mineurs du premier ordre. Il divisera donc aussi toutes ses dérivées partielles du premier ordre ; et cela n'est possible que s'il se réduit à une constante.

La formule (3) nous apprend donc que l'on a

$$X_i(f) = \Sigma W_{ik} \frac{\partial f}{\partial v_k},$$

les W_{ik} étant des polynomes entiers par rapport aux v.

Ces polynomes jouissent d'une propriété intéressante; si en effet on a

$$t_i = \varepsilon v_i,$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux transformations T et V sont permutables, de sorte que l'on a

$$dv_i = t_i = \varepsilon v_i.$$

Or

$$dv_i = \Sigma W_{ki} t_k.$$

Donc on a identiquement

(1) $$\Sigma_k W_{ki} v_k = v_i.$$

D'autre part, les transformations X_i doivent engendrer un groupe. Donc les crochets $(X_i X_j)$ doivent être des combinaisons linéaires des X_s.

Soit m le plus grand degré des polynomes W_{ki}, et soit W_{ki}^m l'ensemble des termes de degré m de W_{ki}, et en général W_{ki}^q l'ensemble des termes de degré q.

Soit

(2) $$X_i^m(f) = \Sigma W_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial v_k}.$$

Considérons le crochet $(X_i^m X_j^m)$; ce crochet représentera l'ensemble des termes de degré $2m - 1$ dans le crochet $(X_i X_j)$.

Supposons d'abord $m > 1$. Le crochet $(X_i X_j)$, qui est une combinaison des X_s, ne contient pas de terme de degré supérieur à m, et comme $2m - 1 > m$ il faut que

$$(X_i^m X_j^m) = 0.$$

Cela veut dire que *les transformations* X_i^m *engendrent un groupe* G^m *dont toutes les transformations sont permutables.*

D'autre part, la relation (1) nous donne

(1 *bis*) $$\Sigma W_{ki}^m v_k = 0.$$

Cela veut dire que la transformation

$$\Sigma t_k X_k^m$$

du groupe G^m n'altère pas le point

$$v_1 = t_1, \quad v_2 = t_2, \quad \dots, \quad v_r = t_r,$$

ni d'ailleurs aucun des points

$$v_1 = \lambda t_1, \quad v_2 = \lambda t_2, \quad \dots, \quad v_r = \lambda t_r,$$

quelle que soit la constante λ.

Cela nous avertit déjà que le groupe G^m est intransitif. En effet, un point quelconque étant inaltéré par ∞^1 transformations, les ∞^r transformations du groupe ne pourront transformer ce point qu'au plus en ∞^{r-1} points différents.

Avant d'aller plus loin, signalons quelques-unes des propriétés du groupe G^m et des fonctions W^m_{ki}.

Nous avons vu au paragraphe précédent que si

$$T = \Sigma t_k X_k(f)$$

est une substitution de notre groupe G; si

$$U = \Sigma u_k X_k(f)$$

est une autre substitution de ce même groupe, et U_0 la substitution correspondante du groupe adjoint, on a la formule

$$(TU_0) = (TU).$$

Comme (TU) appartient aussi au groupe G, nous pouvons poser

$$(TU) = T' = \Sigma t'_k X_k(f).$$

Nous poserons

$$T^q = \Sigma t_k X^q_k, \qquad T'^q = \Sigma t'_k X^q_k,$$

en définissant comme plus haut les fonctions W^q_{ki} et les symboles X^q_i. On aura alors

$$(T^m U_0) + (T^{m-1} U_0) + \ldots + (T^1 U_0) + (T^0 U_0) = T'^m + T'^{m-1} + \ldots + T'^1 + T'^0.$$

Or T^q et T'^q sont homogènes de degré q par rapport aux v, U_0 (comme appartenant au groupe adjoint dont toutes les substitutions sont linéaires) est homogène de degré o par rapport aux v, et par conséquent $(T^q U_0)$ est homogène de degré q, de sorte qu'on aura

$$(T^q U_0) = T'^q$$

et en particulier

$$(T^m U_0) = T'^m.$$

Cela signifie que *le groupe G^m est permutable aux substitutions du groupe adjoint.*

Cherchons maintenant les *invariants* du groupe G^m.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ne soit pas altéré par la substitution T^m, c'est que l'on ait

$$(3) \qquad \Sigma W^m_{ki} t_k = 0.$$

Ce sont des équations linéaires par rapport aux t, et le déterminant de ces

équations est nul comme le prouvent les relations (1 *bis*). Ces équations (3) déterminent les points qui ne sont pas altérés par la substitution T^m. Je remarque que *l'ensemble* de ces points ne sera altéré par aucune des transformations de G^m, je veux dire que ces transformations transformeront ces points les uns dans les autres. Si, en effet, M est un point inaltéré par T^m, et si e^H est une substitution quelconque du groupe G^m, qui change M en M_1, le point M_1 sera inaltéré par la transformation $e^{-H} T^m e^H$, c'est-à-dire par T^m puisque les substitutions du groupe G^m sont permutables. Donc e^H change le point M inaltéré par T^m en un autre point inaltéré par T^m. C. Q. F. D.

Revenons aux équations (3). J'ai dit que le déterminant était nul. Supposons que les mineurs des $k-1$ premiers ordres soient tous nuls également, mais que ceux du $k^{\text{ième}}$ ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Conservons alors $r-h$ des équations (3); les autres en seront des conséquences; et adjoignons-y $h-1$ équations linéaires quelconques à coefficients constants entre les t. Nous aurons ainsi $r-1$ équations, qui détermineront les rapports des t_k d'une manière et d'une seule, et la substitution

$$T^m = \sum t_k X_k^m$$

n'altérera pas le point $v_1, v_2, \ldots, v_r$; cette substitution et ses puissances seront d'ailleurs les seules substitutions du groupe G^m qui n'altèrent pas ce point et qui satisfassent à nos $h-1$ équations linéaires à coefficients constants.

De nos équations nous tirerons les rapports des t_k en fonction des v. Si une substitution quelconque du groupe G^m change les v en v', les transformations qui n'altèrent pas le point v'_i devront être les mêmes que celles qui n'altèrent pas le point v_i. Donc nos $r-1$ équations doivent encore donner les mêmes valeurs des rapports des t_k quand on y remplacera les v par les v'. En d'autres termes, les rapports des t_k tirés de nos équations devront être des invariants du groupe G^m.

Nous pouvons, pour former nos $h-1$ équations supplémentaires à coefficients constants, nous borner à égaler à zéro $h-1$ des paramètres t_k. Dans ce cas les autres t_k sont entre eux comme des mineurs d'ordre h de notre déterminant.

En résumé : *les rapports des mineurs d'ordre h du déterminant des équations* (3) *sont des invariants du groupe* G^m.

Le nombre des invariants distincts du groupe G^m doit être précisément h; car notre groupe contient ∞^r transformations. Chacun des ∞^r points $v_1, v_2, \ldots,$

v, de l'espace demeure inaltéré par ∞^h transformations; il peut donc être changé en ∞^{r-h} autres points de l'espace. Il y a donc h invariants, et h seulement.

J'ai dit plus haut que le déterminant des W_{ik} se réduit à une constante. Il est aisé de voir d'abord que cette constante est égale à 1. On a en effet (1) :

$$\Sigma W_{ki} v_k = v_i,$$

et par conséquent, en égalant dans les deux membres les termes du premier degré,

$$\Sigma W_{ki}^0 v_k = v_i,$$

d'où l'on déduit :

$$W_{ii}^0 = 1, \qquad W_{ki}^0 = 0 \qquad (i \gtrless k),$$

ce qui montre que quand les v s'annulent, c'est-à-dire quand les W_{ik} se réduisent aux W_{ik}^0, le déterminant se réduit à 1. Comme ce déterminant est une constante, il est toujours égal à 1.

Voyons quels sont ses mineurs. Si la formule (1) du paragraphe précédent s'écrit :

$$u_i = \Sigma U_{ki} dv_k,$$

nous avons vu que les U_{ki} sont des polynomes et, le déterminant étant égal à 1, ces polynomes ne sont autre chose que les mineurs en question.

Comparons maintenant les formules (1) et (2) du paragraphe précédent. Nous verrons que les polynomes W_{ki} et U_{ki} sont les uns et les autres les résidus d'une certaine intégrale et que les quantités sous le signe intégral diffèrent seulement par un certain facteur, qui est

$$\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}$$

pour l'une des intégrales et

$$\frac{\xi}{1 - e^{-\xi}}$$

pour l'autre. Développons donc ces deux facteurs :

$$\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} = \Sigma A_m \xi^m, \qquad \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} = \Sigma B_m \xi^m.$$

Soit

$$F(\xi) = \xi^r - P_1 \xi^{r-1} \ldots = \Sigma P_{ij}^m \xi^{r-m};$$

P_{ij}^m sera un polynome homogène de degré m par rapport aux v.

Nous avons défini plus haut W_{ki}^q. De même, U_{ki}^q sera l'ensemble des termes

de degré q du polynome U_{ki} ; nous trouvons alors :

$$(4)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\,U^q_{ki} = \int d\xi\,(\Sigma A_h \xi^h)\,P^q_{ik}\,\xi^{-q-1},$$

$$(5)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\,W^q_{ki} = \int d\xi\,(\Sigma B_h \xi^h)\,P^q_{ik}\,\xi^{-q-1};$$

d'où

$$U^q_{ki} = A_q P^q_{ik}, \qquad W^q_{ki} = B_q P^q_{ik}.$$

Les deux polynomes homogènes U^q_{ki} et W^q_{ki} ne diffèrent donc que par un facteur constant facile à déterminer.

Entre les éléments W_{ki} de notre déterminant et ses mineurs U_{ki} nous avons les relations bien connues :

$$\Sigma_k U_{ki} W_{jk} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$
$$\Sigma_k U_{ki} W_{ik} = 1.$$

En égalant les termes du degré le plus élevé, il vient :

$$\Sigma_k U^m_{ki} W^m_{jk} = 0,$$

quels que soient i et j ; et puisque U^m_{ki} ne diffère de W^m_{ki} que par un facteur numérique constant :

$$(6)\qquad \Sigma_k W^m_{ki} W^m_{jk} = 0.$$

De là une propriété remarquable du groupe G^m. Considérons un point particulier

$$v_1^0,\; v_2^0,\; \ldots,\; v_r^0$$

et cherchons parmi les transformations du groupe G^m celles qui conservent ce point v_i^0. Soit W^{m0}_{ki} ce que devient W^m_{ki} quand on y remplace les v_i par les v_i^0. Les substitutions cherchées seront données par les équations :

$$\Sigma_k t_k W^{m0}_{ki} = 0,$$

lesquelles, en vertu de la formule (6), admettent pour solutions :

$$(7)\qquad t_k = W^{m0}_{jk} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Combien, parmi les solutions ainsi obtenues, y en aura-t-il de distinctes ?

Le déterminant des W est, comme nous l'avons dit, nul ainsi que ses mineurs des $h-1$ premiers ordres. Cela fera donc $r-h$ solutions distinctes. Comme le problème en comporte h, on devra avoir :

$$r - h \leq h,$$

de sorte que h est au moins égal à $\frac{r}{2}$.

La relation (6) nous montre encore que si les dv_i satisfont aux relations

$$dv_i = \sum W^m_{ki} t_k,$$

qui définissent le groupe G^m, on aura :

$$(8) \qquad \sum W^m_{ij}\, dv_i = 0.$$

Les équations (8), dont $r - h$ sont distinctes, peuvent être regardées comme les équations différentielles des invariants du groupe G^m.

Mais la formule (6) n'est qu'un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale. Soit, en effet,

$$(9) \qquad h_i^q = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi . \xi^q \sum \frac{h_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

On déduira de là :

$$(10) \qquad h_i^q = \sum h_j V^q_{ji},$$

les V^q_{ji} étant des polynomes homogènes de degré q par rapport aux v, et l'on verrait, en raisonnant comme plus haut, que V^q_{ji} ne diffère de W^q_{ji} et de U^q_{ji} que par un facteur numérique constant facile à calculer.

Quant à la signification des $h^{(q)}$, elle est facile à comprendre. D'après ce que nous avons vu dans le Mémoire cité de Cambridge, si l'on pose

$$X = \sum v_i X_i, \qquad H = \sum h_i X_i, \qquad H^{(q)} = \sum h_i^q X_i,$$

on aura

$$H^{(1)} = (XH), \qquad H^{(q)} = (XH^{(q-1)}).$$

Si donc on change h_i en h_i^k dans la formule (9), il faudra changer h_i^q en h_i^{q+k} ; on a donc

$$(11) \qquad h_i^{q+k} = \sum h_j^k V^q_{ji}.$$

Comparons alors trois formules qui ne diffèrent des précédentes que par les notations :

$$h_i^{p+q} = \sum V^{p+q}_{ji} h_j, \qquad h_i^{p+q} = \sum V^q_{ki} h_k^p, \qquad h_k^p = \sum V^p_{jk} h_j;$$

nous trouverons

$$\sum_k V^q_{ki} V^p_{jk} = V^{p+q}_{ji},$$

ou, puisque les V ne diffèrent des W que par un facteur constant :

$$(6\ bis) \qquad \sum_k W^q_{ki} W^p_{jk} = C W^{p+q}_{ji},$$

C étant un facteur numérique dépendant de p et de q.

Si $p+q$ est plus grand que m, W^{p+q}_{ij} doit être nul; de sorte que

$$\Sigma_k W^{q}_{ki} W^{p}_{jk} = 0,$$

formule dont l'équation (6) n'est qu'un cas particulier.

La formule (6 *bis*) nous donne un procédé simple pour former les polynomes W.

On a en particulier :

$$\Sigma W^{m}_{ki} W^{1}_{ij} = 0,$$

de sorte que des équations du groupe G^m :

$$dx_i = \Sigma W^{m}_{ki} t_k,$$

on pourra déduire :

$$(8\ bis) \qquad \Sigma W^{q}_{ij}\, dx_i = 0,$$

nouvelle forme des équations différentielles des invariants du groupe G^m. On a, en particulier,

$$(8\ ter) \qquad \Sigma W^{1}_{ij}\, dx_i = 0.$$

Il est à remarquer que les équations (8) et (8 *bis*) ne sont que des conséquences des équations (8 *ter*); car, en vertu de (6 *bis*),

$$\Sigma W^{q}_{ij}\, dx_i = \Sigma \left[W^{q-1}_{ki} (\Sigma W^{1}_{ij}\, dx_i) \right].$$

Autre remarque : Nous avons vu plus haut que dans l'expression

$$e^{V} U = e^{V} e^{T}$$

dV ne peut jamais s'annuler. Si donc nous reprenons nos équations différentielles

$$dx_i = \Sigma W_{ki} t_k,$$

nous voyons que les r polynomes

$$\Sigma W_{k1} t_k, \quad \Sigma W_{k2} t_k, \quad \ldots, \quad \Sigma W_{kr} t_k$$

ne peuvent s'annuler tous à la fois, et cela quels que soient les coefficients arbitraires $t_1, t_2, \ldots, t_r$.

Où, pour employer le langage géométrique, les équations

$$\Sigma W_{ki} t_k = 0$$

représentent r variétés à $r-1$ dimensions dans l'espace à r dimensions. Ces r variétés ne peuvent se couper qu'à l'infini.

Ces équations différentielles peuvent d'ailleurs s'intégrer aisément, et nous

allons voir quelle est la forme de l'intégrale générale. Soit

$$e^{\mathrm{U}}e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$$

et cherchons à exprimer les v en fonctions des u et des w.

Soient Λ_0, Λ_1, L les substitutions linéaires du groupe adjoint correspondant aux transformations e^{U}, e^{W}, e^{V} ; soient λ^0_{ij}, λ^1_{ij}, l_{ij} leurs coefficients.

Les λ^0_{ij} nous seront donnés en fonctions des u, à l'aide de la formule

$$\lambda^0_{ij} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi\, e^{-\xi}\mathrm{P}'_{ij}}{(-\xi)^r},$$

où P'_{ij} est ce que devient P_{ij} quand on y remplace les v par les u ; car $\mathrm{F}(\xi)$ se réduit à $(-\xi)^r$. Le dénominateur est indépendant des u ; le numérateur est un polynome entier par rapport aux u. Donc les λ^0 sont des polynomes entiers par rapport aux u.

De même, les λ^1_{ij} seront des polynomes entiers par rapport aux w, de sorte que les l seront des polynomes entiers par rapport aux u et aux w.

Calculons maintenant les b_{ji} en fonction des l à l'aide de la formule (7) du paragraphe II ; cette formule s'écrit :

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi e^{-\xi}\,d\xi}{(1-e^{-\xi})^r}\, \mathrm{Q}_{ji},$$

car $\Phi(e^{-\xi})$ se réduit à $(1-e^{-\xi})^r$. Le seul facteur dépendant des l est Q_{ij}, qui est un polynome entier. Donc les b sont des polynomes entiers par rapport aux l, et par conséquent par rapport aux u et aux w.

Nous avons vu que les v' sont liés aux b_{ij} par des équations linéaires ; les v' sont donc aussi des polynomes entiers par rapport aux u et aux w.

[Reprenons maintenant la formule (6) du paragraphe III (1). Elle peut s'écrire

$$dw'_i - dv'_i = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j \mathrm{P}_{ij}}{(-\xi)^r},$$

car

$$\mathrm{F}(\xi) = (-\xi)^r.$$

Ici encore P_{ij} est un polynome entier par rapport aux v', de sorte que le second membre est un polynome entier par rapport aux v' ; on déduit de là, en revenant

(1) La formule (6) du paragraphe III n'est pas exacte ; *cf.* Note de la page [illegible]. Les conclusions entre crochets sont à reprendre (J. D.).

à la formule (7) du paragraphe III :

$$v''_i = w''_i + u''_i - \Theta_i(v'_k) + \Theta_i(u'_k),$$

que Θ_i est un polynome entier par rapport aux v'.

Donc les v'' sont des polynomes entiers par rapport aux u et aux w. Ainsi *les v sont des polynomes entiers par rapport aux u et aux w*; c'est-à-dire que si l'on intègre les équations différentielles

$$dv_i = \Sigma W_{ki} t_k,$$

en cherchant à exprimer les v en fonctions des w, les intégrales seront des polynomes entiers.]

V. — Étude plus détaillée du groupe paramétrique.

Reprenons l'équation

$$e^U e^W = e^V$$

du paragraphe III et étudions de plus près les v regardés comme fonctions des u et des w. Nous conserverons aux lettres X_0, X_1, L, λ^0_{ij}, λ^1_{ij}, l_{ij} la même signification qu'à la fin du paragraphe III.

Nous avons vu dans quel cas les b_{ik} cessent d'être des fonctions holomorphes des l et par conséquent des u et des w; examinons plus complètement les singularités qui peuvent se produire, et pour cela reprenons la formule (7) du paragraphe II. Cette formule est susceptible de simplification.

Le contour d'intégration doit envelopper toutes les racines de l'équation de Killing en laissant en dehors ces mêmes racines augmentées d'un multiple de $2i\pi$. Nous pouvons donc supposer que ce contour est un rectangle dont l'un des côtés, parallèle à l'axe des quantités réelles, est très grand, tandis que l'autre, parallèle à l'axe des quantités imaginaires, est égal à $2i\pi$.

Désignons par $\psi(\xi)$ la fonction sous le signe intégral. Si l'intégrale prise le long des petits côtés du rectangle tendait vers zéro, quand les grands côtés tendent vers l'infini, notre intégrale

$$\int \psi(\xi)\, d\xi,$$

prise le long du rectangle entier, pourrait être remplacée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\xi) - \psi(\xi + 2i\pi)]\, d\xi$$

prise le long de l'un des grands côtés (par exemple le long de l'axe des quantités réelles).

Les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Nous avons, en effet,

$$\psi(\xi) = \frac{\xi e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}.$$

Pour $\xi = +\infty$, $e^{-\xi}$ et par conséquent $\psi(\xi)$ tendent vers zéro ; mais pour $\xi = -\infty$, $e^{-\xi}$ tend vers l'infini. L'expression

$$\frac{e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}$$

est le quotient de deux polynomes de même degré en $e^{-\xi}$; elle tend donc vers une limite finie et déterminée que j'appelle A.

Modifions alors légèrement la formule (7); l'intégrale

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi \frac{e^{-\xi} d\xi}{e^{-\xi} - 1}$$

prise le long du rectangle est nulle, puisque à l'intérieur du rectangle le dénominateur ne s'annule que pour $\xi = 0$, et qu'alors le numérateur s'annule. Je puis donc écrire :

(7 *bis*) $$b_{ij} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi \, d\xi \, e^{-\xi} \left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{A}{e^{-\xi} - 1} \right].$$

Je poserai

$$e^{-\xi} \left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{A}{e^{-\xi} - 1} \right] = \theta(\xi)$$

et je vois que θ tend vers zéro, aussi bien pour $\xi = -\infty$ que pour $\xi = +\infty$. Alors si les grands côtés du rectangle sont très grands, l'intégrale (7 *bis*), prise le long des petits côtés, est nulle. On aura donc

$$b_{ij} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi [\xi \theta(\xi) - (\xi + 2i\pi)\theta(\xi + 2i\pi)],$$

l'intégrale étant prise le long de l'un des grands côtés. Mais la fonction $\theta(\xi)$ est périodique, de sorte que $\theta(\xi) = \theta(\xi + 2i\pi)$. C'est ce qui nous permet d'écrire tout simplement :

(7 *ter*) $$b_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi) \, d\xi.$$

Nous avons vu qu'une singularité peut se produire quand deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$.

Soient donc ω_1 et ω_2 deux de ces racines et je suppose qu'à un moment donné la différence $\omega_1 - \omega_2$ devienne égale à $2mi\pi$.

Originairement le chemin d'intégration, que j'appelle C, passe entre les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$; et c'est à l'instant où ces deux points se confondent qu'il peut y avoir une singularité. Considérons un second chemin C', ayant mêmes extrémités que C, mais laissant les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ d'un même côté. Le point $\omega_2 + 2mi\pi$ se trouvera par exemple entre ces deux chemins C et C'. L'intégrale prise le long de C sera alors égale à l'intégrale prise le long de C' plus $2\pi\sqrt{-1}\,R_2$, R_2 étant le résidu de $\theta(\xi)$ relatif à la racine $\omega_2 + 2mi\pi$, ou, ce qui revient au même, à la racine ω_2. J'écrirai

$$J(C) = J(C') + 2\pi\sqrt{-1}\,R_2,$$

en désignant par $J(C)$ l'intégrale le long du chemin C.

Quand les points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ se confondent, $J(C')$ reste holomorphe. La singularité provient donc uniquement du terme en R_2.

Supposons que les u ou les w tournent autour des valeurs qui correspondent à la singularité. Il pourra arriver :

1° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tournent autour l'un de l'autre, mais sans s'échanger. Dans ce cas R_2 et par conséquent $J(C)$ reviennent à leur valeur initiale. Les b_{ij} restent donc des fonctions uniformes des u et des w. Seulement ces fonctions peuvent devenir infinies parce qu'en général le résidu R_2 croît indéfiniment quand les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tendent l'un vers l'autre.

2° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ s'échangent. Dans ce cas R_2 se change en R_1 et par conséquent $J(C)$ en

$$J(C) + 2\pi\sqrt{-1}\,(R_1 - R_2).$$

Les b_{ij} ne sont plus des fonctions uniformes des u et des w.

Il est clair d'ailleurs que, tant que les b_{ij} restent fonctions uniformes des u et des w, il en est de même des v. Cela est évident pour les v' que l'on déduit des b_{ij} à l'aide d'équations du premier degré; [cela l'est également pour les v'' puisque les Θ_i sont des fonctions entières des v' (*cf.* la fin du § III)] (¹).

Plaçons-nous donc dans le cas où les v cessent d'être des fonctions uniformes des u et des w, et supposons que, les u et les w revenant à leurs valeurs

---

(¹) L'uniformité des v n'est pas établie ici; *voir* la Note antérieure, page 231.

initiales après avoir décrit des contours fermés, les v_i ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais à des valeurs différentes que nous appellerons v_i^0; j'écrirai d'ailleurs :

$$[illegible]$$

Alors, en faisant varier les u et les w d'une manière continue, on a pour les valeurs initiales

$$[illegible]$$

et pour les valeurs finales

$$[illegible]$$

Considérons maintenant les substitutions Λ_0, Λ_1, L du groupe adjoint, qui correspondent à e^{U}, e^{W}, e^{V}. Leurs coefficients λ^0, λ^1, l sont des fonctions entières des u et des w; ils reviendront donc à leurs valeurs initiales quand les u et les w auront décrit des contours fermés. Donc la substitution L, qui correspond à e^{V_0}, est la même que celle qui correspond à e^{V}.

Considérons maintenant la transformation

$$[illegible]$$

la substitution correspondante du groupe adjoint sera

$$\mathrm{L}\mathrm{L}^{-1},$$

c'est-à-dire l'unité. En d'autres termes, *la transformation* $e^{\mathrm{V}}\, e^{-\mathrm{V}_0}$ *sera permutable à toutes les transformations du groupe*. Elle peut d'ailleurs dans certains cas se réduire à la transformation identique.

Les transformations finies qui jouissent de cette propriété s'appelleront les transformations *spéciales*. Elles forment dans le groupe proposé un sous-groupe invariant discontinu. Toutes les racines de l'équation de Killing sont, pour ces transformations spéciales, des multiples de $2i\pi$.

Il ne faut pas confondre ces transformations spéciales avec les transformations infinitésimales qui sont permutables à toutes les transformations du groupe et qui, comme nous l'avons vu, existent dans certains groupes.

Tous les groupes contiennent-ils des transformations spéciales ? Soit d'abord une transformation e^{V}, et supposons que les racines correspondantes de l'équation de Killing soient toutes distinctes et commensurables entre elles. On pourra alors choisir la constante α de telle sorte que l'équation de Killing correspondant à $e^{\alpha\mathrm{V}}$ ait toutes ses racines multiples de $2i\pi$. La transformation $e^{\alpha\mathrm{V}}$ sera alors évidemment spéciale.

Mais ce que nous venons de dire ne s'appliquerait pas toujours au cas où

l'équation de Killing aurait des racines multiples. En effet, on sait qu'une substitution linéaire peut toujours être ramenée à une forme appelée canonique, mais que deux cas peuvent se présenter. Tantôt la forme canonique est la suivante :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

les nombres a, b, c, d pouvant être égaux ou différents. Tantôt elle est analogue à l'une des suivantes :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

les nombres e n'étant pas tous nuls.

Dans le premier cas, je dirai, pour abréger le langage, que la substitution linéaire est *ordinaire;* dans le second cas qu'elle est *parabolique*.

Or aucune puissance d'une substitution parabolique ne peut se réduire à la substitution unité.

Si alors notre groupe admet une transformation spéciale $e^{\alpha V}$, celle-ci sera une puissance d'une certaine transformation infinitésimale e^V ; si L est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^V, celle qui correspond à $e^{\alpha V}$ sera L^α. Comme $e^{\alpha V}$ est spéciale, L^α se réduira à la substitution unité. Donc L ne peut être parabolique.

Si l'équation de Killing a des racines multiples, il peut arriver que les substitutions du groupe adjoint soient paraboliques, de sorte qu'on peut se demander s'il n'y a pas des groupes qui ne contiennent pas de transformations spéciales. On peut en citer au moins un exemple : ce sont les groupes de rang zéro.

Soit maintenant e^W une transformation spéciale quelconque,

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing; ce seront des multiples de $2i\pi$. Soit e^U une transformation quelconque,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing; posons :

$$e^{\mathrm{U}}e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$$

et soient

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_r$$

les racines de l'équation de Killing correspondant à e^{V}.

Si A_0, A_1 et L sont les substitutions du groupe adjoint correspondant à e^{U}, e^{W}, e^{V}, on aura

$$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 = \mathrm{L}, \qquad \mathrm{A}_1 = 1;$$

d'où

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{L}.$$

Cela nous montre que les ω' ne diffèrent des ω que par des multiples de $2i\pi$.

Faisons varier les u d'une manière continue, les v varieront aussi d'une manière continue et il en sera de même des ω et des ω'. Mais comme la différence de l'un des ω' et de la racine ω correspondante doit rester égale à un multiple de $2i\pi$, cette différence devra demeurer constante.

Supposons que les valeurs initiales des u satisfassent aux proportions

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2} = \ldots = \frac{u_r}{w_r}$$

de telle façon qu'originairement e^{U} et e^{W} soient des puissances d'une même transformation infinitésimale; on aura originairement

$$\omega'_i - \omega_i = \varpi_i;$$

et d'après ce que nous venons de voir, *cette relation devra subsister quand on fera varier les u d'une manière continue en partant des valeurs initiales que nous venons de définir.*

Si donc l'équation de Killing, pour certaines valeurs des v, admet les racines

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r,$$

pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines

$$\omega_1 + \varpi_1, \quad \omega_2 + \varpi_2, \quad \ldots, \quad \omega_r + \varpi_r$$

et, plus généralement, pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines

$$\lambda\omega_1 + \lambda'\varpi_1, \quad \lambda\omega_2 + \lambda'\varpi_2, \quad \ldots, \quad \lambda\omega_r + \lambda'\varpi_r,$$

λ et λ' étant deux coefficients quelconques.

Si l'on fait varier les u d'une manière continue pour les faire revenir à leurs valeurs initiales après leur avoir fait décrire des contours fermés, il arrivera en

général que les racines ω se permuteront entre elles; supposons qu'elles deviennent

$$\omega_1^{(1)}, \quad \omega_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad \omega_r^{(1)},$$

les $\omega_i^{(1)}$ n'étant autre chose que les ω_i placés dans un autre ordre.

Les racines de l'équation de Killing relatives à e^{V}, qui étaient primitivement

$$(1) \qquad \omega_1 + \tau_1, \quad \omega_2 + \tau_2, \quad \ldots, \quad \omega_r + \tau_r,$$

deviendront

$$(2) \qquad \omega_1^{(1)} + \tau_1, \quad \omega_2^{(1)} + \tau_2, \quad \ldots, \quad \omega_r^{(1)} + \tau_r.$$

Or les expressions (2) ne sont autre chose (dans un autre ordre) que

$$(3) \qquad \omega_1 + \tau_1^{(-1)}, \quad \omega_2 + \tau_2^{(-1)}, \quad \ldots, \quad \omega_r + \tau_r^{(-1)},$$

les $\tau_i^{(-1)}$ n'étant autre chose que les τ_i qui sont supposés avoir subi une permutation inverse de celle qui change les ω_i en $\omega_i^{(1)}$.

Nous avons donc deux déterminations des v, ou, si l'on aime mieux, de e^{V}; dans la première les racines de l'équation de Killing sont les $\omega_i + \tau_i$, dans la seconde elles sont les $\omega_i + \tau_i^{(-1)}$. Les différences des racines sont donc

$$\tau_i^{(-1)} - \tau_i,$$

c'est-à-dire des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Plus généralement : soient p transformations spéciales indépendantes, et soient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \tau_{1,1}, & \tau_{2,1}, & \ldots, & \tau_{r,1}, \\ \tau_{1,2}, & \tau_{2,2}, & \ldots, & \tau_{r,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{1,p}, & \tau_{2,p}, & \ldots, & \tau_{r,p} \end{array} \right.$$

les racines correspondantes. Si les τ_i peuvent s'échanger entre eux (par suite de permutations analogues à celle qui change les τ_i en $\tau_i^{(-1)}$ et dont je viens de parler), les diverses permutations possibles des $\tau_{i,1}$, des $\tau_{i,2}$, ... devront figurer dans autant de lignes du tableau (4) comme si elles correspondaient à autant de transformations spéciales distinctes. Si, par exemple, $r = 3$, et si les racines sont τ_1, τ_2, τ_3, pour une des transformations spéciales et $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$ pour une autre; si enfin quand on fait décrire aux v des contours fermés, les trois racines de l'équation de Killing peuvent subir une permutation circulaire, le

tableau (4) devra être formé comme il suit :

[illegible]

Cela posé, si pour certaines valeurs des v les racines de l'équation de Killing sont

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

pour d'autres valeurs de v elles seront

[illegible]

λ, λ_1, λ_2, ..., λ_p étant $p+1$ coefficients quelconques.

Revenons maintenant sur une question que je n'ai fait qu'effleurer plus haut et qui est assez délicate.

J'ai supposé que $e^{U} e^{W}$ était susceptible de deux déterminations e^{V} et e^{V_0}, et j'ai dit que $e^{V} e^{-V_0}$ était une transformation spéciale. J'ajoute que cette transformation peut se réduire à la transformation unité.

On pourrait d'abord croire le contraire. Si, en effet, on avait

$$e^{V} e^{-V_0} = 1,$$

on aurait

$$e^{V} = e^{V_0}$$

et les deux transformations e^{V} et e^{V_0} seraient identiques, contrairement à l'hypothèse.

Ce raisonnement serait insuffisant. Nous avons en effet obtenu e^{V_0} en faisant varier les u et les w d'une manière continue, partant de certaines valeurs initiales et revenant à ces mêmes valeurs. Réservons donc les notations U, W, u, w pour désigner ces valeurs initiales; et désignons par U', W', u', w' les valeurs variables de ces mêmes quantités. Nous poserons alors :

$$e^{U'} e^{W'} = e^{V'}$$

de telle façon qu'au commencement U', W' et V' se réduisent respectivement à U, W et V, et qu'à la fin U' et W' reviennent à leurs déterminations initiales U et W, tandis que V' aboutit à une détermination différente V_0. Envisageons alors la transformation

[illegible]

Au commencement elle se réduira à la transformation identique, elle prendra ensuite diverses déterminations, et à la fin il pourrait se faire que e^{T} se réduisît de nouveau à la transformation identique. Il ne s'ensuivrait pas forcément que V' dût se réduire à V. On a en effet

$$e^{V'} = e^{-T} e^{V}.$$

Si l'on suppose $T = 0$, *l'une* des déterminations possibles du second membre est certainement e^{V}, mais il peut se faire que ce second membre ait d'autres déterminations (de même que $e^{U}e^{W}$, d'après notre hypothèse, est susceptible de deux déterminations e^{V} et e^{V_0}).

Il est aisé de faire des exemples. Je suppose que les v soient choisis de telle sorte que la différence de deux des racines de l'équation de Killing relatives à e^{V} diffère peu d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Faisons ensuite varier les t d'une manière continue, chacune de ces variables partant de la valeur zéro, décrivant un petit contour fermé, et revenant à la valeur zéro. Nous pourrons choisir ces contours de telle façon que les deux points très voisins qui représentent l'une des deux racines de Killing dont je viens de parler et l'autre racine augmentée d'un multiple convenable de $2\pi\sqrt{-1}$, que ces deux points dis-je, s'échangent l'un avec l'autre. Alors, au début $e^{-T}e^{V}$ se réduira à e^{V}, et à la fin ne se réduira pas à e^{V} bien que T se réduise de nouveau à zéro. Le raisonnement précédent est donc insuffisant.

Soient maintenant e^{W} et e^{W_0} deux transformations correspondant à une même substitution A du groupe adjoint. Soient e^{U} une autre transformation et A' la substitution correspondante du groupe adjoint. Soient

$$(12) \qquad e^{U} e^{W} = e^{V}, \qquad e^{U} e^{W_0} = e^{V_0}.$$

Il est clair que les deux transformations e^{V} et e^{V_0} correspondront à une même substitution

$$L = A'A$$

du groupe adjoint. Si donc nous appelons ω_i et ω_i^0 les racines de Killing relatives à V et V_0, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ seront des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

De même, si nous appelons θ_i et θ_i^0 les racines de Killing relatives à W et W_0, les différences $\theta_i - \theta_i^0$ seront aussi des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Si l'on fait varier U d'une manière continue, W et W_0 ne changeant pas, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ devront varier d'une manière continue, et comme ce sont des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ elles demeureront constantes. Or, pour $U = 0$,

ω_i et ω_i^0 se réduisent à θ_i et θ_i^0 ; on aura donc, quel que soit U,

$$\omega_i - \omega_i^0 = \theta_i - \theta_i^0. \tag{6}$$

Une observation avant d'aller plus loin : tout à l'heure j'ai démontré l'égalité

$$\omega'_i - \omega_i = \tau_i \tag{6 bis}$$

en partant d'une identité analogue à (5)

$$e^{U} e^{W} = e^{V}, \tag{7}$$

où e^{W} était spéciale. Pourquoi n'ai-je pas comme ici pris, pour valeur initiale de U, U = o, mais ai-je supposé pour ces valeurs initiales

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2} = \dots = \frac{u_r}{w_r}\,?$$

C'est que, pour avoir le droit de prendre à l'origine U = o, il faut être sûr que, quand les u sont très petits, les w diffèrent très peu des v ; c'est-à-dire que les accroissements subis par les v sont très petits quand ceux des u sont très petits ; c'est-à-dire que l'on n'est pas dans le voisinage d'un des points singuliers des équations différentielles auxquelles satisfont les v. C'est ce qu'on peut admettre pour l'identité (5) où e^{W} est quelconque, mais non pour l'identité (7) où e^{W} est spéciale.

Je me borne à ces rapides indications. Mais pour faire comprendre le parti qu'on pourra sans doute tirer des relations (6) et (6 *bis*), je me supposerai placé dans un cas simple, celui où l'équation de Killing a toutes ses racines simples. Soit l le rang du groupe. On pourra alors trouver l systèmes de valeurs des v, telles que les valeurs correspondantes des racines de l'équation de Killing, que j'appellerai

$$\begin{matrix} \tau_{11}, & \tau_{21}, & \dots, & \tau_{r1}, \\ \tau_{12}, & \tau_{22}, & \dots, & \tau_{r2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{1l}, & \tau_{2l}, & \dots, & \tau_{rl}, \end{matrix}$$

soient linéairement indépendantes ; je veux dire que les τ ne soient pas liés par des relations à coefficients constants de la forme

$$a_1\tau_{i1} + a_2\tau_{i2} + \dots + a_l\tau_{il} = 0 \qquad (i = 1, \dots, r),$$

de telle façon, en même temps, que les rapports des éléments d'une même ligne de ce tableau soient commensurables ; ou mieux encore que tous les t soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Les racines étant simples, les transformations correspondantes seront

spéciales, et alors nous verrons que les racines de l'équation de Killing pour une transformation quelconque seront des combinaisons linéaires des τ; je veux dire que, si

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r$$

sont les racines de l'équation de Killing, on aura :

$$\omega_i = a_1 \tau_{i1} + a_2 \tau_{i2} + \ldots + a_r \tau_{ir} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

les a étant des fonctions des v.

Ce théorème est probablement vrai dans des cas beaucoup plus généraux, mais je me suis borné à un cas très simple parce que je ne voulais qu'indiquer une marche à suivre.

VI. — Quelques mots sur les équations différentielles du groupe.

Dans le paragraphe précédent nous avons envisagé les points singuliers des fonctions v regardées comme des fonctions des u et des w, définies par l'équation

$$S(U)\,S(W) = S(V).$$

Pour cela nous nous sommes servis des relations finies qui relient les v aux u et aux w. Mais on pourrait également faire usage des équations différentielles qui définissent les v. Rappelons la forme de ces équations différentielles.

Si, par exemple, nous faisons varier les w en laissant les u invariables, si plus particulièrement nous posons

$$w = \varepsilon t, \qquad W = \varepsilon T,$$

en faisant varier ε et laissant les t invariables, de sorte que

$$S(U)\,S(\varepsilon T) = S(V), \qquad S(U)\,S(\varepsilon T + d\varepsilon T) = S(V + dV),$$

on aura l'équation différentielle

$$S(V)\,S(T\,d\varepsilon) = S(V + dV),$$

ce qui peut s'écrire, d'après la formule (2) du paragraphe III,

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi}{1 - e^{-\xi}} \ldots \xi \sum \frac{\ldots P}{F(\xi)}.$$

Les $\frac{dv_i}{d\varepsilon}$ seront donc une somme de termes de la forme suivante : chaque terme sera le produit de $\frac{1}{1 - e^{-\omega_k}}$ si ω_k est une racine de l'équation de Killing

(ou d'une puissance de $\frac{1}{1-e^{-\omega_k}}$ si ω_k est une racine multiple) et d'une fonction rationnelle des v et de ω_k.

Comment l'un de ces termes peut-il cesser d'être une fonction holomorphe des v ?

1° Si ω_k devient un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, auquel cas le premier facteur devient infini.

2° Si l'équation de Killing a une racine multiple, outre celles qui existent toujours, auquel cas le second facteur cesse d'être une fonction uniforme des v, et d'ailleurs cesse également d'être fini.

C'est le premier cas auquel nous nous attacherons particulièrement.

Si nous égalons à des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ les différentes racines de l'équation de Killing, nous obtiendrons autant d'équations entre les v que l'équation de Killing a de racines distinctes. Mais il ne s'ensuit pas que toutes les équations ainsi obtenues (et que j'appellerai les équations E) soient distinctes. Il y a, en effet, entre les racines de l'équation de Killing des relations linéaires, et il arrivera souvent que, quand une de ces racines deviendra égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, il doit en être de même, en vertu de ces relations linéaires, d'une ou de plusieurs autres racines. Si donc l'une de ces équations E est satisfaite, il pourra arriver qu'une ou plusieurs autres, parmi ces équations E, en soient des conséquences nécessaires. Nous supposerons donc que l'on donne aux v des valeurs qui satisfont à l'une des équations E et à toutes celles qui en sont des conséquences nécessaires, mais qui ne satisfont à aucune autre des équations E. Ces valeurs des v (si d'ailleurs l'équation de Killing n'a pas plus de racines multiples que pour des valeurs *quelconques* des v) constitueront ce que j'appellerai un point singulier de *première espèce* de nos équations différentielles.

Soient alors $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ les valeurs des v qui correspondent à un de ces points singuliers de première espèce; soit ω_k^0 la valeur correspondante de ω_k. Parmi les ω_k^0 il y en aura un ou plusieurs qui seront multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, soit par exemple $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_q^0$. Les équations E

$$\omega_i = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

devront (d'après l'hypothèse que nous venons de faire) être des conséquences les unes des autres. Cela veut dire que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ devront être des multiples d'une même quantité ω, de sorte que $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_q^0$ seront des multiples de la quantité correspondante ω_0, laquelle devra être un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Dans le voisinage de ce point singulier, les $\frac{dv_i}{dz}$ seront égaux à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des $v_j - v_j^0$ divisées par une puissance de $\omega - \omega_0$. La présence de cette puissance de $\omega - \omega_0$ au dénominateur provient de l'existence dans les différents termes des $\frac{dv_i}{dz}$ d'un facteur

$$\frac{1}{1 - e^{\omega_k}},$$

lequel peut être élevé au carré ou à une puissance supérieure, si la racine ω_k de l'équation de Killing est double ou multiple.

Mais ω est lié aux v par une relation algébrique

$$f(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_r) = 0,$$

laquelle se déduit immédiatement de l'équation de Killing. On a alors

$$\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{dz} = -\sum \frac{df}{dv_i}\frac{dv_i}{dz}.$$

Les dérivées de f sont des polynomes entiers par rapport aux v et à ω. Le polynome $\frac{df}{d\omega}$ n'est pas nul, sans quoi deux des racines de Killing ordinairement distinctes viendraient à se confondre et le point singulier ne serait plus de première espèce. On a donc

$$\frac{d\omega}{dz} = \sum H_i \frac{dv_i}{dz},$$

les H_i étant développables suivant les puissances des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$.

Ainsi $\frac{d\omega}{dz}$ $\left(\text{comme les } \frac{dv_i}{dz}\right)$ est égal à une fonction holomorphe des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$, divisée par une puissance de $\omega - \omega_0$.

Telle est la forme des équations différentielles dans le voisinage de notre point singulier.

Nous pouvons donc écrire

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dz} = \frac{\Omega}{(\omega - \omega_0)^p}, \qquad \frac{dv_i}{dz} = \frac{V_i}{(\omega - \omega_0)^p},$$

les Ω et les V_i étant holomorphes. Soit maintenant

$$d\tau = \frac{dz}{(\omega - \omega_0)^p};$$

il viendra

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \Omega, \qquad \frac{dv_i}{d\tau} = V_i.$$

On tirera de là, par un théorème bien connu, ω et les v, en séries procédant suivant les puissances de τ et se réduisant à ω_0 et v_i^0 pour $\tau = 0$. Soit

$$(2) \qquad \omega - \omega_0 = a_\mu \tau^\mu + a_{\mu+1} \tau^{\mu+1} + \ldots$$

ce développement; on en tirera

$$d\varepsilon = d\tau (\omega - \omega_0)^p = a_\mu^p \tau^{p\mu} d\tau + \ldots,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{a_\mu^p}{p\mu + 1} \tau^{p\mu+1} + \ldots,$$

$$\omega - \omega_0 = b\, \varepsilon^{\frac{\mu}{p\mu+1}} + \ldots,$$

b étant un coefficient constant facile à calculer. Cela montre qu'en général ω (et par conséquent les v) n'est plus une fonction uniforme de ε dans le voisinage du point singulier.

Il y aurait exception seulement dans le cas où a_μ, $a_{\mu+1}$, ... étant nuls, l'équation (2) se réduirait à $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire dans le cas où Ω serait divisible par $\omega - \omega_0$.

Mais dans ce cas, si V_i ne s'annule pas pour $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$, nos équations n'admettront pas de solution telle que l'on ait $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$ pour $\varepsilon = 0$.

Or revenons à la substitution L, qui est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^V; et étudions les équations différentielles auxquelles satisfont les coefficients l_{ij} de cette substitution; elles seront de la forme

$$(3) \qquad \frac{dl_{ij}}{d\varepsilon} = \Lambda_{ij},$$

les Λ étant des fonctions linéaires des l. Les l sont, d'autre part, des fonctions entières des v; pour $v_k = v_k^0$ ces fonctions entières se réduisent à l_{ij}^0. Les équations (3) admettront une solution telle que $l_{ij} = l_{ij}^0$ pour $\varepsilon = 0$.

Considérons cette solution, où les l sont donnés comme des fonctions holomorphes de ε.

Nous savons d'autre part que les l sont des fonctions entières des v :

$$(4) \qquad l_{ij} = \Phi_{ij}(v_k).$$

Les l_{ij} étant connus en fonctions de ε, on tirera les v_k des équations (4), lesquelles équations (4), comme nous le savons, sont satisfaites pour

$$(5) \qquad l_{ij} = l_{ij}^0, \qquad v_k = v_k^0.$$

Pour discuter ces équations (4) je ferai usage d'un lemme que j'ai démontré au début de ma Thèse inaugurale.

D'après ce lemme, dans le voisinage des valeurs (5) :

1° Ou bien les v_k seront des fonctions algébroïdes des l, et tendront vers v_k^0 quand les l_{ij} tendront vers l_{ij}^0, et par conséquent quand ε tendra vers zéro. Ce cas doit être exclu puisque les équations (1) n'admettent pas de solution se réduisant à v_k^0 pour $\varepsilon = 0$.

2° Ou bien les équations (4) cessent d'être distinctes quand on y fait $l_{ij} = l_{ij}^0$. En d'autres termes, pour une infinité de valeurs des v_k, très voisines des v_k^0, les l_{ij} se réduisent à l_{ij}^0, de sorte qu'une infinité de transformations e^V correspondent à une même substitution du groupe adjoint. C'est le « *cas d'indétermination* », sur lequel nous aurons à revenir.

Nous avons laissé de côté le cas où tous les V_i s'annuleraient. Sans le discuter à fond, je me bornerai à remarquer que cela ne peut pas avoir lieu pour toutes les valeurs des v compatibles avec la condition

$$\omega - \omega_0 = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, tous les V_i ne peuvent pas être divisibles par $\omega - \omega_0$.

Il résulte de là que, pour qu'une singularité se présente, il ne suffit pas que la différence de deux racines soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (condition que nous avons trouvée à l'aide des relations finies), il faut encore qu'une racine soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (afin que les équations différentielles présentent un point singulier).

Si donc la différence de deux racines devient égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, ou bien les v restent des fonctions holomorphes des u et des w, ou bien une troisième racine deviendra égale elle-même à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Quelle que soit celle de ces deux alternatives qui se présente, on pourra en déduire d'intéressantes conséquences. Si c'est la seconde, on pourra trouver des cas où la différence de deux racines devra être elle-même une racine ou un multiple d'une racine.

VII. — Formules diverses.

On pourrait évidemment faire, pour un groupe quelconque, quelque chose d'analogue à ce que nous avons fait pour les groupes de rang zéro.

Par exemple, les formules (1) et (2) du paragraphe III sont réciproques l'une de l'autre, puisque l'une nous donne les t en fonctions linéaires des dv, et l'autre les dv en fonctions linéaires des t. On pourrait déduire de cette réci-

procité certaines propriétés du déterminant des équations linéaires qui donnent les t, par exemple, en fonctions des dv. C'est de cette manière que nous avons démontré plus haut que ce déterminant est égal à 1 dans le cas des groupes de rang zéro.

D'un autre côté, la formule (3) du paragraphe III nous montre que les coefficients des dérivées de f dans $X_i(f)$ sont d'une forme particulière. Ce sont des sommes de termes, chacun de ces termes est le quotient d'une fonction rationnelle des v et de ω_k (ω_k étant une des racines de l'équation de Killing) par une puissance de $1 - e^{-\omega_k}$.

Considérons maintenant les crochets $(X_i X_j)$.

Quelle sera leur forme?

Soit

$$X_i = \Sigma Y_\alpha Z_\alpha \frac{df}{dv_h},$$

$$X_j = \Sigma Y'_\beta Z'_\beta \frac{df}{dv_h}.$$

Z_α étant une fonction rationnelle des v et de ω_α, Z'_β une fonction rationnelle des v et de ω_β, Y_α une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$, Y'_β une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$. On trouvera

$$(X_i X_j) = \Sigma \frac{df}{dv_h}\left(Y_\alpha Z_\alpha \frac{dY'_\beta Z'_\beta}{dv_h} - Y'_\beta Z'_\beta \frac{dY_\alpha Z_\alpha}{dv_h} \right).$$

Nous observerons que $\frac{dZ_\alpha}{dv_h}$ est, comme Z_α, une fonction rationnelle des v et de ω_α; que $\frac{dY_\alpha}{dv_h}$ peut être regardée comme la somme de deux termes égaux, chacun à un facteur constant près, à une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$; et nous pourrons écrire

(1) $$(X_i X_j) = \Sigma Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} \frac{df}{dv_h},$$

$Z_{\alpha\beta}$ étant une fonction rationnelle des v, de ω_α et de ω_β; $Y_{\alpha\beta}$ étant le produit d'une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$ par une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$.

Mais d'autre part, ces crochets $(X_i X_j)$ doivent se réduire à des combinaisons linéaires des X_k. Ils sont donc réductibles à la forme

(2) $$(X_i X_j) = \Sigma Y''_\gamma Z''_\gamma \frac{df}{dv_h},$$

Z''_γ étant une fonction rationnelle des v et d'une seule racine de l'équation de Killing ω_γ, tandis que Y''_γ est une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\gamma}$.

Dans quelles conditions une expression de la forme (1) peut-elle être réduite à la forme (2) ? C'est ce qu'il serait très intéressant d'étudier, car cette réduction n'est évidemment possible que s'il y a certaines relations entre les racines ω.

En égalant les expressions (1) et (2) du crochet $(X_i X_j)$ on obtiendra r relations de la forme

$$\Sigma Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} = \Sigma Y''_{\gamma} Z''_{\gamma}. \tag{3}$$

On pourrait évidemment dans ces relations (3) chasser les dénominateurs et les mettre sous la forme

$$\Pi = 0,$$

Π étant un polynome entier par rapport aux v, aux ω_α et aux exponentielles $e^{-\omega_\alpha}$. Mais une identité de cette forme, où figurent, d'une part des fonctions entières des v et des ω, et d'autre part des fonctions transcendantes, ne peut avoir lieu que si elle reste vraie quand on considère les exponentielles $e^{-\omega}$ comme des variables, indépendantes des v et des ω.

Les relations (3) subsistent donc quand on y considère les $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes. Si donc $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ sont des valeurs particulières quelconques des v; si les valeurs correspondantes des ω_k sont ω_k^0 et si celles des $Z_{\alpha\beta}$ et Z''_γ sont $Z^0_{\alpha\beta}$ et Z''^0_γ, on aura

$$\Sigma Y_{\alpha\beta} Z^0_{\alpha\beta} = \Sigma Y''_\gamma Z''^0_\gamma. \tag{3 bis}$$

Ce sont des relations linéaires à coefficients constants entre les $Y_{\alpha\beta}$ et les Y''_γ. Ce sont donc des relations algébriques entre les exponentielles $e^{-\omega}$. On peut obtenir une infinité de relations de cette forme, puisque l'on peut donner aux v^0 des valeurs quelconques; mais $r - l$ de ces relations au plus peuvent être distinctes (r étant l'ordre et l le rang).

L'étude de ces relations (3 *bis*) pourrait présenter quelque intérêt; elle pourrait nous renseigner sur les relations qui peuvent exister entre les racines de l'équation de Killing et les valeurs que l'on peut attribuer à l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines. On peut observer, en effet, que si la racine ω_γ est d'ordre m, $1 - e^{-\omega_\gamma}$ figure au plus à la puissance $-m$ dans Y''_γ, à la puissance $-(m+1)$ dans $Y_{\gamma\beta}$, à la puissance $-(2m+1)$ dans $Y_{\gamma\gamma}$. Le degré des relations algébriques (3 *bis*) se trouve donc limité quand l'ordre de multiplicité de chaque racine est limité.

Mais on peut encore tirer de nos équations (1) et (2) du paragraphe III un parti différent. Soit

$$e^{X+Y} = e^X e^Y.$$

Nous avons vu que l'on peut tirer de là les t en fonctions linéaires des dv [relations (1) du paragraphe III]. Soient

$$t_i = \sum \varphi_{ik}\, dv_k$$

ces relations. Nous avons vu que les φ_{ik} sont des sommes de termes, chaque terme étant le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$, ou de l'unité, par une fonction rationnelle des v et de ω.

Posons maintenant :

$$e^{V+dV+\delta V} = e^V e^T e^U = e^{V+dV} e^U ;$$

les t, les u, les dv, les δv sont supposés très petits, tandis que les v sont supposés finis. Posons de même

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}, \qquad e^{V+dV+\delta V} = e^V e^{U'} e^{T'},$$

d'où

$$e^T e^U = e^{U'} e^{T'},$$

$$U + T + (TU) = U' + T'.$$

Nous aurons

$$t_i = \sum \varphi_{ik}(v)\, dv_k.$$

La formule

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+dV} e^U$$

nous montre qu'il y a entre les $v + dv$, les δv et les u, la même relation qu'entre les v, les dv et les t ; nous avons donc

$$u_i = \sum \varphi_{ik}(v + dv)\, \delta v_k = \sum \left(\varphi_{ik} + \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} dv_s \right) \delta v_k.$$

D'un autre côté, la relation

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}$$

montre que nous avons encore la même relation entre les v, les δv et les u' ; d'où

$$u'_i = \sum \varphi_{ik}\, \delta v_k.$$

Enfin, l'égalité

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+\delta V} e^{T'}$$

montre qu'il y a encore la même relation entre les $v + \delta v$, les dv et les t' ; d'où

$$t'_i = \sum \left(\varphi_{ik} + \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s \right) dv_k.$$

En comparant les valeurs des t et des t', on trouve

$$T' - T = \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s\, dv_k\, X_i ;$$

et de même, en comparant les valeurs des u et des u' :

$$U' - U = -\sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} dv_s \, \delta v_k \, X_i.$$

D'un autre côté on a

$$(TU) = \sum (t_i u_j - t_j u_i)(X_i X_j) = \sum (\varphi_{ik}\varphi_{js} - \varphi_{jk}\varphi_{is})(dv_k \, \delta v_s - dv_s \, \delta v_k)(X_i X_j).$$

Dans la sommation du dernier membre, chacune des combinaisons des deux indices i et j, de même d'ailleurs que chacune des combinaisons des deux indices k et s, ne doit figurer qu'une fois.

Si maintenant dans

$$(TU) = T' - T - U' - U$$

nous égalons les coefficients de $dv_k \delta v_s$, il viendra

$$(4) \qquad \sum_i X_i \left(\frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} - \frac{d\varphi_{is}}{dv_k} \right) = \sum_{ij} (\varphi_{ik}\varphi_{js} - \varphi_{jk}\varphi_{is})(X_i X_j).$$

Comparons les deux membres de cette égalité. Chaque terme du premier membre est le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$ par une fonction algébrique des v. Chaque terme du second membre est le produit de deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ (provenant, par exemple, l'une du facteur φ_{ik}, l'autre du facteur φ_{js}) par une fonction algébrique des v.

Il est clair, par exemple, que si $\omega + \omega'$ n'est pas une racine, le produit des deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ devra disparaître du second membre et son coefficient être nul.

On peut donc encore entrevoir là une source de relations intéressantes.

NOUVELLES REMARQUES

SUR

LES GROUPES CONTINUS (¹)

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 25, (1908).

I. — Introduction.

J'ai déjà eu deux fois l'occasion de présenter quelques remarques sur les groupes continus, une première fois à l'occasion du jubilé de Sir G. G. Stokes (Cambridge, University Press, 1900), une seconde fois dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* [tome XV (1901), p. 321-368], ce sont ces deux Mémoires que je citerai plus loin simplement en disant « Cambridge » ou « Palerme ». Je crois devoir compléter ici ces remarques et en particulier étudier les propriétés des équations différentielles qui définissent ces groupes au point de vue de la théorie des fonctions.

Cette étude, à vrai dire, pourrait se faire par des procédés purement élémentaires, puisque ces équations différentielles sont susceptibles d'être intégrées complètement; mais il n'est pas inutile de l'aborder en partant des équations elles-mêmes; car la comparaison des résultats obtenus de la sorte avec ceux auxquels on arrive en partant des intégrales de ces équations, est instructive par elle-même; quelquefois même, cette comparaison conduit à certaines apparences paradoxales, qui jettent quelques lumières sur les propriétés générales des groupes et qu'il faut parfois quelque attention pour bien expliquer.

Rappelons d'abord les notations employées et les résultats obtenus. Le groupe considéré dérive d'un certain nombre de transformations infinitésimales; et l'une d'elles, la $i^{\text{ième}}$ par exemple, transforme les variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

(¹) Présenté le 10 novembre 1907, imprimé le 12 novembre 1907.

en

$$x_1 + \varepsilon(X_{i1}), \quad x_2 + \varepsilon(X_{i2}), \quad \ldots, \quad x_n + \varepsilon(X_{in}),$$

ε étant une constante très petite et les X_{ik} des fonctions données des x. Elle transforme donc la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en

$$f + \varepsilon \Sigma \frac{df}{dx_k}(X_{ik}) = f + \varepsilon X_i(f).$$

Ainsi se trouve défini l'opérateur

$$X_i(f) = \frac{df}{dx_1}(X_{i1}) + \frac{df}{dx_2}(X_{i2}) + \ldots + \frac{df}{dx_n}(X_{in}),$$

que je désignerai le plus souvent simplement par X_i.

Nous avons donc r opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ correspondant aux r transformations infinitésimales du groupe et nous devons en étudier les combinaisons.

Nous poserons

$$X_i X_k = X_i X_k(f) = X_i[X_k(f)]$$

et X_i^m ou $X_i^m(f)$ se définit de la même manière. Il faut remarquer que cette opération n'est pas commutative et que l'on n'a pas $X_i X_k = X_k X_i$. Nous poserons

$$(X_i X_k) = X_i X_k - X_k X_i.$$

Nous envisagerons aussi d'autres combinaisons de ces opérateurs, telles que

$$e^{tX} = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X^2(f) + \ldots.$$

Alors la transformation infinitésimale correspondant à X_i sera

$$f + \varepsilon X_i(f) = [1 + \varepsilon X_i] f,$$

ce que je puis écrire aussi

$$e^{\varepsilon X_i} f$$

ou simplement $e^{\varepsilon X_i}$, en négligeant le carré de ε.

La transformation la plus générale du groupe pourra alors être représentée par e^T, en posant

$$T = t_1 X_1 + \ldots + t_r X_r,$$

les t étant des constantes quelconques. J'introduirai d'ailleurs d'autres combinaisons linéaires des X_i que je désignerai par

$$U = \Sigma u_i X_i, \qquad V = \Sigma v_i X_i, \qquad W = \Sigma w_i X_i, \qquad \ldots.$$

On doit avoir, comme on sait, les *relations de structure*

$$(X_i X_k) = \Sigma_s c_{iks} X_s,$$

les c étant des constantes; mais ces constantes ne peuvent pas être quelconques elles doivent être choisies de façon à satisfaire aux *relations de Jacobi*

$$[(X_a X_b) X_c] + [(X_b X_c) X_a] + [(X_c X_a) X_b] = 0.$$

Nous aurons alors, en vertu des relations de structure,

$$(VT) = \Sigma b_{ik} t_i X_k,$$

où

$$b_{ik} = \Sigma_s c_{sik} v_s.$$

Nous envisagerons le déterminant

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} - \xi & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} - \xi \end{vmatrix}$$

contenant l'indéterminée ξ; l'équation

$$F(\xi) = 0$$

dite *équation de Killing* a une extrême importance. Nous désignerons les mineurs de ce déterminant par

$$P_{ik} = \frac{dF(\xi)}{db_{ik}}.$$

On sait que, lorsque deux groupes sont isomorphes, l'étude de l'un peut se ramener à celle de l'autre; il suffira donc, parmi tous les groupes qui ont même structure, d'en étudier un seul et nous choisirons celui que nous appellerons le *groupe paramétrique* et que nous définirons de la façon suivante :

Soit e^V la substitution générale du groupe, où $V = \Sigma v_i X_i$; nous choisirons pour variables $v_1, v_2, \dots, v_r$. Posons ensuite

$$e^V e^T = e^W$$

(où nous supposerons toujours $T = \Sigma t_i X_i$, $W = \Sigma w_i X_i$, ce qu'il sera inutile de répéter désormais); les w seront des fonctions des v et des t, ou, en d'autres termes, la transformation e^T transforme e^V en e^W, c'est-à-dire les v en w; c'est le groupe ainsi défini, à r variables, que nous appelons le groupe paramétrique.

Nous avons donné le moyen de former les équations différentielles de ce groupe quand on connaît les relations de structure; soit en effet

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

les t_i étant très petits; nous aurons en faisant varier seulement t_k, par exemple

(1) $$\frac{dv_i}{dt_k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{P_{ik}}{F(\xi)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation de Killing. Si par exemple toutes ces racines sont simples et qu'elles s'écrivent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, il viendra

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \sum \frac{\omega}{1-e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F'(\omega)},$$

la sommation s'étendant aux diverses racines. Une de ces racines est toujours nulle; si elle est multiple, les autres racines étant simples, on a

(1 *bis*) $$\frac{dv_i}{dt_k} = A + \sum \frac{\omega}{1-e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F'(\omega)},$$

la sommation étant étendue cette fois aux racines différentes de zéro et A représentant le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement de la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de ξ.

Outre le groupe paramétrique, nous considérerons le *groupe adjoint*. A la transformation

$$e^V e^T = e^W$$

du groupe paramétrique qui change V en W, nous ferons correspondre une substitution que nous appellerons son *adjointe*, qui sera définie par l'équation

$$e^{-T} e^V e^T = e^U$$

et qui change V en U, c'est-à-dire $v_1, v_2, \ldots, v_r$ en $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Ces substitutions adjointes forment le groupe adjoint.

On sait que les substitutions du groupe adjoint sont linéaires, c'est-à-dire que les u sont des fonctions linéaires des v, et nous avons donné [Palerme, p. 324 et 326 (1)] le moyen de former les coefficients l_{ik} de ces substitutions linéaires.

Il y a isomorphisme du groupe adjoint et du groupe paramétrique, mais cet isomorphisme n'est pas toujours holoédrique et l'on doit distinguer deux catégories de groupes. Ceux de la première catégorie ne contiennent pas de transformations *distinguées*, c'est-à-dire de transformations infinitésimales permutables à toutes les transformations du groupe; l'isomorphisme est alors

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 216 et 218.

holoédrique. Ceux de la deuxième catégorie contiennent des transformations distinguées; l'isomorphisme est alors mériédrique, car chacune de ces transformations distinguées a pour adjointe la substitution identique.

Si l'on a

$$X = \Sigma e_i X_i$$

(les X_i étant les opérateurs simples), V sera ce que nous appellerons un *opérateur composé* du groupe. Mais à chaque opérateur correspondront ce que nous appellerons des *opérateurs conjugués* de V. Si ω est une racine simple, il y aura un opérateur T tel que

$$(2) \qquad (XT) = \omega T;$$

ce sera un *opérateur conjugué du premier ordre* appartenant à la racine ω; si cette racine est simple, cet opérateur est entièrement déterminé à un facteur constant près.

Si la racine est double, par exemple, il existe toujours au moins un opérateur conjugué du premier ordre, mais il pourra exister également un *opérateur conjugué du second ordre* T_2 appartenant à la racine ω et tel que

$$(2\ bis) \qquad (XT_2) = \omega T_2 + T.$$

Alors cet opérateur n'est pas entièrement déterminé, puisqu'une combinaison linéaire quelconque de T_2 et de T satisferait également à l'équation (2 *bis*); mais nous ne regarderons pas une pareille combinaison comme un opérateur conjugué du second ordre distinct de T_2. Nous dirons que T est le *dérivé* de T_2.

C'est là le cas général; il peut arriver également, si ω est racine double, qu'il n'y ait pas d'opérateur conjugué du second ordre, mais deux opérateurs conjugués du premier ordre distincts T et T'; il est clair alors que toute combinaison linéaire de T et de T' satisfait à l'équation (2).

Si ω est racine triple, il peut y avoir un opérateur conjugué du premier ordre T, un du second ordre T_2 et un du troisième ordre T_3 tel que

$$(XT_3) = \omega T_3 + T_2.$$

Il peut y avoir aussi deux opérateurs conjugués du premier ordre et un du second ordre, ou bien encore trois du premier ordre. Et ainsi de suite.

Si les opérateurs conjugués appartenant à une racine sont tous du premier ordre, nous dirons que cette racine, quoique multiple, *se comporte comme une racine simple*.

Remarquons que V est un de ses propres opérateurs conjugués du premier ordre, appartenant à la racine zéro.

Tout cela peut s'exprimer dans un langage géométrique. Considérons $v_1, v_2, \ldots, v_r$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à r dimensions; l'équation

$$F(1) = 0,$$

où ξ a été remplacé par 1, représentera une surface algébrique que j'appellerai la *surface de Killing*. Cette surface est susceptible d'être engendrée de plusieurs manières par des droites, ou par des variétés planes à plus d'une dimension.

L'étude détaillée de cette génération ne serait pas sans intérêt.

Quoi qu'il en soit, à tout point M de cette surface correspond un opérateur V pour lequel l'une des racines de l'équation de Killing est égale à 1. Si nous envisageons un opérateur T_1 conjugué du premier ordre de V, à cet opérateur correspondra un point; si nous le joignons à l'origine, nous aurons une droite D_1, qui sera l'une des droites conjuguées du premier ordre du point M. Soient T_2 un opérateur conjugué du second ordre et T'_1 son dérivé; le plan à deux dimensions qui passe par l'origine et par les points correspondant à T_2 et T'_1 sera un plan conjugué du second ordre du point M; et ainsi de suite.

Si 1 est racine simple, la droite conjuguée correspondant à la racine 1 sera la *droite conjuguée principale* de M et le plan à $r-1$ dimensions qui passe par toutes les autres droites ou plans conjugués sera le *plan conjugué principal* de M.

Nous appellerons *série régulière d'opérateurs conjugués*, une suite d'opérateurs conjugués

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_n,$$

le premier du premier ordre, le second du second, ..., le $n^{\text{ième}}$ du $n^{\text{ième}}$ ordre, et tels que l'on ait

$$(VT_1) = \omega T_1, \qquad (VT_2) = \omega T_2 + \lambda_1 T_1, \qquad (VT_3) = \omega T_3 + \lambda_1 T_2 + \lambda_2 T_1, \qquad \ldots,$$
$$(VT_n) = \omega T_n + \lambda_1 T_{n-1} + \lambda_2 T_{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} T_1;$$

les constantes $\omega, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ doivent être les mêmes dans toutes les équations de la série, mais sont d'ailleurs quelconques; nous n'excluons pas le cas de $\lambda_i = 0$ quel que soit i; seulement dans ce cas particulier tous les opérateurs sont du premier ordre.

Deux transformations e^{V} et $e^{V'}$ auront alors une série régulière commune

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_n$$

si l'on a

$$(\mathrm{V}\,\mathrm{T}_1) = \omega\,\mathrm{T}_1, \quad (\mathrm{V}\,\mathrm{T}_2) = \omega\,\mathrm{T}_2 + \lambda_1\,\mathrm{T}_1, \quad \ldots, \quad (\mathrm{V}\,\mathrm{T}_n) = \omega\,\mathrm{T}_n + \lambda_1\,\mathrm{T}_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}\,\mathrm{T}_1;$$
$$(\mathrm{V}'\mathrm{T}_1) = \omega'\mathrm{T}_1, \quad (\mathrm{V}'\mathrm{T}_2) = \omega'\mathrm{T}_2 + \lambda'_1\,\mathrm{T}_1, \quad \ldots, \quad (\mathrm{V}'\mathrm{T}_n) = \omega'\mathrm{T}_n + \lambda'_1\,\mathrm{T}_{n-1} + \ldots + \lambda'_{n-1}\,\mathrm{T}_1;$$

les constantes ω, λ et ω', λ' peuvent d'ailleurs être différentes pour V et pour V′, mais les opérateurs T_1, T_2, ..., T_n sont les mêmes pour V et pour V′.

Cela posé, *la condition nécessaire et suffisante pour que les adjointes de e^{V} et $e^{\mathrm{V}'}$ soient permutables, c'est que V et V′ admettent un certain nombre de séries régulières communes, comprenant ensemble r opérateurs indépendants, si r est l'ordre du groupe.*

Ainsi, si le groupe est, par exemple, du sixième ordre et si V et V′ admettent une série régulière commune de trois opérateurs, une seconde série régulière commune de deux opérateurs et une troisième série régulière commune formée d'un seul opérateur du premier ordre, e^{V} et $^{\mathrm{V}'}$, seront permutables.

Plus généralement, je dirai qu'une substitution linéaire quelconque admet une *série régulière* s'il existe n combinaisons linéaires des n variables indépendantes, combinaisons que j'appelle

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

qu'elle change respectivement en

$$\omega y_1, \quad \omega y_2 + \lambda_1 y_1, \quad \omega y_3 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1, \quad \ldots, \quad \omega y_n + \lambda_1 y_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} y_1.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions linéaires soient permutables, c'est qu'elles admettent des séries régulières communes comprenant ensemble autant de combinaisons linéaires y indépendantes qu'il y a de variables.

II. — Non-uniformité des fonctions.

Soit

$$(1) \qquad e^{\mathrm{U}}\,e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}};$$

les v seront des fonctions des u et des w et notre but principal est d'étudier ces fonctions au point de vue de la théorie générale des fonctions. La première remarque que nous devons faire, c'est que ces fonctions ne sont pas en général uniformes. Si partant de certaines valeurs initiales des u et des w, et des valeurs correspondantes des v, on fait décrire aux u et aux w des contours

fermés, il est possible que les valeurs finales des v ne soient pas identiques à leurs valeurs initiales.

Si j'envisage au contraire l'équation

$$(2) \qquad e^{-W} e^{U} e^{W} = e^{V}$$

qui définit le groupe adjoint, je vois que les v sont des fonctions uniformes des u et des w. Si donc on pose

$$e^{A} e^{U} e^{B} = e^{V};$$

si l'on fait décrire à A, U et B des contours fermés; si l'on a au début et à la fin de ce contour

$$-A = B = W,$$

on sera certain que V reviendra à sa valeur primitive, si l'on a eu *constamment*

$$A = -B.$$

Mais on n'en sera plus certain, si cette relation n'a lieu qu'au début et à la fin du contour, et ne s'est pas maintenue constamment sur tout le contour.

De ce défaut d'uniformité peuvent résulter certaines particularités déconcertantes au premier abord; on est tenté d'écrire

$$e^{V} e^{-V} = 1$$

et en effet on est souvent en droit de le faire, mais pas toujours. Supposons que l'on envisage

$$e^{U} e^{W},$$

que U et W, partant par exemple de la valeur initiale zéro, suivent un chemin quelconque, à la fin duquel on ait

$$U = V, \qquad W = -V,$$

on ne sera pas certain que $e^{U} e^{W}$ tendra vers 1 (*cf.* Palerme, p. 357) (¹).

La fonction $e^{V} e^{W}$ n'étant pas uniforme, 1 est l'une des valeurs qu'elle prend pour $U = V$, $W = -V$, mais ce n'est pas la seule.

Autre exemple : Supposons que la substitution V_0 soit permutable à U_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$(3) \qquad e^{-V_0} e^{U_0} e^{V_0} = e^{U_0}.$$

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 250.

A-t-on le droit d'en déduire

$$e^{-U_0} e^{V_0} e^{U_0} = e^{V_0}, \tag{4}$$

c'est-à-dire que U_0 est permutable à V_0?

Écrivons

$$e^{-V'} e^{U} e^{V} = e^{U'}, \tag{3 bis}$$

d'où nous déduirons

$$e^{-U} e^{V'} e^{U'} = e^{V}. \tag{4 bis}$$

Si nous faisons varier U, V, U' et V' d'une manière continue, en partant de zéro, et suivant un chemin quelconque, mais de telle façon que la relation (3 *bis*) soit toujours remplie, la relation (4 *bis*) sera aussi toujours remplie.

Que signifie maintenant la relation (3)? Elle signifie que si l'on a sur le chemin constamment $V = V'$, et que les valeurs finales de U, V et V' soient U_0, V_0 et V_0, la valeur finale de U' (qui est entièrement déterminée puisque le groupe adjoint est défini par des fonctions uniformes) sera U_0.

Que signifierait maintenant la relation (4)? Ce serait que, si l'on a sur le chemin constamment $U = U'$, les valeurs finales de U, V', U' étant U_0, V_0, U_0 la valeur finale de V sera V_0. Ce n'est pas tout à fait la même chose, puisque dans un cas le chemin doit être choisi de telle façon que l'on ait constamment $V = V'$, et dans l'autre cas de telle façon que l'on ait constamment $U = U'$. On ne pourra donc sans un examen spécial déduire (4) de (3).

Si toutefois l'on avait, quelles que soient les indéterminées α et β,

$$e^{-\beta V_0} e^{\alpha U_0} e^{\beta V_0} = e^{\alpha U_0}, \tag{3 ter}$$

on aurait le droit d'en déduire

$$e^{-\alpha U_0} e^{\beta V_0} e^{\alpha U_0} = e^{\beta V_0}, \tag{4 ter}$$

car on pourrait faire varier α et β depuis o jusqu'à 1 et l'on aurait alors, tout le long du chemin, d'une part

$$V = V' = \beta V_0,$$

et d'autre part

$$U = U' = \alpha U_0.$$

C'est ce qui arrive lorsque deux transformations infinitésimales sont permutables.

Nous avons vu dans le Mémoire de Palerme que si dans l'équation (1) les inconnues v (ou, ce qui revient au même, l'opérateur V, ou la transformation e^V) sont susceptibles de plusieurs déterminations, les différentes déterminations de

la transformation e^{V} ont *même adjointe*. En d'autres termes, si V' et V'' sont deux déterminations de l'opérateur V, les opérateurs conjugués des divers ordres de V' et V'' sont les mêmes; et les racines correspondantes de l'équation de Killing sont les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$. D'où cette conséquence fort importante, que si $e^{V'}$ et $e^{V''}$ sont deux déterminations de e^{V}, *les deux transformations $e^{\alpha V'}$ et $e^{\beta V''}$ sont permutables quelles que soient les constantes α et β, pourvu toutefois que le groupe soit de la première catégorie, c'est-à-dire ne contienne pas de transformations distinguées.*

Dans ce cas, en effet, il suffit (puisque l'isomorphisme des deux groupes, adjoint et paramétrique, est holoédrique) de montrer que les deux adjointes de $e^{\alpha V'}$ et $e^{\beta V''}$ sont permutables.

Or, V et V' ont mêmes racines de Killing et mêmes opérateurs conjugués; elles diffèrent seulement parce qu'une racine de Killing, qui correspond dans V à une certaine série régulière d'opérateurs conjugués s'étant échangée avec une autre racine, correspondra dans V' à une autre série régulière d'opérateurs conjugués.

Donc V et V' auront toutes leurs séries régulières communes. Donc les adjointes $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta V'}$ et ces transformations elles-mêmes sont permutables.

III. — Transformations spéciales.

Cela posé, faisons varier dans l'équation (1) U et W d'une manière continue, de façon que V varie aussi d'une manière continue: soient U_0, W_0, V_0 les valeurs initiales de U, W, V; supposons que U et W décrivent un contour fermé C de façon à revenir à leurs valeurs initiales U_0 et W_0, mais que V ait pour valeur finale une autre détermination V'_0.

Considérons un chemin L suivi par U et W et allant de $U = W = 0$ à $U = U_0$, $W = W_0$; parcourons ce chemin de façon que la valeur de V qui correspond à $U = U_0$, $W = W_0$ soit $V = V_0$ et supposons que la valeur de V qui correspond à $U = W = 0$ soit $V = 0$.

Supposons maintenant que l'on suive le même chemin L en partant de $U = U_0$, $W = W_0$ avec la valeur $V = V'_0$. On n'arrivera pas à $U = W = 0$ avec la valeur $V = 0$; sans quoi, en revenant à $U = U_0$, $W = W_0$ par le même chemin, on y arriverait avec la valeur $V = V_0$ et non avec la valeur $V = V'_0$. Donc, s'il y a plusieurs valeurs distinctes pour V quand elle est définie par l'équation (1), il y en aura plusieurs également quand on fera $U = W = 0$;

l'une de ces valeurs sera $V = 0$, mais il y en aura d'autres et généralement une infinité.

Les transformations e^{V} qui sont ainsi les diverses solutions de l'équation

$$e^{U} e^{W} = e^{V}$$

s'appellent les *transformations spéciales* (Palerme, p. 353) (¹); elles sont caractérisées par ce fait que leur adjointe est la substitution identique.

Nous pouvons tout de suite en donner un exemple simple. Envisageons le groupe des rotations; on a (Palerme, p. 332) (²)

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation.

Les transformations spéciales correspondent aux rotations dont l'angle est multiple de 2π, et sont caractérisées par

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = k^2 \pi^2.$$

D'après ce qui précède, ou bien il y a des transformations spéciales, ou bien les v sont fonctions uniformes des u et des w (ce qui arrive par exemple dans le cas des groupes de rang zéro).

Il peut se faire également qu'il existe des transformations qui, sans être spéciales au sens propre du mot (c'est-à-dire susceptibles de s'échanger avec e^{0} quand U et W décrivent des contours fermés) ont néanmoins pour adjointe la substitution identique. Je les appellerai *quasi spéciales*.

Il importe de remarquer que ces transformations quasi spéciales jouissent de quelques-unes des plus importantes propriétés des transformations spéciales. Si, par exemple, e^{A} est spéciale ou quasi spéciale et qu'on pose

$$e^{U} e^{A} = e^{V},$$

e^{U} et e^{V} auront même adjointe; les racines de l'équation de Killing seront les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$; ces multiples devant demeurer constants quand U varie d'une manière continue, ne pourront être autre chose que les racines de e^{A} (Palerme, p. 358) (³). Donc, chaque racine de e^{V} sera égale à la racine correspondante de e^{U}, plus la racine correspondante de e^{A}, laquelle sera un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Ce n'est pas tout. Les deux transformations e^{U} et e^{V} ayant même adjointe, on

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 245.
(²) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 234.
(³) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 247.

verrait comme plus haut que, quelles que soient les constantes α et β, $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta V}$ (ou au moins leurs adjointes si le groupe est de seconde catégorie, cas sur lequel je me réserve de revenir plus loin) sont permutables.

Soit alors

$$e^{A_1}, \quad e^{A_2}, \quad \ldots, \quad e^{A_n}$$

une suite de transformations spéciales ou quasi spéciales et posons

$$e^{U} = e^{A_1} \ldots e^{A_n};$$

on verrait, toujours pour les mêmes raisons, que les diverses transformations

$$e^{\alpha U}, \quad e^{\beta_i A_i}$$

sont permutables entre elles, quelles que soient les constantes α et β_i; l'ensemble des transformations

$$e^{\alpha U + \Sigma\beta_i A_i}$$

forme un sous-groupe continu dont toutes les transformations sont permutables. Si la $k^{\text{ième}}$ racine de l'équation de Killing est ω_k pour e^{U}, et τ_{ik} pour e^{A_i}, elle sera, pour la transformation précédente,

$$\omega_k(\alpha + \Sigma\beta_i) + \Sigma\beta_i\tau_{ik}$$

(*cf.* Palerme, p. 356 *in fine*) (¹).

Comparons le résultat précédent à d'autres qui ont été obtenus par d'autres voies et pour cela reportons-nous à la Thèse de Cartan (Paris, Nony, 1894). Nous voyons qu'il y définit un certain sous-groupe γ, et que, dans les groupes simples en particulier, toutes les transformations de ce sous-groupe sont permutables. Soient maintenant deux opérateurs X_α et $X_{\alpha'}$ appartenant respectivement par rapport au sous-groupe γ à deux racines égales et de signe contraire, ω_α et $-\omega_\alpha$. Formons le crochet

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha.$$

Cartan démontre (p. 42) que pour Y_α les racines de l'équation de Killing ont leurs rapports commensurables. Il en résulte que l'on peut choisir le coefficient λ_α de façon que pour $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ toutes les racines de Killing soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, et comme d'ailleurs elles se comportent comme des racines simples, il en résulte que $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ sera spéciale ou quasi spéciale.

Le sous-groupe γ contient donc des transformations spéciales e^{A_1}, e^{A_2}, ..., e^{A_r},

---

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 240.

et la transformation la plus générale de γ peut s'écrire

$$e^{\Sigma \beta_i X_i}.$$

Comme d'ailleurs Cartan montre encore que les racines de l'équation de Killing dans ce sous-groupe sont des fonctions linéaires des β, on aperçoit l'identité foncière du résultat de Killing-Cartan avec celui que je viens d'obtenir par une voie toute différente.

Si e^{A} est une transformation spéciale, $e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}}$ sera une autre détermination de e^{U}; on aura d'ailleurs

$$e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}}$$

et

$$e^{-\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{U}},$$

c'est-à-dire que e^{U} sera permutable à e^{A}; cela résulte de ce que l'adjointe de e^{A} est la substitution identique, mais on n'aurait pas le droit d'en conclure, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut,

$$e^{-\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}} \gtrless e^{\mathrm{A}}.$$

Prenons pour exemple le groupe des rotations, et représentons chaque rotation par un vecteur ayant pour composantes v_1, v_2, v_3. Le vecteur $e^{-\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}}$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^{U} la rotation e^{A}, et comme l'angle de cette rotation est un multiple de 2π, ce vecteur ne changera pas. Au contraire, le vecteur $e^{-\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}}$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^{A} la rotation e^{U} qui altère la direction de ce vecteur. Donc $e^{-\mathrm{U}} e^{\mathrm{A}} e^{\mathrm{U}}$ et e^{A} sont deux rotations d'un même angle, multiple de 2π, mais autour d'axes différents.

Terminons par une remarque sur le sens du mot *isomorphisme*. Nous avons dit que les groupes paramétrique et adjoint sont *holoédriquement* isomorphes, dans le cas des groupes de la première catégorie. Cela n'est pas exact en un sens, puisque le groupe paramétrique contient des transformations spéciales auxquelles correspond dans le groupe adjoint la substitution identique. Cela est exact seulement *si l'on se borne à envisager les transformations infinitésimales*, et c'est dans ce sens que nous emploierons ce mot d'ordinaire.

IV. — Transformations singulières.

Reprenons l'équation $e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$, faisons décrire à U et à W un contour fermé de telle façon que V ne revienne pas à sa valeur initiale. Comme les u et les w sont $2r$ variables indépendantes, le contour fermé décrit par U et W

pourra se décomposer en contours fermés infiniment petits (ce qui n'aurait pas lieu, par exemple, si l'on avait deux variables x et y non indépendantes, liées par une relation algébrique, de telle façon que le point analytique x, y soit assujetti à rester sur une surface de Riemann non simplement connexe). Pour l'un au moins de ces contours infiniment petits, V ne reviendra pas à sa valeur initiale, la transformation correspondante e^V s'appellera une *transformation singulière*, de sorte que les diverses déterminations de e^V s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière.

On peut voir (Palerme, p. 327 à 330, 338 à 340) (¹) qu'il y a trois espèces de transformations singulières (cette classification est la même, en principe, que dans le Mémoire de Palerme, mais les dénominations sont modifiées) :

1° Les transformations singulières de la *première espèce* sont celles dont l'adjointe a son déterminant nul. Pour que e^V soit singulière de première espèce, il faut que l'une des transformations e^U, e^W soit singulière de première espèce. Comme nous supposerons en général que e^U, e^W sont régulières, les transformations singulières de première espèce n'auront pas à intervenir.

2° Les transformations singulières de la *deuxième espèce* sont celles pour lesquelles deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; il en résulte que, dans l'équation déterminante de l'adjointe, les deux racines correspondantes deviennent égales, mais *elles se comportent comme deux racines distinctes.* Dans ces conditions, les valeurs des v sont des fonctions *indéterminées* des coefficients l de l'adjointe. Ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w. Si nous prenons pour exemple le groupe des rotations, une rotation d'un angle 2π autour d'un axe quelconque (qui est en même temps une transformation spéciale) sera une transformation singulière de deuxième espèce. On voit en effet que l'adjointe se réduit à la substitution identique, de sorte que l'on trouve

$$v_1 = \alpha\pi, \quad v_2 = \beta\pi, \quad v_3 = \gamma\pi,$$

α, β, γ étant trois cosinus directeurs assujettis seulement à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

mais d'ailleurs indéterminés.

3° Les transformations singulières de la *troisième espèce* sont, comme celles de la seconde, telles que deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible] à [illegible], [illegible] à [illegible].

multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, et par conséquent que deux racines de l'équation déterminante de l'adjointe soient égales. Seulement ces deux racines égales *ne se comportent pas comme deux racines distinctes*, et l'adjointe devient une substitution linéaire *parabolique*. Dans ces conditions, si nous regardons les v comme des fonctions des u et des w, ces fonctions deviennent *infinies* et non pas indéterminées.

Nous emprunterons encore notre exemple au groupe des rotations.

Supposons que e^{U} soit une rotation imaginaire d'un angle

$$\text{arc tang}\frac{\sqrt{-8}}{3}$$

autour de l'axe des z, de telle façon que

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = \frac{1}{i}\,\text{arc tang}\frac{\sqrt{-8}}{3};$$

l'adjointe sera

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ -\sqrt{-8} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que e^{W} soit une rotation d'un angle $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des x, ayant pour adjointe

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

La résultante e^{V} aura pour adjointe

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'équation déterminante en S s'écrit

$$\begin{vmatrix} 3-S & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & -S & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & -S \end{vmatrix} = -(S-1)^3 = 0.$$

Elle a donc une racine triple, mais cette racine triple ne se comporte pas comme trois racines simples, ou comme une racine simple et une racine double. Il faudrait pour cela que les mineurs de l'équation en S s'annulassent tous à la fois pour $S = 1$, ce qui n'a pas lieu.

L'adjointe de e^{V} est donc une substitution parabolique. Quant aux racines de l'équation de Killing, elles doivent être l'une nulle, les deux autres égales et de signe contraire, ainsi qu'il advient toujours dans le groupe des rotations. Les deux racines qui ne sont pas nulles doivent être multiples de $2\pi\sqrt{-1}$; le raisonnement du paragraphe précédent montre qu'elles dépendent de k; on peut choisir la détermination de l'arc tangente, de telle façon qu'elles soient égales à $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$. Elles ne sont donc pas égales entre elles en général.

Or, si une substitution parabolique peut être une puissance d'une substitution linéaire infinitésimale, c'est à la condition que cette substitution infinitésimale soit elle-même parabolique. Si donc e^{V} a pour adjointe une substitution parabolique de la forme précédente, il faut que $e^{\alpha V}$, où α est très petit, ait également son adjointe parabolique, et par conséquent que l'équation de Killing ait ses trois racines égales.

Cela est en contradiction avec ce que nous venons de dire et la contradiction ne peut s'expliquer que parce que les v cessent d'être finis.

Il reste à étudier de quelle façon les transformations s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière; cette étude peut se faire, soit en partant des équations finies du groupe, soit en partant des équations différentielles et c'est précisément la comparaison de ces deux méthodes qui est intéressante.

V. — Groupes de la seconde catégorie.

Plusieurs des résultats précédents ne s'appliquent qu'aux groupes de la première catégorie, et nous avons à voir maintenant comment ils doivent être modifiés en ce qui concerne les groupes de la seconde catégorie, c'est-à-dire ceux qui renferment des transformations distinguées.

Parmi les opérateurs X_i qui correspondent aux diverses transformations infinitésimales du groupe, nous distinguerons ceux qui correspondent aux transformations distinguées et que nous appellerons les X''_i, et ceux qui correspondent aux autres transformations et que nous appellerons les X'_i (Palerme, p. 337) [1], et nous poserons

$$V = \Sigma v_i X_i = \Sigma v'_i X'_i + \Sigma v''_i X''_i,$$

distinguant ainsi les v' et les v''.

---

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible].

Nous voyons alors que les b_{ik}, et par conséquent les P_{ik} et $F(\xi)$ dépendent seulement des v' et pas des v'', et que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

se réduit à o ou à $\frac{1}{\xi}$ si le second indice j correspond à un des X'', à savoir : à o si les deux indices sont différents et à $\frac{1}{\xi}$ s'ils sont égaux (dans le Mémoire de Palerme il y a eu une permutation d'indices).

Si nous avons alors

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

T étant très petit, il viendra (Palerme, p. 331) [1]

$$(1) \qquad dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi \, \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \sum \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

d'où

$$\frac{dv'_i}{dt_j} = 0, \qquad \text{sauf} \qquad \frac{dv''_j}{dt_j} = 1.$$

Cherchons alors à former les équations différentielles d'où dépendent les relations de U, W et V ; nous avons

$$e^U e^W = e^V$$

ou (T étant très petit)

$$e^U e^W e^T = e^V e^T.$$

Or, en posant

$$e^W e^T = e^{W+dW}, \qquad e^V e^T = e^{V+dV},$$

il vient

$$e^U e^{W+dW} = e^{V+dV},$$

ce qui définit la relation différentielle entre les v et les w, les u restant constants.

Mais l'équation

$$e^{V+dV} = e^V e^T$$

peut s'écrire (Palerme, p. 331) [1]

$$t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

de sorte que nos relations différentielles peuvent s'écrire explicitement

$$(2) \qquad \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dw_j P^1_{ij}}{F_1(\xi)} = \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

---

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 203.

où P'_{ij} et $F_1(z)$ désignent ce que deviennent P_{ij} et $F(z)$ quand on y remplace les v par les w. Je puis les écrire aussi sous la forme

$$(3) \qquad \Sigma_j W_{ij}\,dw_j = \Sigma_j V_{ij}\,dv_j,$$

les V_{ij} étant des fonctions entières des v, et les W_{ij} les mêmes fonctions entières des w.

Par je ne sais quelle inadvertance, j'ai écrit simplement (Palerme, p. 339) (¹)

$$dw_i = \Sigma_j V_{ij}\,dv_j$$

et je voudrais d'abord faire voir que la conclusion fondamentale n'est pas altérée.

Dans le cas des groupes de la seconde catégorie, les V_{ij} ne dépendent que des v' et le coefficient de dv_j se réduit à zéro si j est différent de i, et à 1 si $j = i$.

Je puis donc écrire, si l'indice i correspond à un des v'

$$(3\ bis) \qquad \Sigma_j W'_{ij}\,dw'_j = \Sigma_j V'_{ij}\,dv'_j;$$

et si l'indice i correspond à un des v''

$$(3\ ter) \qquad dw_i - \Sigma_j W''_{ij}\,dw'_j = dv_i - \Sigma_j V''_{ij}\,dv'_j.$$

Dans l'un et l'autre cas on ne donne à l'indice j que les valeurs qui correspondent aux v'.

Cela posé, si e^V n'est pas une *transformation singulière* (c'est-à-dire si son adjointe ne satisfait pas aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent pour définir ces substitutions singulières), les v' sont des fonctions holomorphes des w' (les u étant regardés comme constants). Si dans l'équation (3 *ter*) nous remplaçons les v' par leurs valeurs en fonctions des w', les V''_{ij} qui sont des fonctions entières des v' deviendront des fonctions holomorphes des w'; il en sera de même des $\frac{dv'_i}{dw'_j}$, de sorte que je puis écrire

$$dv'_i - dw'_i = \Sigma_j H_{ij}\,dw'_j,$$

les H_{ij} étant des fonctions holomorphes des w'; on en conclut que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'' et des w'; et l'on verrait de même, si l'on faisait varier à la fois les u et les w, que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'', des w', des u'' et des u'.

En résumé, *si e^V n'est pas singulière, les v sont fonctions holomorphes*

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible].

des u et des w. C'était là notre conclusion fondamentale et elle subsiste ; en revanche la formule (7) (Palerme, p. 340) (¹) où figurent les fonctions entières Θ_i est inexacte.

VI. — Échange des déterminations.

Examinons maintenant de quelle manière se fait l'échange des diverses déterminations des fonctions v quand on tourne autour d'une transformation singulière de la seconde espèce. Ce qui caractérise ces transformations c'est, comme nous l'avons vu, que les v sont des fonctions indéterminées des u et des w, ou bien encore des fonctions indéterminées des coefficients l de l'adjointe.

Supposons par exemple que, pour une transformation singulière quelconque, il y ait trois racines de l'équation de Killing différant entre elles de multiples de $2i\pi$, et deux autres racines différant entre elles de multiples de $2i\pi$. L'équation déterminante de l'adjointe aura donc une racine triple et une racine double (se comportant comme des racines simples, puisque la transformation est singulière de seconde espèce). Par un choix convenable des variables, cette adjointe peut donc être mise sous la forme

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix},$$

tous les coefficients étant nuls sauf ceux de la diagonale principale, trois de ces derniers étant égaux à a et deux à b.

Soit e^V la transformation qui correspond à cette adjointe.

Reprenons la terminologie de la fin du paragraphe I. Pour définir V il faut se donner d'abord les racines de l'équation de Killing; ici, trois de ces racines sont égales à trois déterminations différentes de $\log a$; et deux, à deux déterminations différentes de $\log b$. Il faut se donner ensuite *les opérateurs conjugués du premier ordre* correspondant à ces diverses racines. Mais ici ces opérateurs ne sont pas entièrement déterminés ; nous savons seulement que les

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible].

trois premiers (correspondant à $\log a$) sont de la forme

$$v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3$$

et les deux suivants (correspondant à $\log b$) de la forme

$$v_4 X_4 + v_5 X_5.$$

Les opérateurs conjugués n'étant pas entièrement déterminés, les v ne le sont pas davantage, ce sont des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe et c'est pour cette raison (Palerme, p. 338) que ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w.

Une remarque avant d'aller plus loin; l'analyse précédente suppose que les racines de l'équation de Killing sont simples ou se comportent comme des racines simples.

On verra plus loin comment l'analyse devrait être modifiée s'il n'en était pas ainsi.

Envisageons maintenant, non plus la transformation singulière elle-même, mais une transformation très peu différente. Dans ce cas l'indétermination disparaît. Si donc e^{V_0} est une transformation singulière et A_0 son adjointe, A_0 ne suffira pas pour déterminer V_0; mais si e^V est une transformation non singulière ayant pour adjointe A, et si nous faisons varier V et A en les faisant tendre vers les limites V_0 et A_0, V_0 sera déterminé quand on connaîtra la suite des valeurs de A et la façon dont A a tendu vers A_0.

Par exemple, dans le groupe des rotations, toute rotation d'un angle 2π a pour adjointe la substitution identique; la connaissance de cette adjointe ne détermine donc pas la rotation, puisque nous ignorons la direction de l'axe de rotation; mais si nous savons de plus que cette rotation est la limite pour $\varepsilon = 0$ d'une rotation d'un angle $2\pi + \varepsilon$, la rotation sera déterminée puisqu'elle aura pour axe la limite vers laquelle tend l'axe de la rotation $2\pi + \varepsilon$.

Supposons que l'adjointe A_0 soit représentée par le tableau (1), une adjointe A infiniment peu différente s'obtiendra en combinant A_0 avec une substitution infinitésimale du groupe adjoint. Cette substitution infinitésimale correspondra à la transformation infinitésimale e^U du groupe paramétrique et s'écrira

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{ccccc} 1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & 1 & b_{22} & b_{23} & \dots \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \end{array}\right|.$$

les lettres b_{ik} ayant même signification qu'au paragraphe I; mais les v doivent y être remplacées par les u (puisque notre transformation est désignée par e^U);

on aura donc

$$b_{ik} = \Sigma c_{sik} u_s$$

et les u seront des quantités très petites.

Alors A, qui correspond à la transformation $e^{\mathrm{X}} = e^{\mathrm{X}_0} e^{\mathrm{U}}$ du groupe paramétrique, s'écrira

$$(3)\qquad \left\| \begin{array}{cccc} a + ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} & \dots \\ ab_{21} & a + ab_{22} & ab_{23} & \dots \\ ab_{31} & ab_{32} & a + ab_{33} & \dots \\ bb_{41} & bb_{42} & bb_{43} & \dots \\ bb_{51} & bb_{52} & bb_{53} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| .$$

Il s'agit maintenant de former les opérateurs conjugués relatifs à cette nouvelle transformation. Formons pour cela l'équation déterminante en S, en ajoutant S à tous les termes de la diagonale principale du tableau (3) et égalant à zéro le déterminant ainsi obtenu. A chaque racine de cette équation en S, correspondra un opérateur conjugué $\mathrm{T} = \Sigma t_i \mathrm{X}_i$ défini par les équations suivantes :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (a + ab_{11} + \mathrm{S})t_1 + ab_{12}t_2 + ab_{13}t_3 + \dots = 0, \\ ab_{21}t_1 + (a + ab_{22} + \mathrm{S})t_2 + ab_{23}t_3 + \dots = 0, \\ ab_{31}t_1 + ab_{32}t_2 + (a + ab_{33} + \mathrm{S})t_3 + \dots = 0, \\ bb_{41}t_1 + bb_{42}t_2 + bb_{43}t_3 + (b + bb_{44} + \mathrm{S})t_4 + \dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Envisageons en particulier celles des racines de l'équation en S qui sont voisines de $-a$ et qui sont au nombre de 3; posons donc

$$\mathrm{S} = -a - \sigma,$$

σ étant très petit. Considérons la quatrième équation (4); les b_{ik} étant très petits ainsi que σ, tous les coefficients de cette équation sont très petits, sauf celui de t_4 qui s'écrit

$$b + bb_{44} - a - \sigma$$

et qui est très voisin de $b - a$; cette équation donne donc sensiblement

$$t_4 = 0$$

et l'on trouverait de même

$$0 = t_5 = t_6 = \dots .$$

Dans ces conditions les trois premières équations (4) peuvent s'écrire (en divisant par a)

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (b_{11} - \sigma)t_1 + b_{12}t_2 + b_{13}t_3 = 0, \\ b_{21}t_1 + (b_{22} - \sigma)t_2 + b_{23}t_3 = 0, \\ b_{31}t_1 + b_{32}t_2 + (b_{33} - \sigma)t_3 = 0. \end{array} \right.$$

ce qui détermine à la fois σ et T. Ainsi les opérateurs conjugués de V_0 et par conséquent V_0 lui-même se trouveront entièrement déterminés quand nous saurons que e^{V_0} est la limite de $e^V = e^{V_0} e^U$ et que nous nous donnons la transformation infinitésimale U. Si nous ne connaissions pas U, nous saurions seulement que les trois premiers de ces opérateurs conjugués sont de la forme

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3.$$

Les indéterminées t_1, t_2, t_3, dépendent de U et nous voyons qu'ils dépendent seulement des b_{ik}, où les indices i et k prennent les valeurs 1, 2 et 3.

Si j'élimine les t entre les équations (5) j'obtiendrai une équation du troisième degré en σ, présentant quelque analogie avec l'équation de Killing. Si alors l'équation en S relative à A_0 admet h racines distinctes, a, b, etc..., il y aura h équations en σ et le degré de chacune d'elles sera l'ordre de multiplicité de la racine correspondante ; par exemple pour celle que nous venons de former, elle est du troisième degré parce qu'elle correspond à la racine a qui est triple. D'autre part, les b_{ik} étant des fonctions linéaires des u, le premier membre de l'équation en σ sera un polynome entier homogène par rapport à σ et aux u.

Nous pouvons maintenant répondre à la question : *comment s'échangent entre elles les différentes déterminations quand on tourne autour d'une transformation singulière?*

Soit

$$e^Z e^W = e^V$$

et regardons les v comme fonctions des z et des w ; je suppose que pour $W = W_0$, on ait $V = V_0$ et que e^{V_0} soit une transformation singulière ayant pour adjointe A_0. Donnons à W des valeurs voisines de W_0, et pour cela faisons

$$e^W = e^{W_0} e^U, \qquad e^V = e^{V_0} e^U,$$

U étant infinitésimale. Nous nous demandons si les diverses déterminations de V s'échangent quand W tourne autour de W_0, c'est-à-dire quand U tourne autour de O. Ces déterminations s'échangeront si les opérateurs conjugués s'échangent.

Les seuls opérateurs conjugués qui puissent s'échanger entre eux sont ceux qui correspondent à des racines égales de l'équation en S de A_0, c'est-à-dire ceux qui correspondent à une même équation en σ. Tout revient donc à savoir si deux racines d'une des équations en σ s'échangent quand on fait varier les u ; c'est ce qui arrivera certainement si cette équation est irréductible.

Reprenons le groupe des rotations et envisageons une rotation d'un angle π; les racines de l'équation de Killing sont $i\pi$, o et $-i\pi$. Deux d'entre elles diffèrent de $2i\pi$; on pourrait donc croire que la transformation est singulière. Ici l'équation en S de A_0 a deux racines égales à -1 et une à $+1$. Le tableau des b_{ik} s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix};$$

l'adjointe A_0 s'écrit

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

celui des coefficients des équations (4)

$$\begin{vmatrix} -1+S & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & -1+S & u_1 \\ u_2 & -u_1 & -1+S \end{vmatrix}.$$

On obtient deux équations en σ, l'une en faisant $S = +1 - \sigma$, correspondant à la racine double -1, l'autre en faisant $S = -1 - \sigma$, correspondant à la racine simple $+1$; la seconde de ces équations est tout simplement $-\sigma = 0$; et la première est

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -u_3 \\ u_3 & -\sigma \end{vmatrix} = (\sigma^2 + u_3^2) = 0.$$

Comme le premier membre se décompose en deux facteurs linéaires $\sigma \pm iu_3$, il ne peut pas y avoir d'échange entre les racines, et la transformation n'est pas effectivement singulière. Si nous prenons au contraire une rotation d'un angle 2π, il y a une racine triple égale à 1, et une seule équation en σ qui s'écrit

$$\sigma(\sigma^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Les deux racines $\pm i\sqrt{u_3^2 + u_2^2 + u_1^2}$ pouvant s'échanger, la transformation est effectivement singulière.

Supposons que l'équation déterminante en S ait une racine double égale à 1, correspondant à deux racines de l'équation de Killing, l'une nulle et l'autre différente de zéro, égale par exemple à $2i\pi$; il ne peut y avoir d'échange entre ces deux racines, de sorte que la transformation ne sera pas effectivement singulière. Pour qu'une transformation soit singulière, il faut donc non seulement que deux des racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$, mais que ces deux racines soient toutes deux différentes de zéro; il ne suffit

donc pas qu'une racine de l'équation de Killing devienne égale à un multiple de $2i\pi$, auquel cas, comme il y a toujours au moins une racine nulle, on pourrait dire que la différence de deux racines est multiple de $2i\pi$.

Soit A_0 une adjointe, correspondant à une transformation singulière, celle du tableau (1) par exemple.

$$e^{V_0},\quad e^{V'_0},\quad e^{V''_0},\quad \ldots,$$

différentes transformations admettant cette même adjointe; on peut en trouver une infinité puisque les v sont des fonctions indéterminées. Je dis que les puissances de ces diverses transformations appartiennent toutes à un même sous-groupe que nous allons étudier. Soient

$$B,\quad B',\quad B'',\quad \ldots$$

les adjointes de

$$e^{\alpha V_0},\quad e^{\alpha' V'_0},\quad e^{\alpha'' V''_0},\quad \ldots,$$

où α, α', α'' sont des nombres quelconques.

Il est clair que toutes ces adjointes jouiront d'une propriété commune; celle de transformer tout opérateur de la forme

$$z_1 X_1 + z_2 X_2 + z_3 X_3 \quad \text{ou} \quad z_4 X_4 + z_5 X_5,$$

par exemple, en un opérateur de la même forme, et que cette propriété commune définit un sous-groupe dans le groupe adjoint, et un sous-groupe correspondant (que j'appellerai Γ) dans le groupe paramétrique.

Reprenons la transformation infinitésimale e^U, dont nous avons parlé plus haut, et son adjointe; supposons qu'elle appartienne au sous-groupe Γ. Dans ce cas tous les b_{ik} sont nuls, à moins que les indices i et k ne soient égaux tous deux à 1, 2, ou à 3, ou bien tous deux à 4 ou à 5, ..., ou, plus généralement, ne correspondent à deux racines égales de l'équation déterminante en S, c'est-à-dire à deux termes égaux de la diagonale principale du tableau (1)

Si nous formons ensuite l'équation de Killing relative à cette transformation e^U, je vois qu'elle se décompose en autant de facteurs qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S; quelle relation y a-t-il entre ces différents facteurs et les différentes équations en σ que nous venons de former? C'est ce que nous expliquerons plus loin, dans un cas plus général, au paragraphe VIII.

Si nous revenons encore au groupe des rotations : pour une rotation d'un angle 2π, toutes les racines de l'équation en S sont égales à 1, et le sous-groupe Γ ne diffère pas du groupe total; pour une rotation d'un angle π, deux racines

seulement sont égales entre elles, et égales à 1 ; le groupe Γ comprend toutes les rotations possibles autour d'un axe déterminé, l'axe des z par exemple; dans le premier cas, l'équation de Killing du sous-groupe Γ est la même que pour le groupe total

$$\xi(\xi^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 0$$

et elle n'est pas décomposable en facteurs linéaires : la transformation est effectivement singulière; dans le second cas, cette équation se réduit à

$$\xi(\xi^2 + v_3^2) = 0$$

et elle est décomposable en facteurs linéaires : la transformation n'est pas effectivement singulière.

Remarquons maintenant qu'il peut très bien se faire qu'une transformation ne soit pas *effectivement singulière*, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas échange entre les valeurs des v quand on fait décrire aux u et aux w des contours fermés infiniment petits, et que cependant elle soit *quasi singulière*, je veux dire que les v soient des *fonctions indéterminées* des u et des w; ou, ce qui revient au même, soient des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe. On peut en citer un exemple simple; considérons le groupe des transformations

$$(x, ax + b);$$

il dérive des deux transformations infinitésimales

$$[x, (1 + \varepsilon)x], \quad (x, x + \varepsilon)$$

que j'appellerai X_1 et X_2. Alors, si l'on pose

$$(x, ax + b) = e^X, \qquad X = v_1 X_1 + v_2 X_2,$$

on a

$$a = e^{v_1}, \qquad b = (e^{v_1} - 1)\frac{v_2}{v_1},$$

d'où

$$v_1 = u_1 + w_1, \qquad \frac{v_2}{v_1}(e^{v_1} - 1) = (e^{v_1} - e^{w_1})\frac{u_2}{u_1} + (e^{w_1} - 1)\frac{w_2}{w_1}.$$

Cette formule nous montre que les v sont des fonctions uniformes de u et des w, mais en même temps que ces fonctions peuvent devenir indéterminées; c'est ce qui arrive quand v_1 et w_1 sont multiples de $2i\pi$.

Nous avons dit plus haut que si une racine de l'équation de Killing était nulle et une autre multiple de $2i\pi$, sans que la différence de deux racines, distinctes l'une et l'autre de zéro, devînt égale à un multiple de $2i\pi$, cela ne suffisait pas

pour que la transformation pût être effectivement singulière; mais en revanche elle peut être quasi singulière, l'exemple précédent le prouve suffisamment.

Enfin, il peut arriver que la différence de deux racines de l'équation de Killing soit multiple de $2i\pi$, sans que la transformation soit singulière, ni quasi singulière; c'est ce que prouve l'exemple ci-dessus des rotations de 180°.

Reprenons le groupe paramétrique G; son groupe adjoint G_α; le sous-groupe Γ défini plus haut et contenu dans G; et le sous-groupe Γ_α qui lui correspond dans G_α. Les substitutions de Γ_α sont linéaires; de plus, si le groupe G est d'ordre r, il y a r variables, mais ces variables se répartissent en autant de systèmes qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S. Chaque substitution linéaire de Γ_α résulte de la combinaison de substitutions linéaires partielles, chacune de ces substitutions linéaires partielles portant sur les variables d'un seul système. C'est là, on s'en souvient, la définition même de Γ. Ainsi, si l'on se reporte au tableau (1), chaque substitution de Γ_α se décompose : 1° en une substitution linéaire portant seulement sur v_1, v_2, v_3; 2° en une substitution linéaire portant seulement sur v_4, v_5, etc. Alors les substitutions linéaires partielles portant seulement sur v_1, v_2, v_3, par exemple, formeront un groupe que j'appellerai H_α; ce groupe sera isomorphe à Γ_α, mais l'isomorphisme pourra dans certains cas être mériédrique. Si nous formons le groupe adjoint de H_α, de façon à calculer les racines de l'équation de Killing relative au groupe H_α, nous arriverons au résultat suivant : Considérons le déterminant des coefficients d'une substitution linéaire infinitésimale de H_α; égalons ce déterminant à zéro après avoir ajouté $-(1+\sigma)$ aux termes de la diagonale principale, nous obtiendrons une certaine équation en σ. Nous distinguerons ainsi 3 équations, à savoir : l'équation (a), c'est-à-dire l'équation de Killing relative au groupe G; l'équation (b), c'est-à-dire l'équation de Killing relative au groupe H_α; et enfin l'équation en σ, que nous appellerons (c). Nous formerons ces équations pour une transformation quelconque de G et pour la substitution correspondante de H_α.

Nous trouverons alors que les racines de (c) sont quelques-unes des racines de (a) (à savoir celles qui deviennent égales entre elles et à a pour la transformation singulière qui nous a servi de point de départ); chaque racine de (b) est égale à la différence de deux racines de (c) [deux racines de (c) n'étant pas nécessairement distinctes, une des racines de (b) est toujours nulle]. Or, pour notre transformation singulière, les racines de (c) deviennent égales entre elles à des multiples près de $2i\pi$; donc toutes les racines de (b) sont égales à des

multiples de $2i\pi$, de sorte que la transformation correspondante de H_α est spéciale.

Les transformations singulières de G *correspondent donc aux transformations spéciales de* H_α.

Reprenons : notre transformation singulière e^{V_0}, son adjointe A_0, les autres transformations singulières $e^{V'_0}$, qui ont même adjointe et qui appartiennent comme e^{V_0} au sous-groupe Γ, la transformation infinitésimale e^U, la transformation finie $e^V = e^{V_0}e^U$, qui a pour adjointe A et qui tend vers $e^{V''_0}$ quand U tend vers zéro. Nous avons vu plus haut comment on forme les opérateurs conjugués de V''_0 en formant les tableaux (2) et (3) et les équations (4) et (5). Dans le cas où e^U appartient au sous-groupe Γ (c'est-à-dire où $b_{ik} = 0$, à moins que les deux indices i et k ne se rapportent à des variables d'un même système), le résultat peut s'énoncer comme il suit : *les opérateurs conjugués de* V''_0 *sont les mêmes que ceux de* U. Il en résulte que V''_0 et U sont permutables.

Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_0, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^U (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ.

Si, en particulier, toutes les racines de l'équation déterminante en S sont égales : l'adjointe A_0 se réduit à la substitution identique; la transformation singulière e^{V_0} devient une transformation spéciale; le sous-groupe Γ n'est autre chose que le groupe G lui-même. Donc, *si un groupe* G *contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.*

Ou bien considérons un groupe G; prenons dans ce groupe deux transformations e^{T_1} et e^{T_2}, la seconde tout à fait quelconque, la première assujettie aux conditions que ses racines de Killing se comportent comme des racines simples et que le rapport de deux quelconques d'entre elles soit commensurable; alors il y aura toujours dans le groupe une transformation permutable à e^{T_2} et ayant mêmes racines pour l'équation de Killing que e^{T_1}; et en effet une des puissances de e^{T_1} est une transformation spéciale ou quasi spéciale.

VII. — Discussion des équations différentielles.

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la façon dont se comportent les fonctions ψ dans le voisinage d'une transformation singulière, au moins dans

le cas où toutes les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples; pour cela nous nous sommes servis des équations finies du groupe; il conviendrait de reprendre cette étude en se servant des équations différentielles. Nous nous rappelons quelle est la forme de ces équations; si T étant infinitésimale on a

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

on peut exprimer $\frac{dv_i}{dt_k}$ en fonction des v et l'on trouve, k étant fixé,

$$(1) \qquad \frac{dv_i}{dt_k} = A_i + \Sigma B_i \frac{1}{(1-e^{-\omega_h})^m}.$$

Les A et les B sont des fonctions algébriques des v; de plus ω_h est l'une des racines de l'équation de Killing et m est un entier positif qui sera égal à 1, si, comme nous le supposons, toutes les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples.

Les seconds membres ne peuvent devenir infinis que si ω_h est un multiple de $2i\pi$.

Donc, *une transformation ne peut devenir singulière que si une des racines de l'équation de Killing est multiple de $2i\pi$*. Ainsi, pour une rotation de 180° les trois racines de l'équation de Killing sont

$$-i\pi, \quad 0, \quad i\pi;$$

la différence de deux entre elles est $2i\pi$ (ce qui est la condition que nous avions envisagée jusqu'ici), mais aucune d'elles n'est multiple de $2i\pi$, et c'est pour cette raison qu'elle n'est pas effectivement singulière.

Soit φ une fonction algébrique quelconque des v; on aura évidemment, pour tout t fixé,

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = A' + \Sigma B' \frac{1}{(1-e^{-\omega_h})^m},$$

où

$$A' = A_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + A_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \ldots + A_r \frac{d\varphi}{dv_r},$$

$$B' = B_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + B_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \ldots + B_r \frac{d\varphi}{dv_r}$$

sont des fonctions algébriques des v. De plus, si φ et ses dérivées restent finies, les seconds membres ne pourront devenir infinis que pour $e^{-\omega_h} = 1$.

Si cette condition est remplie, ou près de l'être, on se trouve dans le voisinage d'une transformation singulière ou quasi singulière. Supposons donc que $1 - e^{-\omega_h}$ soit une quantité très petite de l'ordre de ε et qu'il en soit de

même de t_k : on aura alors sensiblement (m étant égal à 1)

$$dz = B\,\frac{t_k}{1-e^{\omega_j}}\,\frac{\ }{\omega_j},$$

de sorte que dz sera fini, à moins que B ne soit nul.

Les deux transformations e^X et e^{X+dX} différeront donc d'une quantité finie.

Cela tient à ce qu'elles sont infiniment voisines de deux transformations singulières e^{X_0} et $e^{X'_0}$; mais *ces deux transformations doivent avoir même adjointe.*

Si donc φ est un des coefficients de l'adjointe, ou une fonction bien déterminée des coefficients de l'adjointe, $d\varphi$ devra être infiniment petit, c'est-à-dire que B′ devra être nul.

Supposons par exemple que ω soit une des racines de l'équation de Killing.

Si l'adjointe subit une variation infiniment petite, les racines de son équation en S, qui sont e^{ω}, subiront des variations infiniment petites et il en sera de même de ω. Si donc on prend $\varphi = \omega$, on devra avoir $B' = 0$. On a par suite

$$(3) \qquad B_1\frac{d\omega}{dv_1} + B_2\frac{d\omega}{dv_2} + \ldots + B_r\frac{d\omega}{dv_r} = 0.$$

Cette relation n'est ainsi établie que pour $\omega_h = 2ki\pi$; mais comme les B et ω sont des fonctions homogènes des v, elle devra subsister pour toutes les valeurs de ω_h.

Pour étudier cette relation cherchons à nous rendre compte de ce que sont les B_i. On a, par la formule (2) (Palerme, p. 331; voir aussi plus haut) (¹)

$$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\sum\frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Si nous envisageons une racine simple ω_h de l'équation de Killing $F(\xi) = 0$, cette racine nous donnera dans le second membre un terme

$$\frac{\omega_h}{1-e^{-\omega_h}}\sum\frac{t_j P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)}.$$

Si ce terme était le seul qui devienne infini quand $e^{-\omega_h} - 1$ s'annule, les quantités B_i seraient simplement proportionnelles à $P_{ij}(\omega_h)$ et nous pourrions écrire, pour $t = t_j$,

$$(4) \qquad P_{1j}(\omega_h)\frac{d\omega}{dv_1} + \ldots + P_{rj}(\omega_h)\frac{d\omega}{dv_r} = 0.$$

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible].

Mais il peut arriver que d'autres racines de Killing deviennent multiples de $2i\pi$ toutes les fois que ω_h est lui-même multiple de $2i\pi$, par exemple s'il y a une racine qui est toujours multiple entier de ω_h, et par exemple égale à $-\omega_h$.

Si nous avons ainsi deux racines égales et de signe contraire ω_h et $-\omega_h$, il faut envisager les deux termes

$$\frac{\omega_h}{1-e^{\omega_h}} \sum \frac{t_j P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)} - \frac{\omega_h}{1-e^{\omega_h}} \sum \frac{t_j P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)},$$

d'où

$$B = \omega_h \left[\frac{P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)} - \frac{P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)} \right].$$

On pourrait alors se demander si la relation (4) va subsister; pour s'en rendre compte, il faut examiner ce que représentent les quantités $P_{ij}(\omega_h)$; si les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples, il existe r opérateurs (dits conjugués du premier ordre)

$$U_h = \sum u_i^h X_i \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

tels que

$$(X U_h) = \omega_h U_h$$

ou

(5) $$\sum_i b_{ij} u_i^h = \omega_h u_j^h.$$

Si nous formons le déterminant Δ des r^2 coefficients u_i^h, ce déterminant ne sera pas nul et nous envisagerons les mineurs

$$\beta_i^h = \frac{d\Delta}{du_i^h}.$$

Nous pourrons même, sans restreindre la généralité, supposer $\Delta = 1$, puisque les coefficients u ne sont déterminés que par leurs rapports.

Cela posé, cherchons à déterminer deux opérateurs Y et Z satisfaisant à l'identité

(6) $$(XY) = \xi Y + Z,$$

ce qui peut encore s'écrire

(7) $$y_j F(\xi) = \sum P_{ij} z_i.$$

Supposons que l'on ait

$$Y = U_h + \varepsilon W, \quad \xi = \omega_h + \varepsilon \zeta, \quad Z = \varepsilon Z',$$

ε étant un coefficient constant très petit; nous aurons sensiblement, en supposant ω_h racine simple,

$$y_j F'(\omega_h) \zeta = \sum z_i' P_{ij}(\omega_h).$$

On voit ainsi que λ doit être une fonction linéaire des z_i

$$\lambda = \Sigma \lambda_i z_i$$

et il vient (en faisant tendre ε vers zéro)

$$P_{ij}(\omega_h) = F'(\omega_h)\lambda_j u_i^h.$$

Il reste à déterminer λ : pour cela nous avons la relation

(6 *bis*) $$(XW) - \omega_h W = \lambda U^{(h)} + Z',$$

qui se déduit de l'identité (6) en négligeant les puissances supérieures de ε.

Supposons que tous les z_i soient nuls sauf z'_j, et que $z_j = 1$; de sorte que

$$Z' = X_j, \qquad \lambda = \lambda_j.$$

Soit ensuite

$$W = \Sigma_k y_k U^{(k)}.$$

Remarquons que la résolution des équations linéaires

$$U^{(h)} = \Sigma u_i^h X_i$$

va nous donner

$$X_i = \Sigma \tau_i^h U^{(h)},$$

de sorte que

$$Z' = X_j = \Sigma \tau_j^k U^{(k)}.$$

Si donc nous remplaçons dans (6 *bis*) W et Z′ par leurs valeurs, il vient

$$\Sigma \omega_k y_k U^{(k)} - \omega_h \Sigma y_k U^{(k)} = \lambda_j U^{(h)} + \Sigma \tau_j^k U^{(k)},$$

ou, en égalant le coefficient de $U^{(h)}$,

$$0 = \lambda_j + \tau_j^h,$$

d'où

$$P_{ij}(\omega_h) = -F'(\omega_h)\tau_j^h u_i^h$$

et

$$B_j = -\omega_h(\tau_j^h u_i^h - \tau_j^{h'} u_i^{h'}),$$

l'indice h' étant celui qui correspond à la racine $-\omega_h$. Notre relation (33) (qui doit avoir lieu quel que soit j) devient alors

$$-\omega_h \tau_j^h \Sigma u_i^h \frac{d\omega}{dx_i} + \omega_h \tau_j^{h'} \Sigma u_i^{h'} \frac{d\omega}{dx_i} = 0.$$

Mais les coefficients τ_j^h ne sont pas proportionnels aux coefficients $\tau_j^{h'}$; sans quoi le déterminant Δ serait nul. On aura donc séparément

$$\Sigma u_i^h \frac{d\omega}{dx_i} = \Sigma u_i^{h'} \frac{d\omega}{dx_i} = 0.$$

c'est-à-dire que la relation (4) sera vraie séparément pour la racine ω_h et pour la racine $-\omega_h$, puisque les $P_{ij}(\omega_h)$ sont entre eux comme les u_i^h et que les $P_{ij}(-\omega_h)$ sont entre eux comme les $u_i^{h'}$.

Il est aisé de démontrer la relation (4) dans des cas plus compliqués. Si par exemple on avait à la fois les racines $\pm\alpha$ et $\pm 2\alpha$, on commencerait par donner aux v des valeurs telles que 2α soit multiple *impair* de $2i\pi$; alors les racines $\pm\alpha$ n'interviendraient pas et l'on démontrerait comme plus haut les relations (4) pour $\omega_h = 2\alpha$ et pour $\omega_h = -2\alpha$. Cela fait, on donnerait aux v des valeurs telles que α soit multiple de $2i\pi$ et l'on démontrerait ensuite aisément les équations (4) pour $\omega_h = \pm\alpha$. On pourrait aussi faire directement la démonstration, par un procédé tout semblable à celui qui précède (B_i étant une combinaison de quatre termes de la forme $\tau_j^h u_i^h$ au lieu de deux seulement).

La relation (4) est donc générale; elle a lieu quelles que soient les racines ω et ω_h, que ces racines soient identiques ou distinctes (le cas de $\omega_h = 0$ devant être exclu). Revenons maintenant aux équations (1), où nous supposons toujours $m = 1$.

Donnons aux v des valeurs qui rendent une racine multiple de $2i\pi$; généralement d'autres racines deviendront en même temps multiples de $2i\pi$. Soit

$$\omega_h = m_h \alpha$$

ces racines, où m_h est un entier positif ou négatif et α la commune mesure de toutes ces racines, laquelle doit être elle-même un multiple de $2i\pi$; nous continuerons à désigner ces racines par ω_h, et nous désignerons par ω_λ les racines qui ne deviennent pas multiples de $2i\pi$.

Si α est très voisin d'un multiple de $2i\pi$, les termes qui contiennent au dénominateur une expression de la forme $1 - e^{-\omega_h}$ seront seuls sensibles; si l'on a $e^\alpha = 1 + \varepsilon$, on aura très sensiblement

$$1 - e^{-\omega_h} = -m_h \varepsilon,$$

et les équations (1) se réduiront sensiblement à

$$\frac{dv_i}{dt_j} = -\sum \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_h \varepsilon},$$

ou, en posant $dt_k = \varepsilon\, ds_k$,

$$(8) \qquad \frac{dv_i}{ds_k} = -\sum \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_h}.$$

Les τ et les u peuvent être regardés comme des fonctions algébriques des v, de sorte que ces équations (8) nous représentent des équations différentielles

auxquelles doivent satisfaire les v. Quelle est la signification de ces équations différentielles?

On voit que, si ds_k est un infiniment petit de l'ordre de ζ, et par conséquent dt_k un infiniment petit de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, dv sera un infiniment petit de l'ordre de ζ; de sorte que les deux transformations e^V et e^{V+dV} différeront d'infiniment petits de l'ordre de ζ, tandis que leurs *adjointes* différeront d'infiniment petits de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, *c'est-à-dire d'ordre supérieur*.

Donc, quand les v varieront de façon à satisfaire aux équations différentielles (8), l'adjointe de e^V ne variera pas. Si donc nous considérons les différentes transformations singulières qui ont même adjointe, les équations différentielles (8) nous feront passer des unes aux autres d'une façon continue.

Prenons encore un instant pour exemple le groupe des rotations, et soit

$$[illegible]$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation; on aura pour les équations (8)

$$\frac{dv_1}{ds_1} = [illegible], \qquad \frac{dv_2}{ds_1} = [illegible], \qquad \frac{dv_3}{ds_1} = [illegible],$$
$$\frac{dv_1}{ds_2} = [illegible], \qquad \frac{dv_2}{ds_2} = [illegible], \qquad \frac{dv_3}{ds_2} = [illegible],$$
$$\frac{dv_1}{ds_3} = [illegible], \qquad \frac{dv_2}{ds_3} = [illegible], \qquad \frac{dv_3}{ds_3} = [illegible]$$

et l'on verra que

$$[illegible]$$

d'où $\theta = \text{const.}$ Le point représentatif restera constamment sur une sphère (dont le rayon devra être multiple de $i\pi$) et aux différents points de cette sphère correspondront diverses transformations qui auront même adjointe et qui seront d'ailleurs spéciales.

Appelons V_{ik} le second membre de (8); l'équation (8) définit une transformation infinitésimale S_k qui change v_i en $v_i + ds_k V_{ik}$, et dépendant de l'opérateur

$$S_k = \sum V_{ik} \frac{df}{dv_i}.$$

Il importe de remarquer que les opérateurs S_k ne forment pas un groupe de Lie, comme on pourrait le croire, mais les opérateurs

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v, forment un groupe continu *d'ordre infini*.

La condition pour qu'il en soit ainsi, c'est que l'on ait

$$(9) \qquad (S_j S_k) = \Sigma \Phi_{jks} S_s,$$

les Φ_{jks} étant des fonctions des v. Pour le montrer, considérons un opérateur T_k du groupe G; on obtiendra l'opérateur correspondant S_k en multipliant T_k par

$$\varepsilon = e^{\alpha} - 1$$

et faisant tendre ensuite les v vers des limites telles que ε tende vers zéro. On a alors

$$(10) \qquad \begin{cases} (T_j T_k) = \Sigma c_{jks} T_s, \\ (S_j S_k) = (\varepsilon T_j, \varepsilon T_k) = \varepsilon^2 (T_j T_k) + \varepsilon T_j(\varepsilon T_k) - \varepsilon T_k(\varepsilon T_j). \end{cases}$$

Or le crochet (εT_k) est une fonction des v et si, par exemple,

$$T_k = \Sigma \lambda_i \frac{df}{dv_i},$$

on aura

$$(\varepsilon T_k) = \Sigma \lambda_i \frac{d\varepsilon}{dv_i};$$

le crochet (εT_k) se présente comme une simple fonction des v, où ne figurent pas les dérivées $\frac{df}{dv}$. La relation (10) est donc bien de la forme (9) en prenant

$$\Phi_{jks} = \varepsilon c_{jks} \qquad (s \neq j,\ s \neq k),$$

$$\Phi_{jkj} = \varepsilon c_{jkj} + (\varepsilon T_k), \qquad \Phi_{jkk} = \varepsilon c_{jkk} - (\varepsilon T_j). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce résultat établi, voyons quelles en sont les conséquences. Dans l'espace à r dimensions, considérons un point $v_1, v_2, \ldots, v_r$, tel que α soit multiple de $2i\pi$; je l'appelle M_0. Prenons ensuite l'équation (8), pour chaque valeur de k elle définira une famille de courbes telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace à r dimensions. Nous aurons donc r familles de courbes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_r$$

correspondant aux valeurs

$$k = 1, \quad k = 2, \quad \ldots, \quad k = r.$$

Par M_0 je fais passer une courbe C_1 de la famille F_1; par chacun des points de C_1 je fais passer une courbe de la famille F_2; l'ensemble de ces courbes engendrera une surface C_2, par les divers points de cette surface C_2 je fais passer des courbes de la famille F_3 qui vont engendrer une variété C_3 à deux ou trois dimensions, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin par les divers points de la variété C_{r-1} je fasse passer des courbes de la famille F_r qui engendreront la variété C_r qui aura toujours moins de r dimensions.

Comme les opérateurs ΦS_k forment un groupe, cette variété C_r sera inaltérée par les transformations S_k, ce sera un invariant pour les équations (8); elle représente donc le lieu des points $v_1, v_2, \ldots, v_r$ qui correspondent aux diverses transformations singulières admettant une même adjointe.

Or le déterminant des τ_k^h n'étant pas nul, nous pouvons déduire des équations (8) certaines relations linéaires entre les dv_i, relations qui peuvent s'écrire

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \ldots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^p & u_2^p & \ldots & u_r^p \end{vmatrix} = 0;$$

les quantités

$$u_i^1, \quad u_i^2, \quad \ldots, \quad u_i^p$$

correspondent aux p racines ω_h

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p$$

qui deviennent simultanement multiples de $2i\pi$.

Le tableau (11) a plus de colonnes que de lignes, et il faut entendre que tous les déterminants obtenus en supprimant un nombre convenable de colonnes dans le tableau (11) doivent être nuls à la fois. Cette équation (11) définit le plan tangent à la variété C_r, et ce « plan tangent » est une variété plane ayant autant de dimensions que C_r; or il en a p.

Donc le nombre des dimensions de C_r est égal au nombre p des racines qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$; et les transformations singulières qui admettent cette même adjointe sont au nombre de ∞^p. Si une seule racine devient multiple de $2i\pi$, la variété C_r se réduit à une simple courbe.

Au sous-groupe Γ du paragraphe précédent correspond dans l'espace à r dimensions une variété plane passant par l'origine et qui doit contenir la variété C_r.

Jusqu'ici nous avons supposé que les v n'étaient assujettis qu'à une seule condition; de telle façon que, seules deviennent multiples de $2i\pi$ diverses racines dont le rapport est constant et commensurable, à savoir celles qui sont égales à une certaine fonction des v, que nous avons appelée α, multipliée par l'entier m_h.

Considérons maintenant les racines qui sont de la forme

$$\omega_i = m_h\alpha + n_h\beta.$$

α et β sont deux fonctions déterminées des v; m_h et n_h, indépendantes l'une de l'autre, sont des entiers; nous appellerons ω_h les racines qui ne sont pas de cette forme. Si nous donnons aux v des valeurs telles que α et β soient multiples de $2i\pi$, il en sera de même de toutes les racines ω_h et nous obtiendrons une nouvelle catégorie de transformations singulières. Soit

$$e^{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad e^{\beta} = 1 + \zeta;$$

ε et ζ étant très petits, les équations (1) se réduiront sensiblement à

$$(12) \qquad \frac{dv_i}{dt_k} = \sum \frac{\omega_h z_k^h u_i^h}{m_h \varepsilon + n_h \zeta},$$

ou bien

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \sum \frac{\omega_h z_k^h}{m_h \varepsilon + n_h \zeta} \frac{dv_i}{ds_h}$$

avec

$$(8\ bis) \qquad \frac{dv_i}{ds_h} = u_i^h.$$

On aurait ainsi défini l'opérateur

$$S_h = \sum u_i^h \frac{df}{dv_i}$$

qui correspondrait à une transformation infinitésimale changeant v_i en

$$v_i + u_i^h \, ds_h.$$

Ici encore les opérateurs S_h ne forment pas un groupe, mais les opérateurs ΦS_h où Φ est une fonction arbitraire des v, forment un groupe continu d'ordre infini; nous trouvons en effet, en résolvant les équations (1) par rapport aux u_i^h et aux u'_i

$$u_i^h = (1 - e^{-\omega_h}) \sum A_{k,h} \frac{dv_i}{dt_k},$$

les $A_{k,h}$ étant des fonctions des v dépendant des indices k et h, mais indépendantes de l'indice i, ou bien encore

$$S_h = (1 - e^{-\omega_h}) \sum A_{k,h} T_k.$$

En se servant de cette formule [par un raisonnement analogue à celui qui précède et où intervenaient les équations (9) et (10)], on établirait que les ΦS_h forment un groupe et l'on en conclurait que les équations analogues aux équations (11)

$$(11\ bis) \qquad \begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \dots & dv_r \\ u_1^h & u_2^h & \dots & u_r^h \end{vmatrix} = 0.$$

où h prend p valeurs distinctes s'il y a p racines qui deviennent multiples de $2i\pi$, où par conséquent le premier membre est un tableau à r colonnes et $p+1$ lignes, on en conclurait, dis-je, que ces équations définissent une variété qui n'est autre que C_r et qui a précisément p dimensions. Ce seraient donc les mêmes résultats que dans le cas simple examiné d'abord.

Considérons par exemple le groupe linéaire fractionnaire à deux variables

$$\left[x, y ; \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right].$$

Il est d'ordre 8. Si α, β, γ sont les trois racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ a' & b'-S & c' \\ a'' & b'' & c''-S \end{vmatrix} = 0,$$

les huit racines de l'équation de Killing sont

$$0, \quad 0, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha-\gamma, \quad \beta-\alpha, \quad \beta-\gamma, \quad \gamma-\alpha, \quad \gamma-\beta.$$

Si l'on a

$$\alpha \equiv \beta$$

(je veux dire par là que α est égal à β plus un multiple de $2i\pi$), on aura

$$\alpha-\beta \equiv \beta-\alpha \equiv 0$$

et l'on aura une première famille de transformations singulières, la variété C_r étant à deux dimensions. Si l'on a

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma,$$

toutes les racines non nulles sont multiples de $2i\pi$ et l'on a une seconde famille de transformations singulières, d'ailleurs spéciales, pour lesquelles la variété C_r est à six dimensions.

VIII. — Cas des racines multiples.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons toujours supposé que les racines de l'équation de Killing se comportaient comme des racines simples; qu'y aurait-il à changer s'il n'en était pas ainsi? L'adjointe A_0 ne pourrait plus en général être ramenée par un choix convenable des variables à la forme du tableau (1) du paragraphe VI. Elle peut toutefois être ramenée à une autre forme canonique.

Considérons le groupe des substitutions linéaires permutables à A_0.

Le groupe commun à ce groupe et au groupe adjoint s'appellera Γ_α; de sorte que les substitutions de Γ_α feront partie du groupe adjoint et seront permutables à A_0 (qui est par définition l'adjointe de e^{V_0}, $e^{V_0'}$, ...), mais pourront ne pas l'être aux adjointes de $e^{\alpha V_0}$, $e^{\beta V_0'}$, ... Le groupe paramétrique G étant isomorphe à son groupe adjoint, au sous-groupe Γ_α du groupe adjoint correspondra dans le groupe G un sous-groupe que j'appelle Γ.

Il est clair alors que $e^{\alpha V_0}$, $e^{\beta V_0'}$, ... feront partie de Γ, de sorte que ce sous-groupe joue bien le même rôle que le groupe du même nom dans le paragraphe VI.

Soit alors e^U une transformation infinitésimale quelconque du groupe G; posons

$$e^V = e^{V_0'} e^U,$$

e^V aura une adjointe A très peu différente de A_0; quand U tendra vers zéro, V tendra vers un certain opérateur V_0', et A vers A_0, de sorte que la transformation limite $e^{V_0'}$ aura pour adjointe A_0.

Quand on connaît la façon dont U tend vers zéro, les opérateurs conjugués de V_0' se trouvent entièrement déterminés, et il en est de même de V_0' lui-même. Cela se verrait par une analyse toute pareille à celle du paragraphe VI. Si en particulier e^U fait partie de Γ, le résultat s'énonce très simplement; les opérateurs conjugués de V, et à la limite ceux de V_0', sont les mêmes que ceux de U. En effet, si e^U fait partie de Γ, son adjointe B est permutable à A_0; je dis à A_0 et non à l'adjointe de $e^{\alpha V_0}$.

Cela veut dire que les deux substitutions linéaires A_0 et B (à r variables) admettent des *séries régulières communes* comprenant ensemble r combinaisons linéaires (indépendantes entre elles) des variables. Et cela *au moins* d'une manière (*cf.* § I, *in fine*). Ces séries appartiendront également à leur résultante

$$A = A_0 B.$$

Elles nous donneront donc les opérateurs conjugués de e^V qui seront les mêmes que ceux de e^U.

Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que e^U fait partie de Γ; je veux dire que si $e^{V_0'}$ est la limite de

$$e^V = e^{\alpha U}$$

pour $\alpha = 0$, e^U ne faisant pas partie de Γ, nous pourrons trouver une substitu-

tion $e^{U'}$ faisant partie de Γ et telle que e^{V_1} soit également la limite de

$$e^{V_1} e^{\alpha U'} \quad (\alpha = 0).$$

Il suffit en effet de prendre $U' = V_0$; car

$$e^{V_1} e^{\alpha V_0} = e^{(\alpha+1)V_1},$$

puisque ces deux transformations ont même adjointe et ne sont pas singulières; et pour $\alpha = 0$ il reste

$$\lim e^{V_1} e^{\alpha V'_0} = e^{V_0}.$$

Supposons maintenant

$$e^{V_1} = \lim e^{V_1} e^{\alpha U};$$

e^{U} ne faisant pas forcément partie de Γ, faisons varier U d'une manière continue et de façon à le faire revenir finalement à sa valeur initiale; dans quelles conditions les différentes déterminations de V'_0 pourront-elles s'échanger? Les coefficients de l'adjointe de $e^{V_0}e^{\alpha U}$ sont des fonctions uniformes des u, ils devront donc revenir à leurs valeurs initiales; il en est donc de même de *l'ensemble* des opérateurs conjugués de V'_0; ces opérateurs conjugués peuvent seulement s'échanger entre eux; les racines de l'équation de Killing d'autre part n'ont pas varié, car elles sont restées égales aux logarithmes des racines de l'équation en S de l'adjointe A_0.

Soient alors e^{B_0} et e^{B_1} les valeurs initiale et finale de $e^{V'_0}$; les racines de l'équation de Killing de B_0 seront alors $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs conjugués $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; les racines de l'équation de Killing de B_1 seront encore $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, correspondant aux opérateurs conjugués μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_r$ qui ne seront autre chose que les opérateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, dans un autre ordre.

L'ensemble des opérateurs conjugués étant les mêmes pour e^{B_0} et pour e^{B_1}, ces deux transformations sont permutables et si nous considérons la transformation

$$e^{hB_0} e^{(1-h)B_1},$$

où h est un nombre arbitraire, cette transformation qui fait d'ailleurs partie de Γ a mêmes opérateurs conjugués que e^{B_0} et que e^{B_1}; quand nous ferons croître h depuis 0 jusqu'à 1, les opérateurs conjugués ne changeront pas, et les racines de l'équation de Killing varieront d'une manière continue; la transformation se réduit pour $h = 0$, à e^{B_1} et elle admet par conséquent les racines ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$; pour $h = 1$, elle se réduit à e^{B_0}, les opérateurs sont restés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, et les racines sont deve-

nues $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_r$. Comme nous sommes revenus à la transformation initiale, les racines ω' ne sont autre chose que les racines ω dans un autre ordre, de même que les μ ne sont autre chose que les λ dans un autre ordre; la correspondance entre les racines et les opérateurs doit être rétablie, de sorte que c'est la même permutation qui fait passer des ω aux ω', et des λ aux μ.

Ainsi donc, nous sommes partis de e^{B_0} et nous sommes allés à e^{B_1} en faisant

$$e^{V'_0} = e^{V_0} e^{tU}$$

et faisant varier U d'une manière continue comme nous l'avons dit; puis nous sommes revenus de e^{B_1} à e^{B_0} en prenant

$$e^{hB_0 + (1-h)B_1}.$$

Notre transformation n'a jamais cessé de faire partie de Γ *et les racines de l'équation de Killing se sont permutées.*

A tout échange entre deux déterminations de V'_0, correspond donc un échange entre deux racines de l'équation de Killing relative au sous-groupe Γ. Je veux dire l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique relatif à ce sous-groupe; cette équation est de degré r et il ne faut pas la confondre avec l'équation de Killing du sous-groupe, obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique du sous-groupe, et dont le degré est égal à l'ordre du sous-groupe. Pour ces distinctions, *voir* Cartan, *Thèse inaugurale*, p. 28.

Réciproquement, si deux racines de cette équation s'échangent, deux des déterminations de V'_0 s'échangeront, sauf une restriction sur laquelle nous reviendrons.

Reprenons l'équation

$$e^{V'_0} = e^{V_0} e^{tU}$$

et supposons maintenant que e^U fasse partie de Γ; alors les opérateurs conjugués de U sont les mêmes que ceux de V'_0. Si deux racines de U s'échangent, les opérateurs conjugués correspondants de U s'échangent également, de sorte que deux opérateurs de V'_0 s'échangent.

Si les deux opérateurs de V'_0 qui s'échangent ainsi correspondent à deux racines de l'équation de Killing de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0) qui ne sont pas égales, deux déterminations différentes de V'_0 se seront échangées. Il est clair d'ailleurs que si ces deux racines ne sont pas égales, leur différence doit être multiple de $2i\pi$, puisque ces deux déterminations différentes de $e^{V'_0}$ doivent avoir même adjointe.

Soit $F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ le premier membre de l'équation de Killing. Le sous-groupe Γ est caractérisé par un certain nombre de relations linéaires entre les v; à l'aide de ces relations, on peut exprimer les v en fonctions de m d'entre eux, par exemple de $v_1, v_2, \ldots, v_m$, m étant l'ordre du sous-groupe Γ.

On aura par exemple

$$v_{m+1} = \alpha_{m+1}, \quad v_{m+2} = \alpha_{m+2}, \quad \ldots, \quad v_r = \alpha_r,$$

les α étant des fonctions linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r) = 0$$

qui est *l'équation de Killing relative au sous-groupe* Γ et dont le premier membre est homogène de degré r par rapport à

$$\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m.$$

Si le premier membre se décompose en facteurs linéaires, il est impossible que deux de ses racines s'échangent entre elles; et par conséquent que deux déterminations de e^{V_0} s'échangent. La transformation e^{V_0} est seulement *quasi singulière*.

Supposons au contraire que le premier membre ne se décompose pas en facteurs linéaires et soit

$$\Phi(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

un facteur irréductible non linéaire, homogène d'ordre q par rapport à ξ et aux v.

Il est certain alors que les racines de $\Phi = 0$ sont susceptibles de s'échanger entre elles.

Alors plusieurs déterminations de V'_0 s'échangeront entre elles et e^{V_0} sera *effectivement singulière,* à moins que les racines qui s'échangent ainsi entre elles ne correspondent à des racines égales de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0). Soient alors

$$v_1 = v_1^0, \quad v_2 = v_2^0, \quad \ldots, \quad v_m = v_m^0$$

les valeurs des v qui correspondent à V_0; alors e^{V_0} sera effectivement singulière à moins que

$$\Phi(\xi, v_1^0, v_2^0, \ldots, v_m^0)$$

ne soit une puissance $p^{\text{ième}}$ parfaite.

Si $\Phi(\xi, v_i^0)$ ne se réduit pas à une puissance $p^{\text{ième}}$ parfaite, e^{V_0} admet plusieurs déterminations susceptibles de s'échanger, d'où il suit que le groupe G contient

certainement des transformations spéciales. Ces considérations s'appliquent également au cas du paragraphe VI et nous font comprendre les relations entre les équations en σ de ce paragraphe, et les facteurs de l'équation de Killing relative au groupe Γ.

Reprenons l'équation

$$e^{X_0} = \lim e^{X} e^{U};$$

nous voyons que $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta X_0}$ sont permutables. Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_0, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^{U} (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ; et si un groupe G contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.

Étudions maintenant les transformations singulières en partant des équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt_h} = X_i + \sum B_i \frac{1}{(1-e^{-\omega_h})^m}$$

du paragraphe VII. Dans le cas du paragraphe VII, toutes les racines se comportant comme des racines simples, l'exposant m était toujours égal à 1. Ici nous examinons le cas où toutes les racines ne se comportent pas comme des racines simples.

Supposons par exemple que ω_h se comporte comme une racine triple, alors l'exposant m pourra prendre les valeurs 1, 2 et 3, et les termes du second membre de (1), qui contiennent au dénominateur une puissance de $1-e^{-\omega_h}$, pourront s'écrire

$$\frac{B_i^1}{1-e^{-\omega_h}}, \quad \frac{B_i^2}{(1-e^{-\omega_h})^2}, \quad \frac{B_i^3}{(1-e^{-\omega_h})^3}.$$

Il s'agit d'étudier la forme de B_i^1, B_i^2 et B_i^3. Supposons, pour fixer davantage les idées, que la racine ω_h, tout en se comportant comme une racine triple, soit quintuple et que les opérateurs conjugués correspondants soient au nombre de cinq, à savoir : deux du premier ordre

$$U_1 = \sum u_i^1 X_i, \qquad W_1 = \sum w_i^1 X_i;$$

deux du second ordre

$$U_2 = \sum u_i^2 X_i, \qquad W_2 = \sum w_i^2 X_i,$$

ayant respectivement pour dérivés U_1 et W_1; et un du troisième ordre

$$U_3 = \sum u_i^3 X_i,$$

ayant pour dérivé U_2; il est aisé de voir alors que les B sont de la forme sui-

vante :

$$B_i^1 = \alpha_k u_i^1,$$
$$B_i^2 = \gamma_k u_i^1 + \gamma'_k u_i^2 + \beta_k u_i^1,$$
$$B_i^3 = \gamma_k u_i^1 + \gamma'_k u_i^2 + \gamma''_k u_i^3 + \beta_k u_i^1 + \beta'_k u_i^2,$$

les α_k, les β_k et les γ_k étant des fonctions algébriques des v, dépendant de l'indice k mais indépendantes de l'indice i.

Cela posé, reprenons l'équation (2) du paragraphe VII

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi) = \Sigma B \frac{1}{1 - e^{-\omega_k}}.$$

Si φ est un des coefficients de l'adjointe et si, en particulier, c'est une des racines de l'équation de Killing, on verrait comme au paragraphe VII que $\frac{d\varphi}{dt}$ doit rester fini quand e^{ω_k} devient très voisin de 1 et par conséquent que B' doit être nul. On en conclut, si ω est une racine quelconque de l'équation de Killing,

$$\Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^1 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^2 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^3 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} w_i^1 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} w_i^2 = 0.$$

Ce sont là des équations tout à fait analogues à l'equation (4) du paragraphe VII.

Si donc ω est une racine quelconque de l'équation de Killing, et si

$$T = \Sigma t_i X_i$$

est un opérateur conjugué quelconque de V (cet opérateur peut être d'ordre quelconque, et se rapporter à une racine de l'équation de Killing quelconque, *la racine zéro seule exceptée*, distincte ou non de ω), on aura alors

$$(3) \qquad t_1 \frac{d\omega}{dv_1} + t_2 \frac{d\omega}{dv_2} + \dots + t_r \frac{d\omega}{dv_r} = 0$$

et cette équation subsiste quand on y remplace ω par un coefficient quelconque de l'adjointe.

Soit alors C la variété formée par les divers points $v_1, v_2, \dots, v_r$ qui correspondent aux diverses transformations e^V admettant une même adjointe singulière A_0. Cette variété satisfera, d'après ce qui précède, à une équation différentielle

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \dots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_r^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^\rho & u_2^\rho & \dots & u_r^\rho \end{vmatrix} = 0$$

tout à fait analogue à l'équation (11) du paragraphe VII. Soit C_r l'une des variétés définies par cette équation différentielle ; elle peut ne pas être identique à C : il peut se faire que le nombre des dimensions soit plus petit pour les variétés C_r que pour la variété C ; que par chaque point de C passe une variété C_r, de telle façon que C soit engendrée par une infinité de variétés C_r de la même façon qu'une surface l'est par une courbe mobile. Les p opérateurs

$$\Sigma u_i^1 X_i, \quad \Sigma u_i^2 X_i, \quad \ldots, \quad \Sigma u_i^p X_i$$

sont les divers opérateurs conjugués du premier ordre de V correspondant à celles des racines de l'équation de Killing qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$. Le nombre p est donc égal au nombre de ces racines sans tenir compte de leur degré de multiplicité.

Il resterait à montrer que cette variété C_r a précisément p dimensions ; et pour cela il faut démontrer que si l'on forme les p opérateurs

$$S_k = u_1^k \frac{df}{dv_1} + u_2^k \frac{df}{dv_2} + \ldots + u_r^k \frac{df}{dv_r},$$

les différentes transformations infinitésimales

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v, engendreront un groupe continu d'ordre infini.

C'est ce que l'on verrait par un raisonnement analogue à celui du paragraphe VII.

IX. — Le groupe des W_i.

Nous avons trouvé (Palerme, p. 331) (1) quelle est la forme des opérateurs fondamentaux du groupe paramétrique. Cette forme est la suivante :

$$(1) \qquad X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1-e^{-\xi})F(\xi)} \Sigma P_{ij} \frac{df}{dv_j}.$$

L'intégrale doit être prise le long d'un contour quelconque enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$. Ce contour peut être décomposé en contours partiels, enveloppant chacun une des racines, ce qui permet d'écrire

$$X_i(f) = \Sigma X_i(\omega, f).$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible].

$X_i(\omega, f)$ étant la même intégrale prise le long d'un contour enveloppant seulement la racine $\xi = \omega$.

Examinons séparément chacun de ces termes, et d'abord $X_i(0, f)$. Si $\xi = 0$ est racine d'ordre μ, on peut poser $F(\xi) = \xi^\mu F_1(\xi)$ et développer ensuite suivant les puissances de ξ

$$\frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} = A_0 + A_1 \xi + \ldots,$$

$$\frac{P_{ij}}{F_1(\xi)} = B_0 + B_1 \xi + \ldots.$$

Nous remarquerons que A_0, A_1, ... sont des nombres; que $\frac{P_{ij}}{F_1}$ étant une fonction rationnelle homogène d'ordre $\mu - 1$ par rapport aux v et à ξ, B_i sera homogène d'ordre $\mu - i - 1$. On trouve d'ailleurs

$$(2) \qquad X_i(0, f) = \Sigma \frac{df}{dv_j}(A_0 B_{\mu-1} + A_1 B_{\mu-2} + \ldots + A_{\mu-1} B_0).$$

On voit que $X_i(0, f)$ est une fonction rationnelle des v.

Un cas particulier intéressant est celui où les μ racines qui sont égales à zéro se comportent comme des racines simples. On a alors

$$B_0 = B_1 = \ldots = B_{\mu-2} = 0,$$

$$X_i(0, f) = \Sigma \frac{df}{dv_j} B_{\mu-1}.$$

Passons maintenant à $X_i(\omega, f)$. Si ω est racine simple, on a simplement

$$(3) \qquad X_i(\omega, f) = \Sigma \frac{\omega}{1 - e^{-\omega}} \frac{P_{ij}(\omega)}{F'(\omega)} \frac{df}{dv_j}.$$

Si ω est racine multiple, d'ordre μ, nous pouvons écrire

$$(3\ bis) \qquad X_i(\omega, f) = \sum_{q=0}^{q=\mu-1} D_q(\omega) R_q,$$

où R_q est une fonction rationnelle des v et de ω (algébrique par conséquent par rapport aux v) et où l'on a posé

$$D_0(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-\omega}}, \qquad D_q(\omega) = \frac{d D_{q-1}(\omega)}{d\omega}.$$

On remarquera que $D_0(\omega)$, $D_q(\omega)$ et enfin $X_i(\omega, f)$ tendent vers zéro pour $\omega = -\infty$.

On voit en outre que $X_i(f)$ est le quotient de deux fonctions entières par rapport aux v; au contraire, chacun des termes $X_i(\omega, f)$ n'est plus une fonction

uniforme des v; c'est une fonction rationnelle des v, de ω et de la transcendante e^{ω}.

Maintenant $X_i(f)$ doit satisfaire aux relations de structure

$$(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s \tag{4}$$

et nous devons rechercher quelle est la forme du premier membre; on aura évidemment

$$(X_i X_k) = \Sigma [X_i(\omega_p, f), X_k(\omega_q, f)],$$

ce que j'écrirai pour abréger

$$(X_i X_k) = \Sigma (X_i^p X_k^q),$$

la sommation devant être étendue à tous les couples de racines ω_p, ω_q. Quelle est la forme de $(X_i^p X_k^q)$? On aura

$$(X_i^p X_k^q) = \Sigma_j \left(\frac{dX_i^p}{d\frac{df}{dv_j}} \frac{dX_k^q}{dv_j} - \frac{dX_i^p}{dv_j} \frac{dX_k^q}{d\frac{df}{dv_j}} \right).$$

Or si l'on se reporte à la formule (3 *bis*) on voit que l'on aura encore

$$\frac{dX_i^p}{d\frac{df}{dv_j}} = \sum_{q=0}^{q=\mu-1} D_q(\omega_p) R'_q,$$

$$\frac{dX_i^p}{dv_j} = \sum_{q=0}^{q=\mu} D_q(\omega_p) R''_q,$$

R'_q et R''_q étant comme R_q rationnels en v et ω_p.

Dans le cas où $\omega_p = 0$, les dérivées de X_i^p sont rationnelles par rapport aux v.

On conclut de là

$$(X_i^p X_k^q) = \Sigma R_{\alpha\beta} D_\alpha(\omega_p) D_\beta(\omega_q), \tag{5}$$

les $R_{\alpha\beta}$ étant rationnels par rapport aux v, à ω_p et ω_q; quant à α et β ils varient de 0 à μ et de 0 à μ', μ étant l'ordre de multiplicité de ω_p et μ' celui de ω_q; la combinaison $\alpha = \mu$, $\beta = \mu'$ étant d'ailleurs exclue.

J'ajoute que R_q est homogène de degré $q+1$ par rapport aux v et aux ω; que par conséquent R'_q est de degré $q+1$, R''_q de degré q et $R_{\alpha\beta}$ de degré $\alpha+\beta+1$. J'observe encore que les équations (3 *bis*) et (5) peuvent se mettre

sous la forme suivante :

$$(3\ ter)\qquad X_i^p = \sum S_q \frac{1}{(1-e^{-\omega_p})^{q+1}},$$

$$(5\ bis)\qquad (X_i^p X_k^q) = \sum S_{\alpha\beta} \frac{1}{(1-e^{-\omega_p})^{\alpha+1}(1-e^{-\omega_q})^{\beta+1}},$$

les S étant des fonctions rationnelles, non homogènes cette fois, des c et des ω.

L'équation (4) peut encore s'écrire

$$(4\ bis)\qquad \sum (X_i^p X_k^q) = \sum c_{iks} X_s^p,$$

les sommations portant sur les indices p, q, s. Elle doit devenir une identité quand on y remplace X_s^p et $(X_i^p X_k^q)$ par leurs valeurs (3 *ter*) et (5 *bis*). Parmi les termes des seconds membres de (3 *ter*) et (5 *bis*), nous distinguerons trois catégories :

1° Ceux qui ne dépendent d'aucune transcendante; ce sont ceux que l'on obtient dans (3 *ter*) si $\omega_p = 0$, ou dans (5 *bis*) si $\omega_p = \omega_q = 0$.

2° Ceux qui ne dépendent que d'une seule transcendante exponentielle; ce sont : *a*. les termes de (3 *ter*) où $\omega_p \gtrless 0$; *b*. les termes de (5 *bis*) où l'une des racines ω_p, ω_q est nulle et l'autre différente de zéro; *c*. les termes de (5 *bis*) où le rapport des deux racines ω_p et ω_q est une constante commensurable.

3° Ceux qui dépendent de deux transcendantes exponentielles. On les rencontre dans (5 *bis*) quand le rapport $\frac{\omega_p}{\omega_q}$ n'est pas une constante commensurable.

Comme quelques-uns de ces termes ne sont pas susceptibles de se réduire avec ceux des autres catégories, on est conduit à certaines relations que nous allons examiner.

Pour cela, nous répartirons les racines ω en groupes, en réunissant les racines dont le rapport est constant et commensurable.

Soient

$$k_1\omega_p,\quad k_2\omega_p,\quad \ldots,\quad k_h\omega_p$$

les diverses racines d'un même groupe, les k étant des constantes commensurables et ω_p une fonction des c. En général, nous supposerons que $k_1 = 1$ et que ω_p est elle-même une racine. Soit

$$X_i^p = X_i(\omega_p, f) = X_i(k_1\omega_p, f) = \ldots = X_i(k_h\omega_p, f).$$

Nous devons encore faire une autre distinction : les rapports k_1, k_2, ..., k_h sont par hypothèse tous réels et commensurables, mais quelques-uns d'entre

eux peuvent être négatifs. Supposons par exemple $k < 0$. Nous avons vu que, quand ω tend vers $-\infty$, les expressions $D_q(\omega)$ tendent vers zéro. Considérons maintenant

$$D_q(k\omega_p) \qquad (k < 0),$$

et faisons tendre ω_p vers $-\infty$. Alors D_q tendra encore vers zéro si $q > 0$, mais D_0 tendra vers 1. Soit alors, d'après la formule (3 *bis*),

$$X_i(k\omega_p, f) = \Sigma D_q(k\omega_p) R_q;$$

nous poserons

$$(6) \qquad X_i(k\omega_p, f) = X'_i(k\omega_p, f) + X''_i(k\omega_p, f)$$

avec

$$X''_i(k\omega_p, f) = R_0.$$

Si k est positif, je conserverai la formule (6), mais je poserai

$$X''_i(k\omega_p, f) = 0.$$

On voit que dans tous les cas X''_i est algébrique, et que X'_i tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Je poserai ensuite

$$Z_i^p = Z_i(\omega_p, f) = \Sigma X'_i(k\omega_p, f),$$
$$T_i^p = T_i(\omega_p, f) = \Sigma X''_i(k\omega_p, f),$$
$$Y_i^p = Z_i^p + T_i^p$$

(les sommations portant sur les diverses valeurs attribuables au nombre k), de sorte que Z_i^p tende vers zéro pour $\omega_p = -\infty$ et que T_i^p soit algébrique. On observera que cette décomposition peut se faire de deux manières. Et en effet, nous pouvons faire jouer le rôle de ω_p à la quantité $-\omega_p$, ce qui revient à changer les signes de toutes les constantes k. On trouve alors

$$X_i(k\omega_p, f) = X_i[(-k)(-\omega_p), f] = X'_i[(-k)(-\omega_p), f] + X''_i[(-k)(-\omega_p), f],$$
$$X_i(k\omega_p, f) - X'_i[(-k)(-\omega_p), f] = R_0,$$
$$Z_i(-\omega_p, f) = \Sigma X'_i[(-k)(-\omega_p), f],$$
$$T_i(-\omega_p, f) = \Sigma X''_i[(-k)(-\omega_p), f],$$
$$Y_i^p = Z_i(-\omega_p, f) + T_i(-\omega_p, f).$$

Adoptons une fois pour toutes l'une ou l'autre de ces deux décompositions; et posons encore

$$Z_i^0 = X_i(0, f) + \Sigma T_i^p,$$

d'où

$$(7) \qquad X_i(f) = Z_i^0 + \Sigma Z_i^p.$$

les sommations s'étendant aux divers groupes de racines, caractérisés par la quantité ω_p (qui ne diffère des racines du groupe envisagé que par un facteur constant) ou plus simplement par l'indice p.

Envisageons le second membre de (7); nous voyons que Z_i^0 est une fonction algébrique des v, et que chaque terme Z_i^p dépend d'une transcendante unique $e^{-\omega_p}$ et tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Il est clair que X_i ne peut être décomposé *que d'une seule manière* en une somme de termes satisfaisant à ces conditions. Il vient ensuite

$$(8) \qquad (X_i X_k) = \Sigma (Z_i^p Z_k^q),$$

les indices p et q pouvant prendre sous le signe Σ toutes les valeurs possibles, y compris la valeur zéro. Les divers termes du second membre de (8) peuvent être algébriques (si $p = q = 0$), ou dépendre d'une transcendante unique (si $p = 0$, ou $q = 0$, ou $p = q$), ou dépendre de deux transcendantes $e^{-\omega_p}$, $e^{-\omega_q}$. Ceux qui dépendent d'une ou de deux transcendantes tendent vers zéro, quand l'une ou l'autre de ces transcendantes tend vers $+\infty$. Ici encore cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

Si alors dans l'équation (4) nous remplaçons $(X_i X_k)$ et X_s par leurs valeurs (8) et (7), les deux membres de cette équation se trouvent décomposés en termes satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

En faisant dans cette équation (9) toutes les transcendantes $e^{-\omega_p}$ infinies, il vient

$$(9) \qquad (Z_i^0 Z_k^0) = \Sigma c_{iks} Z_s^0.$$

L'équation (9) nous apprend que les opérateurs

$$Z_i^0(f)$$

définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Étudions le groupe des $Z_i^0(f)$; nous avons

$$Z_i^0 = X_i(0, f) + \Sigma T_i^p.$$

$X_i(0, f)$ nous est donné par la formule (2), et nous en concluons que c'est une somme de termes rationnels et homogènes de degré

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mu - 1$$

par rapport aux v (μ est le degré de multiplicité de la racine 0); le terme de degré 0 subsiste seul si les diverses racines nulles se comportent comme des

racines simples. Quant aux T_i^p, ce sont des sommes de termes de la forme R_0; ils sont donc algébriques et homogènes de degré 1 par rapport aux v.

Je puis écrire alors

$$Z_i^0 = U_i^0 + U_i^1 + \ldots + U_i^\lambda,$$

U_i^k étant homogène de degré k.

De là les identités

$$(10)\quad \begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \ldots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = \Sigma c_{iks} U_s^{\mu-1} & (\mu - 1 \leq \lambda), \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \ldots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = 0 & (\mu - 1 > \lambda). \end{cases}$$

En particulier, si les racines nulles se comportent comme des racines simples (ou tout au plus comme des racines doubles), on a $\lambda = 1$, d'où

$$(10\ bis)\quad \begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^1) + (U_i^1 U_k^0) = \Sigma c_{iks} U_s^0, \\ (U_i^1 U_k^1) = \Sigma c_{iks} U_s^1; \end{cases}$$

ce qui montre que les opérateurs U_i^1 définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Pour aller plus loin, reprenons les relations de structure, où figurent, comme nous l'avons vu, à côté de fonctions algébriques des v, un certain nombre de transcendantes indépendantes $e^{-\omega_p}$. Dans ces relations, remplaçons chacune des transcendantes $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$; λ_p étant une constante quelconque, ces relations ne cesseront pas d'être satisfaites.

Soient donc

$$(4)\qquad (X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s$$

ces relations. Soit W_i ce que devient X_i quand on y change $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. J'observe :

1° Que le crochet $(W_i W_k)$ n'est autre chose que ce que devient le crochet $(X_i X_k)$ quand on y remplace $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. En effet, on a par définition

$$(X_i X_k) = \Sigma_h \frac{dX_i}{dv_h}\frac{dX_k}{dp_h} - \frac{dX_i}{dp_h}\frac{dX_k}{dv_h},$$

$$(W_i W_k) = \Sigma_h \frac{dW_i}{dv_h}\frac{dW_k}{dp_h} - \frac{dW_i}{dp_h}\frac{dW_k}{dv_h},$$

en écrivant pour abréger p_h au lieu de $\frac{df}{dv_h}$.

Cela posé, observons que X_i dépend des v de deux manières; d'abord algé-

briquement, ensuite par l'intermédiaire des exponentielles $e^{-\omega}$; c'est ce que j'exprimerai en écrivant

$$X_i = F_i(p_h, v_h, e^{-\omega}),$$

F_i devant être une fonction algébrique des p_h, des v_h et des $J_p = e^{-\omega_p}$. On a alors

$$W_i = F_i(p_h, v_h, \lambda_p e^{-\omega_p}).$$

Il vient alors

$$\frac{dX_i}{dv_h} = \frac{\partial X_i}{\partial v_h} - \sum \frac{\partial X_i}{\partial J_p} J_p \frac{d\omega_p}{dv_h},$$

en représentant par des ∂ les dérivées prises en regardant les v_h et les J_p comme des variables indépendantes. On a de même

$$\frac{dW_i}{dv_h} = \frac{\partial W_i}{\partial v_h} - \sum \frac{\partial W_i}{\partial J_p} J_p \frac{d\omega_p}{dv_h},$$

d'où

$$(X_i X_k) = \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial v_h} \frac{dX_k}{dp_h} - \frac{\partial X_k}{\partial v_h} \frac{dX_i}{dp_h} \right) - \sum\sum J_p \frac{d\omega_p}{dv_h} \left(\frac{\partial X_i}{\partial J_p} \frac{dX_k}{dp_h} - \frac{\partial X_k}{\partial J_p} \frac{dX_i}{dp_h} \right),$$

$$(W_i W_k) = \sum \left(\frac{\partial W_i}{\partial v_h} \frac{dW_k}{dp_h} - \frac{\partial W_k}{\partial v_h} \frac{dW_i}{dp_h} \right) - \sum\sum J_p \frac{d\omega_p}{dv_h} \left(\frac{\partial W_i}{\partial J_p} \frac{dW_k}{dp_h} - \frac{\partial W_k}{\partial J_p} \frac{dW_i}{dp_h} \right).$$

On voit que la seule différence entre les deux crochets $(X_i X_k)$ et $(W_i W_k)$, c'est que dans le premier on doit faire $J_p = e^{-\omega_p}$ et dans le second $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$.

2° La relation (4) a ses deux membres algébriques par rapport aux p_h, aux v_h et aux transcendantes $J_p = e^{-\omega_p}$. Elle doit donc être une identité quand on y regarde les p_h, les v_h et les J_p comme des variables indépendantes.

Elle doit donc subsister quand on y fait $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(W_i W_k) = \sum c_{iks} W_s.$$

En d'autres termes, *les opérateurs W_i engendreront un groupe isomorphe au groupe des Z_i.*

Pour bien préciser le résultat obtenu, supposons par exemple qu'une racine ω_3 soit égale à la somme de deux autres $\omega_1 + \omega_2$. Alors les trois transcendantes

$$J_1 = e^{-\omega_1}, \quad J_2 = e^{-\omega_2}, \quad J_3 = e^{-\omega_3}$$

ne sont plus indépendantes. Si l'on veut les remplacer par

$$\lambda_1 e^{-\omega_1}, \quad \lambda_2 e^{-\omega_2}, \quad \lambda_3 e^{-\omega_3},$$

les constantes λ_1 et λ_2 peuvent être choisies d'une manière quelconque; mais il n'en est pas de même de λ_3, qui est assujettie à la condition

$$\lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Le groupe des W_i contient des cas particuliers remarquables. Si, par exemple, on suppose que toutes les constantes λ sont nulles, on tombe sur le groupe engendré par les Z_i^0; si on les suppose toutes nulles, sauf λ_p que l'on fait égal à 1, on tombe sur le groupe engendré par les opérateurs $Z_i^0 + Z_i^p$.

On a vu aussi que la définition de Z_i^0 peut être modifiée si l'on fait jouer le rôle de ω_p à $-\omega_p$. Si $Z_i'^0$ est ce que devient Z_i^0 par suite de cette modification, le groupe des $Z_i'^0$ est encore isomorphe au groupe donné. Mais il rentre encore comme cas particulier dans le groupe des W_i; il suffit de faire tous les λ nuls, à l'exception de λ_p que l'on suppose infini.

Le groupe des W_i contient donc comme cas particulier, non seulement le groupe donné, celui des X_i, mais encore les autres groupes que nous avons envisagés successivement dans ce paragraphe. Remarquons que l'isomorphisme du groupe des W_i à celui des X_i est *en général* holoédrique; en effet les W_i dépendent de certaines constantes λ que l'on peut faire varier d'une manière continue.

Pour certaines valeurs des λ, à savoir pour $\lambda = 1$, l'isomorphisme est certainement holoédrique, puisque les deux groupes sont identiques. L'isomorphisme ne pourrait donc cesser d'être holoédrique que pour certaines valeurs particulières des λ.

On verrait de même que les deux groupes sont en général *semblables*, au sens de Lie, de sorte qu'on peut passer de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

Quel est ce changement de variables? C'est ce que nous allons voir plus loin.

Quelques explications sont ici nécessaires; le groupe des X_i, c'est-à-dire le groupe paramétrique, est *simplement transitif*, de telle sorte qu'étant donnés deux systèmes quelconques de valeurs des variables $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ et $v_1^1, v_2^1, \ldots, v_r^1$ il y a une transformation du groupe et une seule qui transforme le premier système dans le second. Le groupe des W_i, dont celui des X_i n'est qu'un cas particulier, correspondant à certaines valeurs particulières des λ, devra être encore aussi, *en général*, simplement transitif et par conséquent *semblable* à celui des z_i. Appelons v_i' les variables indépendantes relatives au groupe des W_i pour ne pas les confondre avec les variables v_i relatives au groupe des X_i. Soit $v_i'^0$ un système quelconque de valeurs des v_i', que j'appellerai le *système initial*. Il y aura une transformation e^V (où $V = \Sigma v_i X_i$), et une seule, qui changera ce système initial $v_i'^0$ en un système quelconque v_i'. Les v_i' sont alors des fonctions des valeurs initiales $v_i'^0$ et des paramètres v_i qui définissent cette transforma-

tion e^{X}, et c'est là la relation entre les v_i et les v'_i, le changement de variables qui fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. Pour certaines valeurs *particulières* des λ, le groupe des W_i peut cesser d'être simplement transitif et semblable à celui des X_i; nous verrons plus loin que cela peut arriver en particulier pour le groupe des Z_i^0.

X. — Application au groupe des rotations.

Prenons d'abord pour exemple le groupe des rotations et renvoyons pour les notations à (Palerme. p. 332 et 333) (¹). Nous avons désigné par 2θ l'angle de rotation et par α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation; et nous avons posé

$$(1)\qquad v_1 = \alpha\theta, \quad v_2 = \beta\theta, \quad v_3 = \gamma\theta \quad (\theta^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

de telle façon que le vecteur v_1, v_2, v_3 a pour direction celle de l'axe de rotation et pour longueur la moitié de l'angle de rotation. Dans ces conditions, nous avons formé les opérateurs Z_1, Z_2, Z_3 et trouvé par exemple

$$(2)\qquad \begin{aligned} Z_1 = {} & \frac{df}{dv_1}[\theta\cot\theta(1-\alpha^2)+\alpha^2] \\ & + \frac{df}{dv_2}[v_3+\alpha\beta(1-\theta\cot\theta)] + \frac{df}{dv_3}[-v_2+\alpha\gamma(1-\theta\cot\theta)]. \end{aligned}$$

Pour former les W d'après le paragraphe précédent, il suffit de changer $\cot\theta$ en $\cot(\theta+h)$, h étant une constante quelconque. Je puis donc écrire l'expression de W_1, mais il sera préférable de ne pas confondre les variables qui figurent dans Z_1 avec celles qui figurent dans W_1; et pour éviter cette confusion, j'accentuerai les lettres. Je poserai donc

$$v'_1 = \alpha'\theta', \quad v'_2 = \beta'\theta', \quad v'_3 = \gamma'\theta' \quad (\theta'^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2)$$

et j'aurai

$$(3)\qquad \begin{aligned} W_1 = {} & \frac{df}{dv'_1}[\theta'\cot(\theta'+h)(1-\alpha'^2)+\alpha'^2] \\ & + \frac{df}{dv'_2}\{v'_3+\alpha'\beta'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\} + \frac{df}{dv'_3}\{-v'_2+\alpha'\gamma'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\}. \end{aligned}$$

D'après le paragraphe précédent, le groupe des Z et celui des W doivent être isomorphes et même semblables, de sorte que l'on peut passer de l'un à

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. [illegible] et [illegible].

l'autre par un changement de variables. Il s'agit de déterminer ce changement de variables, c'est-à-dire de voir quelles relations il doit y avoir entre les v' et les v.

Pour cela reprenons le calcul de la fin de la page 332 et du commencement de la page 333 (Palerme), mais en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha', & \beta = \beta', & \gamma = \gamma', & \theta = \theta' - h, \\ v'_1 = \alpha(\theta - h), & v'_2 = \beta(\theta - h), & v'_3 = \gamma(\theta - h). \end{cases}$$

Nous trouverons par exemple

$$dv'_1 = \theta\, d\alpha + \alpha\, d\theta = \frac{\theta\, d\beta}{\sin\theta} - \frac{\theta\alpha\cos\theta\, d\lambda}{\sin^2\theta} - \frac{\alpha\, d\lambda}{\sin\theta}$$

et finalement nous arriverons à la même formule définitive, sauf que θ sera remplacé par θ' quand il est en dehors des signes trigonométriques, ou, ce qui revient au même, que les lettres y seront accentuées et $\cot\theta$ remplacé par $\cot(\theta' - h)$.

Le vecteur v'_1, v'_2, v'_3 a donc même direction que le vecteur v_1, v_2, v_3 (celle de l'axe de rotation), mais la longueur du vecteur n'est pas la même; la différence des longueurs est égale à la constante h. *Ainsi se trouve définie la relation cherchée entre les v et les v'.*

Mais cette solution n'est pas unique. Soit en effet

$$v'^0_1, \quad v'^0_2, \quad v'^0_3$$

un système quelconque de valeurs des v' que nous appellerons le système initial.

Appliquons à ce système une rotation quelconque du groupe e^V, caractérisée par les valeurs

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta$$

des variables v. Après cette rotation, les variables v' auront pris les valeurs

$$v'_1, \quad v'_2, \quad v'_3$$

et nous aurons

$$(5)\qquad v'_i = f_i(v'^0_1, v'^0_2, v'^0_3, v_1, v_2, v_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si l'on se donne les valeurs initiales v'^0_i, les relations (5) définissent le changement de variables qui, en passant des variables v aux variables v', nous fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. On voit que ce changement de variables n'est pas unique, puisqu'il dépend des trois paramètres arbitraires v'^0_i.

La solution que nous venons d'étudier correspond à un choix particulier de

ces paramètres; une rotation nulle y correspondra à un vecteur de longueur h de direction d'ailleurs quelconque; or cette rotation nulle doit correspondre au système initial v'^0; notre solution particulière suppose donc

$$(v_1'^0)^2 + (v_2'^0)^2 + (v_3'^0)^2 = h^2.$$

La solution la plus générale s'obtiendrait de la façon suivante. Elle dépendrait de la constante h et de la rotation constante e^{A}, où

$$\mathrm{A} = a_1 \mathrm{X}_1 + a_2 \mathrm{X}_2 + a_3 \mathrm{X}_3.$$

Construisons avec les variables v_1, v_2, v_3 la rotation e^{V}; combinons les deux rotations l'une constante e^{A}, l'autre variable e^{V} et soit

$$e^{\mathrm{U}} = e^{\mathrm{A}} e^{\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{U} = \Sigma u_i \mathrm{X}_i.$$

Construisons le vecteur u_1, u_2, u_3, prolongeons-le d'une longueur égale à h, et nous aurons le vecteur v_1', v_2', v_3'; ce qui nous donne les v' en fonctions des v.

Voyons maintenant ce qui se passe en ce qui concerne le groupe des Z_i^0; pour le former, il faut prendre $\omega_p = i\theta$, ou bien $\omega_p = -i\theta$; cela revient à remplacer $\cot\theta$ par $+i$, ou par $-i$. En effet, nous passons des groupes des Z_i à celui des W_i en changeant $\cot\theta$ en $\cot(\theta + h)$ ou $e^{i\theta}$ en $e^{i(\theta+h)} = \lambda e^{i\theta}$, où $\lambda = e^{ih}$.

Mais le groupe des Z_i^0 s'obtient comme nous l'avons vu quand on fait $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$. Il faut donc faire $h = \infty$, la partie imaginaire de h étant égale soit à $+\infty$, soit à $-\infty$, ce qui donne $\cot(\theta + h) = \pm i$.

Il y a donc deux groupes des Z_i^0. Nous considérerons l'un d'eux, par exemple celui où $\cot(\theta + h) = + i$.

Prenons donc les formules de la page 333 de Palerme [1], et remplaçons-y $\cot\theta$ par i.

Il viendra

$$(6) \qquad dv_1 = t_1[i\theta(1-\alpha^2) + \alpha^2] + t_2[-\gamma + \alpha\beta(1-i\theta)] + t_3[\beta + \alpha\gamma(1-i\theta)];$$

les valeurs de dv_2 et dv_3 s'en déduiraient par permutation circulaire.

On en déduit aisément (en tenant compte de $\Sigma\alpha^2 = 1$)

$$(7) \qquad d\theta = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3.$$

---

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 225.

et

$$(8)\quad \begin{cases} d\alpha = it_1(\beta^2 + \gamma^2) - t_2(\gamma + i\alpha\beta) + t_3(\beta - i\alpha\gamma), \\ d\beta = t_1(\gamma - i\alpha\beta) + it_2(\alpha^2 + \gamma^2) - t_3(\alpha + i\beta\gamma), \\ d\gamma = -t_1(\beta + i\alpha\gamma) + t_2(\alpha - i\beta\gamma) + it_3(\alpha^2 + \beta^2); \end{cases}$$

et l'on remarquera que les accroissements des cosinus directeurs α, β, γ, produits par une transformation infinitésimale quelconque, dépendent uniquement de ces cosinus directeurs eux-mêmes et sont indépendants de θ.

De plus on a, comme il convient,

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0,$$

puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ doit rester constant et égal à 1. On a d'ailleurs

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Ce n'est pas tout. Si l'on regarde α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

c'est-à-dire que le point α, β, γ est sur une sphère. Cette sphère, comme toutes les surfaces du second degré, possède deux systèmes de génératrices rectilignes. Je dis que *les génératrices de l'un des systèmes ne sont pas altérées par les transformations du groupe*. Il suffira de faire la vérification pour l'une de ces génératrices

$$\alpha = 1, \qquad \beta = i\gamma.$$

Je vais vérifier que si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = i\gamma$, on aura également

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = i\, d\gamma.$$

Il vient en effet

$$(9)\quad \begin{cases} d\alpha = 0, \\ d\beta = 2\gamma t_1 + it_2(1 + \gamma^2) - t_3(1 - \gamma^2), \\ d\gamma = -2i\gamma t_1 + t_2(1 - \gamma^2) + it_3(1 - \gamma^2) \end{cases}$$

et la vérification est immédiate.

On voit ainsi que *le groupe des* Z_i^0 *n'est pas transitif*, puisqu'il ne permet pas de passer d'un système de valeurs des variables à un autre système *quelconque*, mais seulement à un système correspondant à une même génératrice rectiligne de la sphère. Le groupe des Z_i^0 n'est donc pas semblable à celui des Z_i, et il n'est pas possible de passer d'un groupe à l'autre par un simple changement de variables.

Nous avons vu qu'il y a deux groupes des Z_i^0, que l'on obtient en prenant

$\omega_p = i\xi$ ou $\omega_p = -i\xi$, ou bien en prenant $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$. Ces deux groupes correspondent aux deux systèmes de génératrices rectilignes de la sphère.

La dernière des équations (9) montre que les transformations du groupe se réduisent à des transformations *homographiques* sur chacune des génératrices rectilignes de la sphère du premier système. Quels sont les points doubles de ces transformations?

Si nous considérons par exemple une rotation autour de l'axe des x, c'est-à-dire si nous faisons $t_2 = t_3 = 0$, nous voyons que l'on a

$$dx = d\xi = d\eta = 0$$

pour

$$x = 1, \quad \xi = -i\eta \quad \text{ou} \quad x = -1, \quad \xi = i\eta;$$

c'est-à-dire que le lieu des points doubles se compose de deux génératrices rectilignes du second système, qui rencontrent l'axe de rotation.

Remarquons qu'à $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, c'est-à-dire à une rotation nulle, correspondent des valeurs indéterminées des v', puisque la longueur du vecteur v'_1, v'_2, v'_3 est égale à h, mais sa direction indéterminée. Le point v'_1, v'_2, v'_3 est donc un point indéterminé d'une sphère. Une transformation infinitésimale pourra alors transformer un point très voisin d'un point de cette sphère en un point très voisin d'un *autre* point de cette sphère et pouvant être très distant du premier point. Donc les dv_i deviennent infinies.

C'est en effet ce qui arrive. Avec le groupe des Z_i, nous rencontrions $\theta\cot\theta$; $\cot\theta$ devenait infini pour $\theta = 0$, mais $\theta\cot\theta$ restait fini. Avec le groupe des W_i, $\theta\cot\theta$ est remplacé par $\theta\cot(\theta + h)$, qui devient infini pour $\theta = -h$.

XI. — Extension au cas général.

Je me propose maintenant d'étendre au cas général les résultats obtenus dans le paragraphe précédent relativement au groupe des rotations. Considérons donc un groupe paramétrique G quelconque, dérivé des r opérateurs

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots, \quad X_r$$

et la substitution la plus générale e^V de ce groupe. Considérons également son groupe adjoint G_α, et dans ce groupe l'adjointe de e^V. Nous savons que cette adjointe est une substitution linéaire qui transforme les r coefficients u de

$$V = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_r X_r$$

dans les r coefficients u' de

$$V = \Sigma u'_i X_i.$$

où l'on pose

$$U' = e^{-V} U e^{V}.$$

Nous savons également comment les coefficients de cette substitution linéaire dépendent des v. Ce sont des fonctions algébriques des v et d'un certain nombre de transcendantes indépendantes, de la forme $e^{-\omega_p}$.

Le nombre des coefficients de l'adjointe est r^2, et ils se trouvent exprimés en fonctions de r variables indépendantes. Il y a donc entre eux au moins $r^2 - r$ relations. Il y en a exactement $r^2 - r$ si le groupe G est de la première catégorie.

Il y en a davantage, s'il est de la seconde catégorie, parce qu'alors le groupe adjoint est d'ordre inférieur à r.

Dans le cas particulier du groupe des rotations, ces $r^2 - r$ relations ne sont autre chose que les relations bien connues qui lient les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires.

Quelle est la nature de ces $r^2 - r$ relations (je me suppose ici placé dans le cas des groupes de première catégorie, mais si l'on voulait passer à celui des groupes de seconde catégorie, il n'y aurait rien à changer que le nombre des relations)? et d'abord *sont-elles toujours algébriques?*

Ne voulant pas aborder la question dans toute sa généralité, je me bornerai à faire observer qu'il en est ainsi dans un très grand nombre de cas, comme le montre un théorème de Cartan (*loc. cit.*, p. 133). Ce théorème nous apprend que pour tout groupe linéaire *semi-simple*, on peut choisir les paramètres de façon que les coefficients des équations finies du groupe soient des fonctions rationnelles de ces paramètres. Les relations entre ces coefficients sont donc algébriques.

Si ces $r^2 - r$ relations sont algébriques, elles ne cesseront pas d'être satisfaites si dans l'expression des coefficients de l'adjointe en fonction des v, expression où figurent d'une part des fonctions algébriques v et d'autre part des exponentielles $e^{-\omega}$, on considère ces exponentielles comme des variables indépendantes. Elles ne cesseront donc pas de l'être si l'on y remplace $e^{-\omega}$ par $\lambda e^{-\omega}$, les λ étant des constantes arbitraires.

Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_{r^2}$$

les coefficients de l'adjointe, et écrivons

$$(1) \qquad a_i = \varphi_i(v, e^{-\omega}),$$

φ_i étant une fonction algébrique des v et des exponentielles $e^{-\omega}$.

Si nous regardons les a_i comme donnés, ces équations (1) nous donneront les v, et elles seront compatibles, pourvu que les valeurs des a_i satisfassent aux $r^2 - r$ relations algébriques précitées.

Posons maintenant

$$(2) \qquad a_i = \varphi_i(e^{\lambda}\, e^{\omega'}).$$

Les λ sont des constantes quelconques, choisies une fois pour toutes; les v' sont des variables nouvelles, les ω' sont formés avec les v' comme les ω l'étaient avec les v.

Ces équations (2) *sont compatibles*, car les relations algébriques entre les a_i obtenues en éliminant les v' entre les équations (2) sont les mêmes que celles que l'on avait obtenues en éliminant les v entre les équations (1), ou bien encore en regardant les v et les e^{ω} comme des variables indépendantes et éliminant à la fois toutes ces variables indépendantes entre les équations (1).

Nous pouvons donc écrire

$$(3) \qquad \varphi_i(e^{\omega}) = \varphi_i(e^{\lambda}\, e^{\omega'}),$$

ce qui définit les relations entre les anciennes variables v et les nouvelles variables v'.

Considérons maintenant une autre transformation du groupe paramétrique

$$e^{X}\, e^{\varepsilon Y} = e^{X'} \qquad (\varepsilon \text{ étant très petit}).$$

Nous aurons, comme nous le savons,

$$(4) \qquad dv_i = \theta_i(v, e^{\omega})\, d\varepsilon,$$

les θ_i étant des fonctions algébriques des v et des exponentielles $e^{-\omega}$. Ce sont là les équations différentielles du groupe paramétrique engendré par les X_i.

Pour obtenir ces équations (4), nous aurions pu opérer de la façon suivante :

Les deux transformations

$$e^{X}, \qquad e^{X'} = e^{X}\, e^{\varepsilon Y}$$

ont respectivement pour adjointes les substitutions linéaires A′ et A″ qui changent U en

$$U' = e^{X}\, U\, e^{-X}, \qquad U'' = e^{X}\, e^{\varepsilon Y}\, U\, e^{-\varepsilon Y}\, e^{-X} = e^{X'}\, U\, e^{-X'}.$$

Soient a_α l'un des coefficients de l'adjointe A′; $a_\alpha + da_\alpha$ le coefficient correspondant de l'adjointe A″. On aura

$$a_\alpha = \psi_\alpha(e^{\omega}),$$

et

$$da_\alpha = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\,e^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i,$$

puisque φ_α dépend des diverses variables v_i, d'une part directement et d'autre part par l'intermédiaire des diverses exponentielles $e^{-\omega}$.

D'autre part, on passe de U' à U'' par une substitution linéaire infinitésimale, celle qui change U' en

$$e^{-\varepsilon X_k} U' e^{\varepsilon X_k}.$$

Cela veut dire que da_α est une fonction linéaire à coefficients constants des a_β, ce que j'écrirai

$$\frac{da_\alpha}{\varepsilon} = \sum C_{\alpha\beta} a_\beta.$$

Cela nous conduit aux relations

$$(5) \qquad \varepsilon \sum C_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v, e^{-\omega}) = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i.$$

De ces relations, on pourrait tirer les $\frac{dv_i}{\varepsilon}$ et l'on devrait retrouver les équations (4).

Changeons de variables en passant aux variables v'. Observons pour cela que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v, e^{-\omega})$ par rapport à v_i est

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} - \sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i}$$

et de même que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v', \lambda e^{-\omega'})$ par rapport à v'_i est

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} - \sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i}.$$

En différentiant les équations (3) nous trouverons donc

$$(6) \qquad \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\,e^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i.$$

Et alors, en tenant compte des équations (3) et (6), les équations (5) deviennent

$$(7) \qquad \varepsilon \sum C_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v', \lambda e^{-\omega'}) = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i.$$

Si nous comparons les équations (5) et (7), nous voyons que les deux membres de (5) sont algébriques par rapport aux v et aux exponentielles $e^{-\omega}$. Pour passer de (5) à (7), il suffit de changer dv_i en dv'_i, v_i en dehors des signes exponentiels en v'_i, et $e^{-\omega}$ en $\lambda e^{-\omega'}$.

La résolution des équations (5) nous ayant donné

$$(4) \qquad dv_i = \varepsilon\,\theta_i(v, e^{-\omega}),$$

celle des équations (7) nous donnera donc

$$(8) \qquad dv'_i = \varepsilon\,\theta_i(v', \lambda e^{-\omega}).$$

On reconnaît les équations différentielles du groupe des W_i défini au paragraphe IX.

Ainsi, au moins dans les cas très généraux où le théorème cité de Cartan s'applique, on obtiendra ce groupe des W_i par le changement de variables (3).

C'est là la généralisation du résultat obtenu au paragraphe précédent.

DEUXIÈME PARTIE

INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES

THÉORIE DES FONCTIONS

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR LES INTÉGRALES

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 73-77 (1921)

VIII. Intégrales multiples. [52, 53, 60, 105, 168, 172, 181, 190, 200.]

La théorie qui a le plus contribué à faciliter l'étude des fonctions d'une variable est certainement celle des intégrales prises entre des limites imaginaires. Elle conduit, comme on le sait, à envisager les périodes de ces intégrales et à distinguer les périodes polaires (correspondant aux résidus) des périodes cycliques. Un des points les plus importants est d'ailleurs l'étude des intégrales abéliennes, c'est-à-dire des intégrales de différentielles algébriques ; cette théorie est ordinairement présentée sous une forme géométrique, ce qui a amené à dire, pour abréger, que ces intégrales « appartiennent à une courbe algébrique ».

Quand on passe aux fonctions de deux variables, la notion de ces intégrales et de leurs périodes peut se généraliser à deux points de vue différents : par les intégrales de différentielles totales et par les intégrales doubles. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur le premier de ces modes de généralisation. Il ne m'appartient pas, en effet : c'est M. Picard qui en a tiré les premiers et les plus beaux résultats. Je n'ai fait qu'appeler l'attention [52], à la suite de la Note de M. Picard, sur quelques points de détail. Ainsi ce géomètre avait démontré qu'une surface algébrique ne possède d'intégrales abéliennes de différentielles totales de première espèce que dans des cas particuliers.

Je veux dire que, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une surface algébrique définissant z en fonction de x et de y,

il n'y aura pas, en général, de différentielle exacte

$$P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q soient rationnels en x, y, z, de telle façon que l'intégrale

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

reste toujours finie.

Partant de là, j'ai trouvé les conditions pour qu'une surface du quatrième ordre possède de pareilles intégrales. Il faut et il suffit qu'elle soit une surface réglée ou qu'elle se ramène à une surface de révolution par une transformation linéaire. J'ai indiqué également un certain nombre de cas où il n'y a jamais, et d'autres où il y a toujours, des intégrales de première espèce.

J'ai reconnu que le théorème d'Abel s'étendait immédiatement aux intégrales de différentielles totales de première espèce ; mais il semblait au premier abord qu'il ne serait plus applicable aux surfaces qui ne possèdent pas de pareilles intégrales, c'est-à-dire à la grande majorité des surfaces algébriques.

Il n'en était rien. J'ai démontré [53] le théorème suivant :

Si (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_q, y_q, z_q) sont les q points d'intersection d'une surface algébrique S et d'une courbe algébrique C; si $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, \ldots)$ sont les q points d'intersection de cette même surface S avec une courbe C′ infiniment peu différente de C, on aura un certain nombre de relations de la forme

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_q\,dx_q = 0,$$

où X_i est une fonction rationnelle de x_i, y_i, z_i. Ces relations peuvent être regardées comme la généralisation du théorème d'Abel.

Les difficultés qui s'attachent à l'étude des intégrales doubles et multiples étendues à un domaine imaginaire sont d'une nature différente. Il semble que la théorie des intégrales simples prises entre des limites imaginaires serait d'une exposition beaucoup plus laborieuse si l'on n'avait pour s'y guider une représentation géométrique. On perd ce guide quand on passe aux intégrales doubles ; il faudrait alors recourir à la Géométrie à quatre dimensions, ce qui serait une complication plutôt qu'une simplification.

Cet obstacle ne paraît pas d'abord très sérieux ; cependant il arrêta longtemps les géomètres. M. Picard, à propos des fonctions hyperfuchsiennes, avait traité

une question qui présente quelque analogie avec celle qui nous occupe, mais qui n'est pourtant pas la même ; les quantités qu'il a ainsi introduites ne peuvent être en aucune façon regardées comme la généralisation des périodes des intégrales simples. Il importe de ne pas les confondre avec les périodes cycliques que ce même savant a étudiées peu de temps après la publication de ma première Note à ce sujet, et qui se rattache, au contraire, très directement à la théorie que j'ai cherché à fonder.

Je fus donc le premier à étudier méthodiquement cette importante question dans une Note [60] que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 25 janvier 1886 et dont j'ai développé les résultats dans un Mémoire plus étendu [181].

Le premier point était d'imaginer un mode de représentation géométrique sans employer l'espace à quatre dimensions. On peut y arriver par diverses méthodes que je n'exposerai pas ici et dont j'ai fait tour à tour usage. Il faut ensuite donner une définition des intégrales doubles prises dans un domaine imaginaire. Grâce aux modes de représentation dont je viens de parler, on peut donner cette définition sans qu'il subsiste aucune équivoque. Il faut ensuite démontrer le théorème fondamental, analogue à celui de Cauchy, et d'après lequel une intégrale double prise le long d'un contour fermé est nulle en général. Cette démonstration ne présente aucune difficulté. On peut trouver, sous une forme simple, les conditions d'intégrabilité de différentielles doubles

$$A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy + \ldots$$

qu'il faut d'abord définir sans ambiguïté. Ces conditions présentent presque la même forme que celles qui expriment l'intégrabilité d'une différentielle ordinaire. Seulement certains signes qui sont tous positifs pour les intégrales d'ordre pair et, en particulier, pour les intégrales doubles sont, au contraire, alternativement positifs et négatifs quand il s'agit d'intégrales d'ordre impair et, en particulier, d'intégrales simples. Ces conditions une fois trouvées, le théorème fondamental s'ensuit immédiatement.

Il admet cependant des exceptions, comme la proposition correspondante de la théorie de Cauchy, et ce sont ces exceptions qui sont l'origine des périodes des intégrales doubles. Ces périodes se distinguent, comme dans le cas d'une seule variable, en périodes cycliques et en périodes polaires. Je me suis occupé, en particulier, des périodes polaires ou, si l'on veut, des résidus des intégrales doubles. M. Picard a étudié ensuite les périodes cycliques.

J'ai envisagé l'intégrale d'une fonction rationnelle que j'ai écrite sous la

forme suivante :

$$\int\int \frac{f(x, y)\,dx\,dy}{\varphi(x, y)\,\psi(x, y)},$$

en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles, et j'ai reconnu que cette intégrale présente trois sortes de périodes :

1° Celles de la première sorte sont égales à $2i\pi$ multiplié par l'une des périodes de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{f\,dx}{\varphi \frac{d\psi}{dy}}$$

(rapportée à la courbe algébrique $\psi = 0$).

2° Celles de la seconde sorte se rapportent aux divers points d'intersection des deux courbes $\varphi = \psi = 0$ et sont égales à

$$\pm 4\pi^2 \frac{f(x_0, y_0)}{\Delta(x_0, y_0)},$$

$\Delta(x, y)$ étant le déterminant de φ et de ψ par rapport à x et à y et x_0 et y_0 étant les coordonnées du point d'intersection.

3° Enfin celles de la troisième sorte se rapportent aux divers points doubles de ces deux courbes et ont une expression analogue.

Mais la théorie serait incomplète si l'on se bornait à ces trois sortes de périodes. Il peut arriver que la fonction sous le signe intégral devienne infinie en divers points du contour d'intégration sans que l'intégrale elle-même cesse d'être finie. Cette circonstance ne pouvait pas se produire dans le cas des intégrales simples, lorsque la fonction à intégrer était rationnelle ; il n'en est plus de même ici. D'un autre côté, on ne saurait exclure de parti pris les intégrales de cette sorte ; car, autant qu'on en peut juger aujourd'hui, elles doivent jouer un rôle important dans les applications.

Or les intégrales de cette nouvelle sorte ont un caractère bien différent de celui des intégrales à périodes. Celles-ci, en effet, ou bien restent constantes quand on fait varier le chemin d'intégration d'une manière continue, ou bien s'accroissent par sauts brusques ; celles-là, au contraire, varient d'une façon continue comme le chemin d'intégration lui-même. C'est là la principale différence entre la théorie nouvelle et celle de Cauchy.

Ces résultats s'appliquent, *mutatis mutandis*, aux transcendantes et, en particulier, aux fonctions uniformes.

Cette théorie nouvelle sera-t-elle aussi féconde que l'ont été les découvertes de Cauchy ? Elle est encore trop jeune pour qu'on puisse se prononcer sur ce point. Certainement quelques-uns des résultats qu'on peut obtenir ainsi, et par une généralisation immédiate des méthodes de Cauchy, auraient pu être atteints plus aisément par d'autres voies. Mais on peut espérer qu'il n'en sera pas toujours de même, et déjà je suis sur la voie de propositions réellement nouvelles dans la théorie des fonctions abéliennes.

Les périodes dont il a été question jusqu'ici sont analogues à celles qui se rapportent aux singularités polaires des intégrales simples. Mais lorsque la fonction sous le signe $\int$ n'est pas uniforme, les intégrales multiples peuvent, outre ces périodes polaires, présenter des périodes cycliques.

C'est une question de Mécanique Céleste, celle du développement de la fonction perturbatrice, qui m'a amené à m'en occuper.

Si la fonction sous le signe $\int$ dépend d'un paramètre (comme par exemple les intégrales elliptiques du module) les périodes cycliques seront des fonctions de ce paramètre. De même que dans le cas des intégrales simples, ces fonctions seront définies par des équations linéaires à coefficients algébriques. J'ai étudié ces équations linéaires et leurs groupes [172]. J'ai montré qu'il y a un lien intime entre l'équation linéaire qui définit les périodes des intégrales doubles dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$ et celle qui définit les périodes des intégrales abéliennes simples engendrées par la courbe algébrique $F(x, y) = 0$. J'ai fait voir par quelle transformation on peut passer de l'une à l'autre.

Cette dernière recherche se rattache à mes travaux sur l'Analysis Situs.

D'un autre côté, étant données plusieurs intégrales multiples dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$, on peut se proposer de faire une théorie de la réduction de ces intégrales, analogue à la théorie classique de la réduction des intégrales elliptiques (ou hyperelliptiques), à un petit nombre d'intégrales types (dites de première, seconde et troisième espèces). J'ai résolu ce problème qui m'était utile pour le développement de la fonction perturbatrice [168, 196, 206].

La réduction des intégrales doubles et celle des intégrales de différentielles totales se présentent d'ailleurs ici comme deux questions intimement liées.

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIÈME PARTIE

INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES

de l'Analyse des Travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même.

52. Sur les intégrales de différentielles totales (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 décembre 1884).

53. Sur une généralisation du théorème d'Abel (*Ibid.*, 5 janvier 1885).

60. Sur les résidus des intégrales doubles (*Ibid.*, 25 janvier 1886).

105. Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes (*Ibid.*, 103, p. 732-734, 1886).

168. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice (*Ibid.*, 124, p. 199-200, 1897).

172. Sur les périodes des intégrales doubles (*Ibid.*, 125, p. 995-997, 1897).

181. Sur les résidus des intégrales doubles (*Acta mathematica*, t. 9, p. 321-380, 1887).

190. Les propriétés du Potentiel et les Fonctions abéliennes (*Ibid.*, t. 22, p. 89-178, 1898).

200. Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (*American Journal of Mathematics*, t. 12, p. 89-178, 1899).

SUR

LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

Bulletin de la Société mathématique de France, t. 12, p. 124-143 (1884).

1. Tous les lecteurs de ce Bulletin connaissent les remarquables travaux de M. Picard *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, qui, après avoir paru dans divers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, ont été réunis ici-même en un Mémoire unique. La même question a été l'objet des recherches des géomètres étrangers, et en particulier des géomètres allemands.

En 1874, Mme Kowalevski a envoyé à l'Université de Göttingen un Mémoire qui va paraître dans les *Acta mathematica*. Dans ce Mémoire (*Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'schen Integrale* 3ten *Ranges auf elliptische Integrale*), elle cite les deux théorèmes suivants, dus à Weierstrass :

Si l'on envisage un système de ρ *intégrales abéliennes de rang* ρ, *parmi lesquelles il y en a une qui est susceptible d'être réduite aux intégrales elliptiques, et si l'on considère également la fonction* Θ *correspondante :*

1° *Cette fonction* Θ *à* ρ *variables peut être changée, par une* transformation *d'ordre* k, *en un produit d'une fonction* Θ *à une variable et d'une fonction* Θ *à* $\rho - 1$ *variables.*

2° *Elle peut également par une transformation* linéaire, *c'est-à-dire du premier ordre, être amenée à une forme telle que, le tableau des périodes s'écrivant comme il suit :*

$$(A)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1\rho}, \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2\rho}, \\ . & . & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{\rho 1} & \tau_{\rho 2} & \dots & \tau_{\rho\rho}, \end{cases}$$

avec les conditions habituelles

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha},$$

la période τ_{12} soit commensurable et que les périodes

$$\tau_{13}, \quad \tau_{14}, \quad \ldots, \quad \tau_{1\rho}$$

soient nulles.

Le premier de ces théorèmes a été communiqué à M. Königsberger et le second à Mme Kowalevski par des lettres de M. Weierstrass. Mais ils ne paraissent pas avoir été publiés.

Le premier de ces théorèmes peut se généraliser comme il suit :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, parmi lesquelles il y en a μ qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, la fonction Θ correspondante à ρ variables peut être changée par une transformation d'ordre k, en un produit d'une fonction Θ à μ variables et d'une fonction Θ à $(\rho-\mu)$ variables.

Le second théorème est également susceptible d'une généralisation, ainsi qu'on le verra plus loin.

Il n'est pas douteux que ces généralisations ne soient connues de M. Weierstrass; mais, comme il serait difficile en France de s'en procurer la démonstration, je crois qu'il ne sera pas inutile de la développer ici, ignorant d'ailleurs si la marche que je vais suivre est la même qu'a employée l'illustre analyste allemand.

2. Soit

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{2\rho}$$

un système quelconque de 2ρ périodes. Posons

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2\rho}$ désignant un nouveau système de 2ρ périodes, et les coefficients a_{ik} étant entiers. Il est clair que toute fonction qui admettra les nouvelles périodes x' admettra également les anciennes périodes x.

Si, de plus, le déterminant des a_{ik} est égal à $+1$, les nouvelles périodes x' pourront réciproquement s'exprimer linéairement à l'aide des anciennes par des expressions à coefficients entiers. Les deux systèmes de périodes seront alors *équivalents*.

Soit une fonction de ρ variables admettant 2ρ périodes linéairement indépendantes. Ces 2ρ périodes formeront un système *primitif*, si toute autre

période s'exprime à l'aide des 2ρ périodes considérées, par une expression linéaire à coefficients entiers. Tous les systèmes primitifs sont équivalents.

Un système de μ périodes ($\mu < 2\rho$) sera un système incomplet; il sera *primitif* si l'on peut le compléter en lui adjoignant $2\rho - \mu$ nouvelles périodes convenablement choisies, de telle façon que le système ainsi complété soit lui-même primitif.

Soit

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2\rho}$$

un système *complet primitif*. Formons un système incomplet

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,2\rho}x_{2\rho} = x'_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,2\rho}x_{2\rho} = x'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,2\rho}x_{2\rho} = x'_\mu, \end{array}\right.$$

où les coefficients sont entiers. Pour que ce système soit primitif, il faut et il suffit que les déterminants compris dans la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,2\rho} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu,1} & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\|$$

aient pour plus grand commun diviseur l'unité.

Envisageons l'ensemble des périodes qui peuvent s'écrire

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_\mu x'_\mu,$$

les α étant *commensurables* et les x' étant toujours les périodes du système incomplet (2). *Toutes* ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de μ d'entre elles $x''_1, x''_2, \ldots, x''_\mu$ par une expression à coefficients entiers. Si le système des x' est primitif, il est équivalent au système des x''. Si le système des x' n'est pas primitif, le système des x'', *qui est toujours primitif*, pourra s'appeler la base du système (2).

Dire que, dans un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, il y en a μ linéairement indépendantes, qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, c'est dire que l'on peut trouver un système de $2\rho - 2\mu$ périodes qui sont nulles à la fois dans ces μ intégrales.

On peut toujours supposer que ce système incomplet est primitif; car, s'il existe un système incomplet non primitif de $2\rho - 2\mu$ périodes qui soient

nulles à la fois dans μ intégrales, la *base* de ce système non primitif jouira de la même propriété. D'où la conséquence suivante :

On peut toujours trouver, pour nos ρ intégrales abéliennes, un système primitif de 2ρ périodes, de telle façon que les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient nulles dans μ des ρ intégrales considérées.

3. Mais ce système primitif ne sera pas en général un système de *périodes normales.*

A chaque système primitif de périodes de ρ intégrales abéliennes est attachée une forme bilinéaire à deux séries de 2ρ variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}).$$

Si dans cette forme on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ par les périodes (formant le système primitif considéré) d'une de nos ρ intégrales abéliennes et $y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}$ par les périodes correspondantes d'une seconde intégrale, la forme s'annule.

Si l'on y remplace les x par les parties réelles des périodes d'une des intégrales et les y par les parties imaginaires de ces mêmes périodes, le résultat de cette substitution sera positif.

La forme F est une forme bilinéaire *identique*, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}) = 0.$$

On sait que les formes bilinéaires identiques ont un seul invariant qui est le déterminant où le $m^{\text{ième}}$ terme de la $n^{\text{ième}}$ colonne est le coefficient de $x_m y_n$. Cet invariant, qui est toujours un carré parfait, est égal à 1 dans le cas qui nous occupe.

Une forme bilinéaire d'invariant 1 est *réduite* lorsqu'elle s'écrit

$$(3) \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \ldots + x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1}.$$

Le système primitif considéré est alors un système de *périodes normales.*

Qu'arrive-t-il maintenant lorsque l'on passe d'un système primitif à un autre système primitif équivalent? Posons, comme plus haut,

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k,$$

les a_{ik} étant des entiers dont le déterminant sera égal à 1. Les x' formeront comme les x un système primitif, et si l'on désigne par y'_k la période de la

seconde intégrale qui correspond à x'_k, on aura

$$(1\ bis) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{k=2p} a_{ik} y'_k.$$

En remplaçant dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire en x' et en y', arithmétiquement équivalente à F et d'invariant 1. Ce sera la forme bilinéaire correspondant au système primitif des x'.

On pourra toujours choisir la substitution linéaire (1), de telle façon que la forme F ainsi transformée soit réduite, et par conséquent que le système primitif des x' soit un système de périodes normales (*cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 106). Il existe également des substitutions linéaires qui changent la forme (3) en elle-même et qui, par conséquent, changent un système de périodes normales en un autre système de périodes normales (*loc. cit.*, p. 300). C'est ce qu'on appelle les *transformations linéaires ou du premier ordre*.

Imaginons maintenant que dans les relations (1) et (1 *bis*) les a_{ik} soient encore entiers, mais que leur déterminant soit égal à $\Delta (\Delta > 1)$. Alors le système des x' ne sera plus un système de périodes de nos intégrales abéliennes, mais ce sera un système de périodes, primitif ou non, d'*autres* intégrales abéliennes.

Si l'on remplace dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire identique en x' et y', d'invariant Δ^2.

Je dirai qu'une pareille forme est réduite lorsqu'elle s'écrira

$$(4) \qquad k_1(x_1y_2 - x_2y_1) + k_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \dots + k_p(x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1}),$$

et il est aisé de voir que l'on peut toujours *réduire* une forme bilinéaire identique par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant 1.

Supposons en particulier que la forme F soit réduite, de telle façon que les x soient les périodes normales des intégrales abéliennes données. Supposons, de plus, qu'après la transformation notre forme soit encore réduite, c'est-à-dire qu'elle se réduise à une expression telle que (4), et de telle sorte que

$$k_1 = k_2 = \dots = k_p = k.$$

Alors les x' seront les périodes normales d'un nouveau système d'intégrales abéliennes; par conséquent la substitution (1) aura changé un système de

périodes normales en un autre système de périodes normales, mais appartenant à de *nouvelles* intégrales. Elle s'appellera alors une *transformation d'ordre k*.

4. Ces préliminaires posés, passons à la démonstration du premier théorème de M. Weierstrass, généralisé.

Nous avons supposé que, les x formant un système primitif de périodes et F étant la forme correspondante, les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes étaient nulles pour μ de nos ρ intégrales. Posons encore

$$(1) \qquad x_i = \Sigma a_{ik} x'_k, \qquad y_i = \Sigma a_{ik} y'_k,$$

les a_{ik} étant entiers, mais leur déterminant étant en général plus grand que 1.

Si les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes de l'ancien système, si, en d'autres termes, on a

$$(5) \qquad a_{ik} = 0 \qquad (i = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho - 1, 2\rho;\ k = 1, 2, \ldots, 2\mu - 1, 2\mu),$$

les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système seront nulles comme celles de l'ancien pour les μ intégrales dont il vient d'être question.

Si l'on peut trouver une substitution linéaire de la forme (1) satisfaisant aux conditions (5), et réduisant le système de périodes à un système de périodes normales des intégrales transformées; si, en d'autres termes, on peut trouver une pareille substitution qui réduise la forme F à une expression, telle que (4), avec les conditions

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\rho = k,$$

le théorème énoncé sera démontré.

Remarquons même qu'il le sera encore, si nous arrivons au même résultat en appliquant *successivement* à notre forme F plusieurs substitutions assujetties aux conditions que nous venons d'énoncer; car la résultante de deux pareilles substitutions satisfait également à ces mêmes conditions.

Quand dans la forme F on annule les $2\rho - 2\mu$ derniers x et les $2\rho - 2\mu$ derniers y, il reste une forme bilinéaire F_1 admettant deux séries de 2μ variables, $x_1, x_2, \ldots, x_{2\mu}; y_1, y_2, \ldots, y_{2\mu}$. Je puis toujours supposer qu'elle est réduite et s'écrit

$$F_1 = k_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k_\mu(x_{2\mu-1} y_{2\mu} - x_{2\mu} y_{2\mu-1});$$

car, si cela n'était pas, on ferait subir aux variables une substitution linéaire de déterminant 1, *ne portant que sur les* 2μ *premières périodes*, et qui réduirait la forme F_1.

Nous pourrons alors écrire

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

F_1 ne contenant que les 2μ premières périodes, F_2 ne contenant que les $2\rho - 2\mu$ dernières et F_3 représentant l'ensemble des termes qui dépendent à la fois d'une des 2μ premières et d'une des $2\rho - 2\mu$ dernières.

Nous allons chercher par une suite de substitutions linéaires à faire disparaître successivement tous les termes de F_3.

Soit, par exemple, à faire disparaître un terme

$$a(x_1 y_i - x_i y_1),$$

x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes; nous poserons

$$x_2 = x'_2 - a x'_i, \qquad x_i = k_1 x'_i;$$

de même, si l'on veut faire disparaître un terme

$$b(x_2 y_i - x_i y_2),$$

on posera

$$x_1 = x'_1 + b x'_i, \qquad x_i = k_1 x'_i,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces substitutions satisfont aux conditions (5) et l'on obtiendra finalement une forme F′ transformée de F qui s'écrira

$$(6) \qquad F' = F_1 + F'_2,$$

F_1 ne dépendant que des 2μ premières et F'_2 des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système : *les deux catégories de périodes sont séparées.* La forme F'_1, ne différant d'ailleurs de F_1 qu'en ce que les anciennes variables sont remplacées par les nouvelles, sera réduite. On réduira ensuite la forme F'_2 par une substitution linéaire de déterminant 1 *ne portant que sur les* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes;* la forme F′ transformée se réduira alors à une expression telle que (4), d'où il est aisé de passer à l'expression

$$k(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k(x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1}) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Mais on peut craindre, en suivant la marche qui précède, d'être conduit à employer une transformation d'ordre trop élevé. C'est ce qui nous amène à nous poser le problème suivant :

Trouver toutes les substitutions satisfaisant aux conditions (5) *et qui ramènent la transformée* F′ *de* F *à la forme* (6), *où les deux catégories de périodes sont séparées.*

Ce problème se ramène au suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires portant sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes et telles qu'après la transformation, tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois x_1 ou x_2 et une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient divisibles par k_1 ; que tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois x_3 ou x_4 et une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient divisibles par k_3, etc.

Soit

$$F_3 = \Sigma b_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2\mu;\ k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho).$$

Posons maintenant

$$x_k = \Sigma_h c_{kh} x'_h$$
$$(k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho;\ h = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho),$$

d'où

$$F_3 = \Sigma b_{ik} c_{kh}(x_i y'_h - x'_h y_i).$$

Les conditions énoncées se réduisent à

$$(7) \qquad \Sigma_k b_{ik} c_{kh} \equiv 0 \pmod{k_l}$$

(en supposant $i = 2l$ ou $2l - 1$).

Le nombre total des congruences (7) est $2\mu(2\rho - 2\mu)$. Il est aisé de voir de quelle forme en est la solution générale; on trouve

$$c_{kh} = \Sigma_m d_{km} \alpha_{mh}.$$

Dans cette expression, les d ont des valeurs déterminées; les α peuvent prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives; enfin l'indice m varie, comme les indices k et h eux-mêmes, depuis $2\mu + 1$ jusqu'à 2ρ. Il résulte de là que la substitution

$$x_k = \Sigma c_{kh} x'_h$$

peut être regardée comme la résultante des deux substitutions suivantes :

$$(8) \qquad x_k = \Sigma d_{km} x''_m,$$
$$(9) \qquad x''_m = \Sigma \alpha_{mh} x'_h.$$

La substitution (8) est la plus simple de toutes les substitutions linéaires qui satisfont aux congruences (7), pendant que (9) est une substitution linéaire *quelconque* à coefficients entiers.

Ainsi l'on obtiendra toutes les substitutions qui satisfont auxdites congruences en faisant suivre la plus simple d'entre elles d'une substitution *quel-*

conque à coefficients entiers. Nous pourrons donc nous borner à envisager la substitution (8) elle-même.

Appliquons donc à notre forme F la substitution (8); tous les coefficients de F_3 satisferont aux congruences (7). Par exemple, le coefficient du terme $x_1 y_i - y_1 x_i$, x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, sera divisible par k_1, et ce terme s'écrira

$$a k_1 (x_1 y_i - y_1 x_i),$$

de sorte qu'on pourra le faire disparaître en posant simplement

$$x_2 = x'_2 - a x_i,$$

c'est-à-dire par une substitution de *déterminant* 1.

Ce sera là la manière la plus simple de faire disparaître tous les termes de F_3. Si, après avoir séparé, comme nous venons de le dire, les deux catégories de périodes, on applique à la forme F une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les 2μ premières périodes, puis une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, il est clair que, dans la forme ainsi transformée, les deux catégories de périodes seront encore séparées. On est ainsi conduit à une infinité de manières de faire disparaître tous les termes de F_3, et il est aisé de voir qu'*il n'y en a pas d'autres*.

6. Occupons-nous maintenant de démontrer le second théorème de M. Weierstrass. Nous supposons qu'une intégrale est réductible aux intégrales elliptiques, et par conséquent $\mu = 1$. Dans le système primitif d'où nous partons, les $2\rho - 2$ dernières périodes sont nulles. Il s'agit de ramener ce système à un système *normal*, mais cette fois par une transformation de *déterminant* 1. Nous devons de plus supposer que dans le nouveau système les $2\rho - 3$ dernières périodes ne dépendent que des $2\rho - 2$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient nulles dans l'intégrale réductible), et que la deuxième et la troisième nouvelle période ne dépendent que des $2\rho - 1$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient commensurables entre elles dans l'intégrale réductible).

Quand la possibilité d'une pareille réduction sera établie, le théorème de M. Weierstrass sera démontré.

Nous avons encore notre forme

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

qu'il s'agit de réduire. Ici

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

$$F_3 = \Sigma a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \Sigma b_i(x_2 y_i - x_i y_2).$$

Nous poserons d'abord

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{2\rho}\, x_{2\rho} &= x'_2, \\ \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_{2\rho}\, x_{2\rho} &= x'_3, \\ \beta_{i,3} x_3 + \ldots + \beta_{i,2\rho}\, x_{2\rho} &= x'_i \qquad (i > 3). \end{aligned}$$

C'est là une substitution linéaire satisfaisant aux conditions énoncées, *pourvu que son déterminant soit égal à* 1. Or, les coefficients a_2, a_3, ..., $a_{2\rho}$ devant être premiers entre eux, puisque l'invariant de F est égal à 1, on pourra toujours choisir les α et les β de telle façon que ce déterminant soit égal à 1.

Après cette substitution la forme F se changera en

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$F'_1 = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1, \qquad F'_3 = \Sigma c_i(x'_2 y'_i - x'_i y'_2).$$

Il suffira pour faire disparaître F'_3 de poser

$$x'_1 = x''_1 + \Sigma c_i x'_i.$$

Après cette nouvelle transformation, la forme F deviendra

$$F'' = x''_1 y''_2 - x''_2 y''_1 + F''_2.$$

Il reste à réduire F''_2, mais de telle façon que les $2\rho - 3$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 3$ dernières périodes de l'ancien. Cela peut se faire absolument de la même manière.

Nous pouvons écrire, en effet, en supprimant les accents,

$$F''_2 = \Sigma d_i(x_3 y_i - x_i y_3) + \Sigma e_i(x_4 y_i - x_i y_4) + F''_4,$$

où i est plus grand que 3 et où F''_4 ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons alors

$$\begin{aligned} x_3 &= x'_3, \\ x'_4 &= d_4\, x_4 + d_5\, x_5 + \ldots + d_{2\rho}\, x_{2\rho}, \\ x'_i &= \delta_{i,4} x_4 + \delta_{i,5} x_5 + \ldots + \delta_{i,2\rho} x_{2\rho}, \end{aligned}$$

en choisissant les δ de façon que le déterminant de cette substitution linéaire soit égal à 1.

Il viendra après transformation

$$F'''_2 = x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \Sigma f_i(x'_4 y'_i - x'_i y'_4) + F'''_4;$$

F_4''' ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons

$$x_3 = x_3'' - \Sigma f_i x_i';$$

d'où, après la transformation,

$$F_2' = x_3'' y_4' - x_4'' y_3'' + F_4'''.$$

Il reste enfin à réduire F_4''', mais cette fois par une substitution *quelconque* de déterminant 1, ce qui se fera aisément.

Le second théorème de M. Weierstrass est donc démontré.

7. Occupons-nous maintenant de généraliser ce résultat en supposant que, au lieu d'une intégrale réductible aux fonctions elliptiques, nous ayons μ intégrales réductibles au genre μ. Supposons, pour fixer les idées, $\mu = 2$, de telle façon que les $2\rho - 4$ dernières périodes de notre système primitif soient nulles pour nos μ intégrales. Notre forme F s'écrira encore

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

et nous pourrons supposer que F_1 est réduit de telle sorte que

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1) + b_4(x_3 y_4 - x_4 y_3),$$

$$F_3 = \Sigma a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \Sigma b_i(x_3 y_i - x_i y_3) + \Sigma c_i(x_2 y_i - x_i y_2) + \Sigma d_i(x_4 y_i - x_i y_4)$$
$$(i > 4).$$

Posons

$$x_1 = x_1', \qquad x_3 = x_3',$$

$$(10) \quad \begin{cases} a_2 x_2 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + \ldots + a_{2\rho} x_{2\rho} = x_2', \\ b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + \ldots + b_{2\rho} x_{2\rho} = x_4', \end{cases}$$

$$x_i' = \Sigma \alpha_{ik} x_k \qquad (k = 2, 4, 5, 6, \ldots, 2\rho;\ i = 5, 6, \ldots, 2\rho).$$

L'invariant de la forme F étant égal à $+1$, les déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_5 & a_6 & \ldots & a_{2\rho} \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 & \ldots & b_{2\rho} \end{vmatrix}$$

sont premiers entre eux. Il en résulte que l'on peut choisir les α, de telle sorte que le déterminant de la substitution linéaire (10) soit égal à 1.

Après cette transformation, la forme F deviendra

$$F' = F_1' + F_2' + F_3',$$

où

$$F_1' = x_1' y_2' - x_2' y_1' + x_3' y_4' - x_4' y_3',$$
$$F_3' = \Sigma c_i(x_2' y_i' - x_i' y_2') + \Sigma d_i(x_4' y_i' - x_i' y_4').$$

On posera alors

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = x''_1 - \Sigma c'_i x''_i, & & x'_3 = x''_3 - \Sigma d'_i x''_i \\ x'_2 = x''_2, & x'_4 = x''_4, & x'_i = x''_i \end{array}\right\} \quad (i > 4),$$

et la forme F se réduira à

$$F'' = (x''_1 y''_2 - x''_2 y''_1 + x''_3 y''_4 - x''_4 y''_3) + F''_2,$$

F''_2 ne dépendant que des $2p - 4$ dernières périodes. Il reste à réduire F''_2. Cette réduction une fois opérée, le système des périodes sera ramené à un système normal, et, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, l'une quelconque des $2p - 4$ dernières périodes s'exprimera linéairement à l'aide de la deuxième et de la quatrième par une expression à coefficients commensurables.

Or nous pouvons toujours supposer que la deuxième période est égale à 1 dans la première de nos deux intégrales réductibles et à zéro dans la deuxième, et que la quatrième période est égale à zéro dans la première de ces deux intégrales et à 1 dans la deuxième. Voici quel sera alors le tableau des périodes de ces deux intégrales

$$\begin{array}{cccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & a_6 & \ldots & a_{2p} \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & \ldots & b_{2p} \end{array}$$

les a et les b étant commensurables.

Il s'agit maintenant de simplifier ce tableau en transformant les périodes, *mais de façon qu'elles ne cessent pas d'être des périodes normales.*

Or : 1° les périodes ne cesseront pas d'être normales si l'on applique à une période de rang impair et à la période de rang pair qui la suit une substitution linéaire à deux variables et de déterminant 1.

Ainsi l'on peut poser, par exemple,

$$(11) \qquad a'_5 = \alpha a_5 + \beta a_6, \qquad a'_6 = \gamma a_5 + \delta a_6, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et remplacer dans le tableau a_5 et a_6 par a'_5 et a'_6; le système de périodes ainsi défini sera encore *normal.*

On choisira les coefficients de cette substitution de telle façon que a'_6 soit nul; on opérera de la même manière sur chacune des $p - 2$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair de la première intégrale; par conséquent on peut toujours supposer

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \ldots = a_{2p} = 0.$$

2° Posons

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a'_{2\mu-1} = \alpha a_{2\mu-1} + \beta a_{2\nu-1}, & a'_{2\nu-1} = \gamma a_{2\mu-1} + \delta a_{2\nu-1}, \\ a'_{2\mu} = \delta a_{2\mu} - \gamma a_{2\nu}, & a'_{2\nu} = -\beta a_{2\mu} + \alpha a_{2\nu}, \\ & \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{array}\right.$$

Si, dans le système des périodes, on remplace

$$a_{2\mu-1}, \quad a_{2\mu}, \quad a_{2\nu-1}, \quad a_{2\nu}$$

par

$$a'_{2\mu-1}, \quad a'_{2\mu}, \quad a'_{2\nu-1}, \quad a'_{2\nu},$$

ce système restera *normal*.

Appliquons la substitution (12) en faisant

$$\mu = \rho, \qquad \nu = \rho - 1.$$

En choisissant les coefficients de la substitution, nous pourrons faire disparaître $a_{2\rho-1}$, sans que $a_{2\rho}$ et $a_{2\rho-2}$ cessent d'être nuls.

On appliquera ensuite la même substitution, en faisant

$$\mu = \rho - 1, \qquad \nu = \rho - 2,$$

et l'on fera disparaître $a_{2\rho-3}$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les a, excepté a_5, soient nuls; on aura

$$a_6 = a_7 = a_8 = \ldots = a_{2\rho} = 0.$$

Opérons maintenant sur les b. Appliquons la substitution (11) aux $\rho - 3$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair, ce qui s'écrit

$$b_8 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

Nous ne pouvons opérer de même sur la paire $b_5 b_6$, sans quoi a_6 cesserait d'être nul.

Appliquons maintenant la substitution (12) aux deux dernières paires, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-3}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait

$$b_8 = b_9 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

On ne peut opérer sur les troisième et quatrième paires, de façon à faire disparaître b_7, sans quoi a_7 cesserait d'être nul.

Toutes ces réductions faites, le tableau des périodes s'écrit

A	1	B	0	a_5	0	0	0	0	...	0
A′	0	B′	1	b_5	b_6	b_7	0	0	...	0

Il reste à faire disparaître b_6. Pour cela nous appliquerons la substitution (12) à la deuxième et à la troisième paire, de façon à faire disparaître la sixième période de la deuxième intégrale; le tableau des périodes s'écrit alors, après cette dernière transformation,

$$\begin{matrix} A & 1 & B_1 & 0 & (\lambda + \mu B_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A' & 0 & B'_1 & 1 & (\lambda' - \mu B'_1) & 0 & \nu & \ldots & 0 \end{matrix}$$

où λ, μ et ν sont commensurables et il est aisé de voir que $A' = B_1$.

Le résultat ainsi obtenu se généralise aisément pour le cas de $\mu > 2$, la démonstration étant absolument la même. Pour énoncer ce théorème, je supposerai, pour fixer les idées, $\mu = 3$, $\rho = 7$, et j'imaginerai que le tableau des périodes ait été écrit sous sa forme habituelle (A).

On aura

$$\tau_{17} = \tau_{27} = \tau_{37} = \tau_{16} = \tau_{26} = 0,$$

$$\tau_{36} = \nu_3, \qquad \tau_{14} = \lambda_1 + \lambda_2\tau_{12} + \lambda_3\tau_{13},$$

$$\tau_{24} = \mu_1 + \lambda_2\tau_{22} + \lambda_3\tau_{23}, \qquad \tau_{34} = \nu_1 + \lambda_2\tau_{23} + \lambda_3\tau_{33},$$

$$\tau_{15} = \lambda_4\tau_{13}, \qquad \tau_{25} = \mu_2 + \lambda_4\tau_{23}, \qquad \tau_{35} = \nu_2 + \lambda_4\tau_{33},$$

les λ, les μ et les ν étant commensurables. Ce qu'il faut surtout retenir, c'est qu'on peut choisir le système normal des périodes, de telle façon que les μ premières intégrales *normales* (*cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 107), qui correspondent à ce système soient précisément μ des intégrales réductibles.

Dans ces μ intégrales normales, les périodes de rang $2\mu + 2$, $2\mu + 4$, $2\mu + 6$, ..., $2\rho - 2$, 2ρ sont nulles; de plus il y a des relations linéaires à coefficients entiers :

1° Entre les périodes de rang $2\mu + 1$, 2, 4, 6, ..., 2μ, 3, 5, 7, ..., $2\mu - 1$;

2° Entre les périodes de rang $2\mu + 3$, 4, 6, ..., 2μ, 5, 7, ..., $2\mu - 1$;

3° Entre les périodes de rang $2\mu + 5$, 6, 8, ..., 2μ, 7, 9, ..., $2\mu - 1$;

. . . .

$\mu - 1$° Entre les périodes de rang $4\mu - 3$, $2\mu - 2$, 2μ et $2\mu - 1$;

μ° Entre les périodes de rang $4\mu - 1$ et 2μ.

J'ai conservé pour les rangs des périodes le même mode de désignation que j'ai employé dans tout ce travail, de telle façon que la période de rang 2λ occupe la $\lambda^{\text{ième}}$ colonne dans le tableau (A), pendant que la période de rang $2\lambda - 1$ y occupe la $(\rho + \lambda)^{\text{ième}}$ colonne.

Ainsi se trouve généralisé le second théorème de M. Weierstrass, dont il est inutile de faire ressortir l'analogie avec l'un des plus beaux résultats de M. Picard.

8. La démonstration qui fait l'objet du paragraphe précédent peut se présenter sous une forme un peu différente.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ un système de périodes normales de nos ρ intégrales abéliennes, et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ un système primitif quelconque de périodes des μ intégrales réduites.

On aura, pour une quelconque des intégrales réductibles,

$$x_i = \Sigma_k \alpha_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\rho;\ k = 1, 2, \ldots, 2\mu),$$

les α étant des coefficients entiers.

Appliquons à nos périodes les substitutions (11) et (12), de façon que le nouveau système soit encore normal.

1° Appliquons à toutes les paires de périodes la substitution (11), de façon à faire disparaître $\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}, \ldots, \alpha_{2\rho,1}$.

2° Appliquons ensuite aux deux dernières paires la substitution (12), de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-1,1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, cette même substitution, de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-3,1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,1}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,1}$.

3° Appliquons ensuite à toutes les paires de périodes, excepté à la première, la substitution (11), pour faire disparaître $\alpha_{4,2}, \alpha_{6,2}, \ldots, \alpha_{2\rho,2}$.

4° Appliquons ensuite la substitution (12) aux deux dernières paires pour annuler $\alpha_{2\rho-1,2}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$ pour annuler $\alpha_{2\rho-3,2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,2}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ et $\alpha_{3,2}$.

5° Appliquons la substitution (11) à toutes les paires, sauf aux deux premières, de façon à annuler $\alpha_{6,3}, \alpha_{8,3}, \ldots, \alpha_{2\rho,3}$.

6° Faisons ensuite disparaître à l'aide de la substitution (12), tous les $\alpha_{i,3}$, excepté $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}$ et $\alpha_{5,3}$.

En continuant de la sorte, on arrivera à avoir

$$\alpha_{i,k} = 0 \qquad (i > 2k - 1). \tag{13}$$

Cela fait, nous allons chercher à faire disparaître les coefficients $\alpha_{i,k}$ où l'indice i est pair et plus grand que 2μ; il reste $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ coefficients qui ne sont pas encore nuls et qu'il faut annuler; mais cela ne pourra se faire qu'en faisant

reparaître quelques-uns des coefficients qui avaient disparu dans les simplifications précédentes. Il faut s'arranger pour que les coefficients α_{ik} qui reparaîtront ainsi aient tous l'indice i impair. Pour cela, il faut que les périodes ξ aient été choisies convenablement, comme on va le voir.

Le choix des périodes ξ est resté jusqu'ici entièrement arbitraire. Mais il est clair que nous aurions pu remplacer les ξ par tout autre système équivalent, rien de ce qui précède n'en aurait été changé. Nous pouvons donc supposer que le choix des périodes ξ ait été fait avant la réduction, de la façon la plus convenable pour notre objet.

Voici comment nous pouvons supposer que ce choix a été fait.

Considérons les $\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$ formes bilinéaires

$$\Phi_{pq} = \Sigma_k(\alpha_{2k-1,p}\alpha_{2k,q} - \alpha_{2k,p}\alpha_{2k-1,q}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Les substitutions (11) et (12) changent ces formes en elles-mêmes.

Il reste à voir ce qui arrive quand on remplace le système des ξ par un système équivalent.

Posons

$$\xi_p = \Sigma \beta_{pr}\xi'_r$$

avec

$$r_i = \Sigma \alpha'_{ik}\xi_k,$$

il viendra

$$\alpha'_{ir} = \Sigma_p \beta_{pr}\alpha_{ip}.$$

Nos formes Φ seront devenues

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\alpha'_{2k-1,r}\alpha'_{2k,s} - \alpha'_{2k,r}\alpha'_{2k-1,s})$$

ou

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\beta_{pr}\beta_{qs} - \beta_{ps}\beta_{qr})\Phi_{pq}.$$

Supposons, en particulier, que la substitution qui fait passer des ξ aux ξ' ne porte que sur les $2\mu - 1$ derniers ξ, de telle sorte que

$$\beta_{1,1} = 1, \qquad \beta_{1,k} = \beta_{k,1} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2\mu).$$

Il viendra

$$\Phi'_{1,s} = \Sigma \beta_{q,s}\Phi_{1,q}.$$

On pourra donc toujours choisir les β de telle façon que

$$\Phi'_{1,s} = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots, 2\mu - 1).$$

En conséquence, on peut toujours supposer que les ξ aient été choisis de telle sorte que tous les $\Phi_{1,q}$ soient nuls, excepté $\Phi_{1,2\mu}$. De plus, cette propriété

ne sera pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_{2\mu-1}.$$

En raisonnant de la même façon, on verrait qu'on peut trouver une substitution linéaire ne portant que sur $\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2\mu-1}$, et telle que

$$\Phi'_{2,s} = 0 \qquad (s = 3, 4, \ldots, 2\mu - 2).$$

On peut donc toujours supposer que tous les $\Phi_{1,q}$ et les $\Phi_{2,q}$ sont nuls, sauf $\Phi_{1,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu}$, $\ldots$, $\Phi_{2,2\mu-1}$. De plus, cette propriété n'est pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_3, \quad \xi_4, \quad \ldots, \quad \xi_{2\mu-2}.$$

En continuant le même raisonnement, on verrait que l'on peut supposer que $\Phi_{p,q}$ est nul toutes les fois que

$$p + q < 2\mu + 1.$$

J'aurais même pu, si cela avait été utile pour mon objet, montrer que l'on peut choisir les ξ de telle façon que les $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ formes $\Phi_{p,q}$ s'annulent, à l'exception de μ d'entre elles.

En effet, soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ les périodes d'une de nos μ intégrales, à l'aide desquelles s'expriment les périodes normales $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ de cette même intégrale; soient, pour une seconde intégrale, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \mu_{2\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}$ les périodes correspondant aux ξ et aux x. On aura

$$\Sigma(x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}) = \Sigma\Phi_{pq}(\xi_p\eta_q - \xi_q\eta_p).$$

Or on aura pu toujours choisir les ξ de telle façon que la forme bilinéaire du second membre soit *réduite*, et n'ait par conséquent que μ termes. Je supposerai que les μ termes qui ne s'annulent pas sont ceux qui ont pour coefficients

$$\Phi_{1,2\mu}, \quad \Phi_{2,2\mu-1}, \quad \Phi_{3,2\mu-2}, \quad \ldots, \quad \Phi_{\mu,\mu+1}.$$

De plus, aucun de ces termes ne s'annulera, sans quoi l'invariant de notre forme bilinéaire serait nul; ce qui est impossible (cf. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVII; Picard et Poincaré, Note du 3 décembre 1883).

On aura donc

$$(14) \qquad \begin{cases} \Phi_{p,q} = 0 & \text{si } p + q \gtrless 2\mu + 1, \\ \Phi_{p,q} \neq 0 & \text{si } p + q = 2\mu + 1. \end{cases}$$

Les substitutions (11) et (12) n'altérant pas les formes Φ_{pq}, ces conditions

subsisteront quand j'aurai annulé, à l'aide de ces substitutions, tous les a_{ik}, où $i > 2k - 1$. Mais les conditions (13) et (14) entraînent les suivantes :

$$\alpha_{2h,k} = 0 \qquad \text{si } h + k < 2\mu + 1.$$

Nous avons donc fait disparaître tous les α_{ik} lorsque l'indice i est plus grand que $2k - 1$, ou lorsque, étant pair, il est plus petit que $4\mu + 2 - k$. Cela posé, nous allons faire disparaître le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+2}$, en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-1)^{\text{ième}}$ paires, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+3}$ en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paires, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+4}$ en opérant de même sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires, ..., puis enfin le coefficient $\alpha_{2\mu+2,2\mu}$, en opérant sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et première paires.

On aura alors

$$\alpha_{2\mu+2,k} = 0,$$

quel que soit k.

On opérera de la même façon sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paires pour faire disparaître $\alpha_{2\mu+4,\mu+3}$, puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,\mu+4}$, ...; puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et première paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,2\mu}$. On aura alors

$$\alpha_{2\mu+4,k} = 0,$$

quel que soit k.

On n'a qu'à continuer de la sorte pour avoir enfin

$$\alpha_{2h,k} = 0 \qquad (h = \mu+1, \mu+2, \ldots, \rho;\ k = 1, 2, \ldots, 2\mu).$$

Il est clair en effet qu'en opérant dans l'ordre que je viens d'indiquer, on pourra faire reparaître des coefficients α_{ik} que l'on aura fait disparaître antérieurement, mais *seulement si l'indice i est impair;* on n'aura pas à craindre de faire reparaître des coefficients α_{ik} dont le premier indice sera pair.

Il résulte de là qu'après toutes ces transformations les périodes paires des $\rho - \mu$ dernières paires seront nulles dans nos μ intégrales réductibles. Mais ces μ intégrales ont été jusqu'ici choisies arbitrairement. On peut toujours les remplacer par μ quelconques de leurs combinaisons linéaires. Or le choix de ces combinaisons linéaires peut être fait de telle façon que, dans la première d'entre elles, la période de rang 2 soit égale à 1, et les périodes de rang 4, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro; que dans la deuxième d'entre elles la période de rang 4 soit égale à 1 et les périodes de rang 2, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro, ...; qu'enfin dans la $\mu^{\text{ième}}$ d'entre elles la période de rang 2μ soit égale à 1, et les périodes de rang 2, 4, 6, ..., $2\mu - 2$ égales à zéro.

Par conséquent, si nos μ intégrales sont choisies de la sorte, toutes les périodes de rang pair seront nulles dans chacune d'elles, excepté une qui sera égale à 1. *Ce seront donc des intégrales normales.* C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré, par des méthodes purement arithmétiques, ce théorème si utile dans la théorie des fonctions abéliennes, ce qui prouve une fois de plus que l'analyste ne saurait se passer du secours de la Théorie des nombres.

SUR LA RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 99, p. 853-855 (17 novembre 1884).

Si un système d'intégrales abéliennes de première espèce et de genre n contient plus de n intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en contient une infinité.

Pour démontrer ce résultat, que les récentes découvertes de M. Picard laissaient prévoir, je supposerai $n = 3$, afin de fixer les idées.

Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales abéliennes, la première réductible aux intégrales elliptiques. M'appuyant sur un théorème de M. Weierstrass, je supposerai que le tableau des périodes normales de ces intégrales s'écrit :

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 0 & 0 & G & h & 0 & & (\text{pour } y_1), \\ 0 & 1 & 0 & h & G' & H & & (\text{pour } y_2), \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H & G'' & & (\text{pour } y_3), \end{array}$$

h étant commensurable.

Je dis que si l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible, il en sera de même de $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ (ν étant un nombre commensurable quelconque).

En effet les périodes de l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ s'écrivent

$$\varpi_1 = \alpha, \qquad \varpi_2 = \beta, \qquad \varpi_3 = \gamma,$$
$$\varpi_4 = G\alpha + h\beta, \qquad \varpi_5 = h\alpha + G'\beta + H\gamma, \qquad \varpi_6 = H\beta + G''\gamma.$$

Pour que l'intégrale soit réductible, il faut et il suffit que ces périodes se réduisent à deux, c'est-à-dire qu'il y ait entre elles quatre relations linéaires à coefficients commensurables de la forme

$$(1) \qquad A_i\varpi_1 + B_i\varpi_2 + C_i\varpi_3 + A'_i\varpi_4 + B'_i\varpi_5 + C'_i\varpi_6 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

L'intégrale $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ a pour périodes

$$\varpi'_1 = \nu\alpha, \qquad \varpi'_2 = \beta, \qquad \varpi'_3 = \gamma,$$
$$\varpi'_4 = \nu G\alpha + h\beta, \qquad \varpi'_5 = \nu h\alpha + G'\beta + H\gamma, \qquad \varpi'_6 = H\beta + G''\gamma.$$

Or les relations (1) peuvent s'écrire

$$(1\ bis) \qquad \left[\frac{A_i}{\nu} - hB_i\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)\right]\varpi'_1 + \left[B_i - hA_i\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right]\varpi'_2$$
$$+ C_i\varpi'_3 + \frac{A'_i}{\nu}\varpi'_4 + B_i\varpi'_5 + C'_i\varpi'_6 = 0.$$

Il y a donc, entre les six périodes ϖ', quatre relations linéaires à coefficients commensurables. Donc l'intégrale $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible. C. Q. F. D.

On déduit aisément de là que, si le système d'intégrales du troisième genre considéré contient plus de trois intégrales réductibles, il en contient une infinité. Si les quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ sont réductibles, il en est de même de $\lambda\alpha y_1 + \mu\beta y_2 + \nu\gamma y_3$ (λ, μ et ν étant des coefficients commensurables quelconques).

D'après le théorème de M. Weierstrass, cité plus haut, on peut toujours choisir les périodes normales telles que le Tableau des périodes d'une intégrale réductible s'écrive (pour $n = 3$, par exemple)

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad \frac{\lambda}{D} \quad 0,$$

où le nombre entier D est l'entier caractéristique de la réduction.

Il est toujours facile de déterminer cet entier. Supposons en effet, que $n = 2$ et qu'on ait trouvé pour les périodes normales d'une intégrale réductible

$$(\alpha,\ \beta,\ \lambda\alpha + \mu\beta,\ \lambda'\alpha + \mu'\beta),$$

λ, μ, λ' et μ' étant commensurables. L'entier caractéristique sera égal à $\mu - \lambda$ divisé par la plus grande commune mesure des six quantités 1, λ, μ, λ', α' et $\lambda\mu' - \lambda'\mu$.

Mme Kowalevski, étudiant un système d'intégrales abéliennes du troisième genre, a rencontré quatre intégrales réductibles sans que sa méthode lui en ait fait découvrir d'autres. Ce fait, en apparence contraire à ce qui précède, s'explique aisément, car elle ne s'est occupée que des intégrales pour lesquelles l'entier caractéristique D est égal à 2.

Je terminerai par la remarque suivante :

Soit un système d'intégrales du second genre et soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales de ces intégrales. Pour que ce système contienne des intégrales réductibles, il faut et il suffit qu'il y ait entre les périodes G, H et G' une relation de la forme

$$(GG' - H^2) - \lambda G' - \mu' G + (\lambda' - \mu) H + \lambda\mu' - \lambda'\mu = 0,$$

les coefficients λ, μ, λ', μ' étant commensurables.

D'où cette conclusion qu'un système *quelconque* d'intégrales abéliennes diffère toujours *infiniment peu* d'un système réductible.

SUR
LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 99, p. 1145-1147 (29 décembre 1884).

La découverte récente de M. Picard sur les différentielles totales de première espèce a ouvert aux analystes une voie toute nouvelle où ils rencontreront sans aucun doute bien des propositions importantes. Aussi ne sera-t-il peut-être pas sans intérêt de signaler ici certains résultats partiels qui, bien que très faciles à démontrer, pourront être utiles aux géomètres qui s'occuperont de cette question.

J'ai cherché d'abord à déterminer quelles sont les surfaces du quatrième ordre qui possèdent des intégrales de première espèce. J'ai trouvé que toutes ces surfaces peuvent se ramener, par un changement linéaire de variables, soit à la surface réglée

$$x^2(az^2+2bz+c)+2xy(a'z^2+2b'z+c')+y^2(a''z^2+2b''z+c'')=0,$$

qui admet l'intégrale

$$\int \frac{y\,dz}{x(az^2+2bz+c)+y(a'z^2+2b'z+c')},$$

soit à la surface de révolution

$$(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)Z_2+Z_4=0$$

(Z_2 et Z_4 désignant deux polynomes de degré 2 et 4 en z), qui admet l'intégrale

$$\int \frac{dz}{x^2+y^2+Z_2}.$$

Il est ailleurs aisé de voir que toutes les surfaces réglées et toutes les surfaces de révolution admettent des intégrales de première espèce, à moins bien entendu qu'elles ne soient unicursales.

Si une surface admet une intégrale de première espèce u, réductible aux intégrales elliptiques, les courbes $u=$ const. sont algébriques.

Si l'on peut tracer sur une surface une courbe unicursale, et si u est une intégrale de première espèce quelconque de cette surface, la valeur de u sera la même tout le long de la courbe.

De même, si la surface admet un point conique de second ordre, dont le cône tangent soit indécomposable, la valeur de u en ce point conique sera *déterminée*.

Si l'on peut tracer sur une surface deux séries de courbes unicursales, elle n'aura pas d'intégrales de première espèce; si, sur une surface non unicursale, on peut tracer une série de courbes unicursales, de telle façon que par chaque point de la surface passe, en général, une seule de ces courbes, elle aura des intégrales de première espèce.

Supposons que l'équation d'une surface soit obtenue par l'élimination de deux paramètres a et b, entre les trois équations

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\psi(a, b) = 0.$$

Si les trois polynomes φ, φ_1, *et* ψ *sont les plus généraux de leurs degrés*, la relation $\psi = 0$ est de genre plus grand que 0; à un point de la surface correspond un seul système de valeurs des paramètres et, par conséquent, la surface admet des intégrales de première espèce.

Enfin le théorème d'Abel s'applique aux intégrales de différentielles totales.

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_q$ les points d'intersection de la surface avec la courbe

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu},$$

α, β, γ étant des polynomes entiers en x, y, z et λ, μ, ν des constantes. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_q$ les valeurs d'une certaine intégrale de première espèce u en ces différents points.

Soient de même $M'_1, M'_2, \ldots, M'_q$ les points d'intersection de la surface avec la courbe

$$\frac{\alpha}{\lambda'} = \frac{\beta}{\mu'} = \frac{\gamma}{\nu'},$$

λ', μ' et ν' étant de nouvelles constantes; soient $u'_1, u'_2, \ldots, u'_q$ les valeurs de l'intégrale u aux points $M'_1, M'_2, \ldots, M'_q$.

On aura

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_q.$$

SUR

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'ABEL

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 100, p. 40-42 (5 janvier 1885).

Le théorème d'Abel, appliqué à une courbe algébrique $f = 0$ de degré m, peut s'énoncer ainsi :

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_q, y_q) *les points d'intersection de* $f = 0$ *avec une autre courbe algébrique* $\varphi = 0$; *soient* $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1)$, $(x_2 + dx_2, y_2 + dy_2)$, $\ldots$, $(x_q + dx_q, y_q + dy_q)$ *les points d'intersection de la courbe* f *avec une courbe algébrique* $\varphi + \varepsilon\psi = 0$ *infiniment peu différente de* φ; *on aura*

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{P(x_\nu, y_\nu)\,dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}} = 0,$$

P *désignant un polynome quelconque d'ordre* $m - 3$, *qui devra s'annuler aux points doubles de* f, *si les courbes* φ *et* $\varphi + \varepsilon\psi$ *vont passer par ces points doubles.*

Considérons maintenant une courbe gauche, intersection complète de deux surfaces $f = 0$, $f_1 = 0$ de degrés m et n. Soit (x_ν, y_ν, z_ν) un quelconque des q points d'intersection de cette courbe avec une surface $\varphi = 0$, et $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu, z_\nu + dz_\nu)$ un des points d'intersection de cette même courbe, avec une surface $\varphi + \varepsilon\psi = 0$ infiniment voisine de la première. On aura

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{P(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\,dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}\dfrac{df_1}{dz_\nu} - \dfrac{df_1}{dy_\nu}\dfrac{df}{dz_\nu}} = 0,$$

P désignant un polynome quelconque d'ordre $m + n - 4$.

Après avoir mis le théorème d'Abel sous cette forme, qui ne diffère pas essentiellement de la forme habituelle, il est aisé de l'étendre aux surfaces.

Soit $f=0$ une surface de degré m. Soit (x_ν, y_ν, z_ν) un de ses points d'intersection avec une courbe gauche, $(x_\nu+dx_\nu,\ y_\nu+dy_\nu,\ z_\nu+dz_\nu)$ un de ses points d'intersection avec une courbe gauche infiniment voisine. On peut se demander quelles relations il y a entre les différentielles dx_ν, dy_ν, dz_ν.

Je me bornerai pour le moment aux courbes gauches qui sont l'intersection complète de deux surfaces $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, de degrés n et p.

On trouve alors

$$(1)\quad \sum_{\nu=1}^{q} \frac{P_\nu\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d\varphi}{dy_\nu}dy_\nu + \frac{d\varphi}{dz_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu} - \sum_{\nu=1}^{q} \frac{Q_\nu\left(\frac{d\varphi_1}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d\varphi_1}{dy_\nu}dy_\nu + \frac{d\varphi_1}{dz_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu} = 0.$$

Dans ces formules P_ν et Q_ν désignent des polynomes de degré $m+p-4$ et $m+n-4$ en x, y, z, où l'on a remplacé ces variables par x_ν, y_ν, z_ν. Quant à Δ_ν, c'est le déterminant fonctionnel de f, φ et φ_1 par rapport à x, y, z, où ces variables sont remplacées par x_ν, y_ν, z_ν.

Un cas particulier assez intéressant est celui où la surface f se réduit à un plan.

Soient alors $\varphi=0$, $\varphi_1=0$ deux courbes de degré m et (x_ν, y_ν) un de leurs points d'intersection. Soit $(x_\nu+dx_\nu,\ y_\nu+dy_\nu)$ ce que devient ce point d'intersection, quand ces deux courbes varient infiniment peu. Il vient

$$\sum_{\nu=1}^{m^2} \frac{P(x_\nu, y_\nu)\left[\frac{d(\varphi+\lambda\varphi_1)}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d(\varphi+\lambda\varphi_1)}{dy_\nu}dy_\nu\right]}{\frac{d\varphi}{dx_\nu}\frac{d\varphi_1}{dy_\nu} - \frac{d\varphi_1}{dx_\nu}\frac{d\varphi}{dy_\nu}} = 0,$$

P étant un polynome quelconque d'ordre $m-3$, et λ une constante quelconque.

Le théorème s'applique même si la surface f n'a pas de point singulier, auquel cas il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir d'intégrale de première espèce. Mais il contient, comme cas particulier, le résultat que j'ai énoncé dernièrement au sujet de ces intégrales. Si donc du est une différentielle totale de première espèce et si φ et φ_1 sont deux polynomes quelconques d'ordre n et p, on devra avoir

$$du = \frac{P\,d\varphi - Q\,d\varphi_1}{\Delta},$$

P et Q étant deux polynomes d'ordre $m+p-4$ et $m+n-4$, et Δ étant le déterminant fonctionnel de f, φ et φ_1 par rapport à x, y et z.

Le problème est beaucoup plus compliqué quand la courbe gauche dont il

s'agit n'est pas une intersection complète. Pour faire voir de quelle manière il devrait être traité dans ce cas, envisageons le cas particulier d'une cubique gauche.

Supposons d'abord que l'on fasse varier cette cubique, de telle façon que deux de ses $3m$ points d'intersection avec la surface f restent fixes. On pourra alors trouver deux surfaces du second ordre $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ qui passent par la cubique donnée et par la droite qui joint ces deux points fixes. La formule (1) reste vraie, si on l'applique à ces deux surfaces et aux points *variables* d'intersection de la surface f avec la cubique.

Si, ensuite, on fait varier la cubique d'une manière quelconque, on pourra toujours regarder cette variation comme la somme d'une variation où deux points A et B, communs à la cubique et à f, restent fixes, et d'une autre variation où deux points C et D, communs à la cubique et à f, restent fixes.

SUR LA RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 915-916 (19 avril 1886).

Le problème de la réduction des intégrales abéliennes de genre ρ à un genre inférieur μ a été, dans ces derniers temps, l'objet de nombreux travaux parmi lesquels nous citerons un grand nombre de Notes de M. Picard, insérées dans divers volumes des *Comptes rendus* et réunies ensuite dans le tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France*. J'ai moi-même donné, dans le même *Bulletin*, une généralisation d'un théorème de M. Weierstrass, relatif au cas de $\mu = 1$. M. Picard ayant montré que la simplification peut être poussée plus loin encore dans le cas de $\rho = 2, \mu = 1$, j'ai voulu voir s'il n'en était pas de même dans le cas général. Il en est effectivement ainsi.

Faisons $\mu = 3$, $\rho = 6$, pour fixer les idées; on peut amener le Tableau des périodes à la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B'' & B' & 0 & 0 & \frac{1}{a}, \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B'' & A' & B & 0 & \frac{1}{ab} & 0, \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B' & B & A'' & \frac{1}{abc} & 0 & 0, \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{abc} & G & H'' & H', \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & H'' & G' & H, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & H' & H & G''.
\end{array}$$

$a, b, \ldots$ sont des nombres entiers.

Il y a des cas particuliers où la simplification peut encore être poussée plus loin.

Faisons, par exemple, $\mu = 2$, $\rho = 5$; on aura, en général,

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & \frac{1}{a} & 0, \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B & C & \frac{1}{ab} & 0 & 0, \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & G & H'' & H', \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & H'' & G' & H, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H' & H & G''.
\end{array}$$

Mais, si $a = 1$, on pourra ramener le Tableau des périodes à la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & 0 & 0, \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B & C & \frac{1}{b} & 0 & 0, \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & G & H'' & H', \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & H'' & G' & H, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H' & H & G''.
\end{array}$$

SUR LA RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

ET

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 27, p. 281-336 (1909).

I. — Généralités sur la réduction.

Il est à peine nécessaire de rappeler ici les principes de la théorie de la réduction des intégrales abéliennes. Considérons une courbe algébrique C de genre p admettant p intégrales de première espèce $2p$ fois périodiques. Dans certains cas, il arrive que les périodes de q de ces intégrales $(q < p)$ ne sont que des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $2q$ périodes seulement. On dit alors que les intégrales abéliennes relatives à cette courbe sont susceptibles de réduction.

Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

ces p intégrales. Soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{2p}$$

$2p$ cycles distincts tracés sur la surface de Riemann correspondant à notre courbe. Quand on décrira le cycle C_k, l'intégrale u_i augmentera d'une constante α_{ik}, de sorte que chacune de nos p intégrales admettra $2p$ périodes

$$\alpha_{i1}, \quad \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i,2p}.$$

Il y a réduction si l'on a

$$(1) \qquad \alpha_{ik} = \Sigma_j m_{kj} \beta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, 2p;\ j = 1, 2, \ldots, 2q),$$

les m_{kj} étant $4pq$ nombres entiers et les β_{ij} étant $4q^2$ constantes quelconques.

L'un des cas les plus intéressants est celui où $q = 1$, c'est-à-dire où l'une des intégrales u, par exemple, u_1, est réductible aux intégrales elliptiques. Les relations (1) se réduisent alors à

$$\text{(1 bis)} \qquad \alpha_{1k} = m_{k1}\beta_{11} + m_{k2}\beta_{12}.$$

Soient alors x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe C. Soient x' et y' deux fonctions doublement périodiques de u_1 admettant pour périodes β_{11} et β_{12}. Si nous regardons x' et y' comme les coordonnées d'un point M', ce point M' va décrire une courbe algébrique C' de genre 1. A chaque point de la courbe C' correspond une valeur de u_1 intérieure au parallélogramme des périodes et une seule, et inversement. Or à chaque point M de C correspond une valeur de u_1 déterminée à une période près et une seule, et par conséquent un seul point M', d'où il suit que x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et y; au contraire x et y ne sont pas des fonctions rationnelles de x' et y' sans quoi les deux courbes C et C' seraient de même genre. Les deux courbes C et C' sont donc liées par une transformation *unirationnelle*.

Réciproquement, envisageons deux courbes C et C' de genre p et 1 et telle que l'on passe de la première à la deuxième par une transformation unirationnelle. Je dis qu'une des intégrales de C est réductible aux intégrales elliptiques ; en effet, la courbe C' étant de genre 1 admet une intégrale elliptique de première espèce

$$u_1 = \int R(x', y')\,dx',$$

R étant rationnel en x' et y'. Or x' et y' sont eux-mêmes, par hypothèse, des fonctions rationnelles de x et y, de sorte que

$$u_1 = \int R_1(x, y)\,dx.$$

R_1 étant rationnelle en x et y. Donc u_1 est l'une des intégrales abéliennes de première espèce de C ; et u_1 n'a que deux périodes distinctes. C. Q. F. D.

Cette dernière proposition peut s'étendre au cas de $q > 1$. Supposons deux courbes C et C' de genre p et q $(q < p)$ et telles que l'on puisse passer de C à C' par une transformation unirationnelle. La courbe C' étant de genre q admettra q intégrales abéliennes de première espèce

$$u_i = \int R(x', y')\,dx' \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

qui auront $2p$ périodes distinctes. Comme x' et y' sont rationnels en x et y,

nous pourrons écrire

$$u_i = \int R_i(x, y)\,dx,$$

de sorte que les q intégrales u_i qui ont $2q$ périodes distinctes seront des intégrales abéliennes de première espèce de C. Les intégrales de C sont donc susceptibles de réduction.

La réciproque n'est pas vraie. D'abord s'il y a réduction, il peut se faire que les constantes β ne soient pas les périodes des intégrales abéliennes relatives à une courbe C'. On verrait assez aisément que ces constantes β doivent satisfaire aux conditions nécessaires pour être les périodes d'une fonction abélienne. Mais il peut très bien arriver que les périodes d'une fonction abélienne ne soient pas les périodes d'un système d'intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique. Un système de fonctions abéliennes de genre p dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes ; une courbe algébrique de genre p dépend de $3p-3$ constantes seulement. Les deux nombres ne sont égaux que pour $p=2$ et pour $p=3$. Donc, pour $p>3$ la fonction abélienne engendrée par une courbe algébrique n'est pas la fonction abélienne la plus générale. Elle peut s'appeler une fonction abélienne *spéciale*.

Eh bien, les constantes β seront toujours les périodes d'une fonction abélienne, mais pas toujours celles d'une fonction abélienne spéciale. Mais ce n'est pas tout. Supposons que les β soient les périodes d'une fonction abélienne spéciale, c'est-à-dire qu'il existe une courbe C' dont les intégrales abéliennes de première espèce aient précisément pour périodes les constantes β. Il ne s'ensuivra pas nécessairement que l'on puisse passer de C à C' par une transformation unirationnelle ; ou tout au moins le raisonnement précédent ne permet pas de l'affirmer.

Reprenons en effet ce raisonnement et considérons q points

$$M'_1, \quad M'_2, \quad \ldots, \quad M'_q$$

de la courbe C'. Soient d'autre part

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_q$$

les q intégrales de première espèce de C'. Soit u'_{ik} la valeur de l'intégrale u_i au point M'_k, et posons

$$u'_{i1} + u'_{i2} + \ldots + u'_{iq} = v'_i.$$

Nous savons que les valeurs de $v'_1, v'_2, \ldots, v'_q$ suffisent pour déterminer (à l'ordre près) l'ensemble des q points M' et que, inversement, quand cet ensemble des q points M' nous est donné, on connaît les v'_i à une période près.

Maintenant ces q intégrales u_i sont aussi des intégrales abéliennes relatives à C, à savoir celles qui, par hypothèse, sont susceptibles de réduction ; si donc nous envisageons q points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_q$$

sur C et que nous désignions par u_{ik} la valeur de l'intégrale u_i en M_k, si nous posons

$$u_{i1} + u_{i2} + \ldots + u_{iq} = v_i,$$

à chaque système de points M_1, M_2, ..., M_q correspondra un système de valeurs des v_i déterminé à une période près. Supposons qu'on fasse

$$v_i = v'_i;$$

cette égalité fera correspondre à un système M_1, M_2, ..., M_q de points de la courbe C un système de valeurs des v'_i déterminé à une période près, et par conséquent un système M'_1, M'_2, ..., M'_q de points de la courbe C′ entièrement déterminé.

Soient x_i, y_i les coordonnées de M_i ; x'_i, y'_i celles de M'_i. Il résulte de ce qui précède que toute fonction rationnelle symétrique de

$$(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; \ldots; x'_q, y'_q)$$

sera une fonction rationnelle et symétrique de

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_q, y_q).$$

Mais il ne s'ensuit pas, sauf dans des cas exceptionnels (et c'est sur ce point que je veux insister), que x'_1, y'_1 soient fonctions rationnelles de x_1, y_1 ; x'_2, y'_2 étant les mêmes fonctions de x_2, y_2 ; etc.

D'autre part, il est presque inutile de rappeler que la transformation est unirationnelle et non birationnelle ; et que, par conséquent, toute fonction rationnelle et symétrique des x_i, y_i n'est pas une fonction rationnelle et symétrique des x'_i, y'_i.

Les cas de réduction peuvent être ramenés à certaines formes canoniques simples par un choix convenable des périodes et des intégrales. Pour le faire bien comprendre, je vais montrer quel est, dans deux cas de réduction, le tableau des périodes normales ramené à sa forme canonique :

PREMIER EXEMPLE :

$$q = 1, \quad p = 3.$$

Cycles	C_1.	C_2.	C_3.	C_4.	C_5.	C_6.
Intégrale u_1	$2i\pi$	0	0	b	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	0
» u_2	0	$2i\pi$	0	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	a	b
» u_3	0	0	$2i\pi$	0	b	c

(α entier).

DEUXIÈME EXEMPLE :

Cycles	C_1.	C_2.	C_3.	C_4.	C_5.	C_6.	C_7.	C_8.
Intégrale u_1	$2i\pi$	0	0	0	a	b	0	$\frac{2i\pi}{\alpha}$
» u_2	0	$2i\pi$	0	0	b	c	$\frac{2i\pi}{\alpha\beta}$	0
» u_3	0	0	$2i\pi$	0	0	$\frac{2i\pi}{\alpha\beta}$	a'	b'
» u_4	0	0	0	$2i\pi$	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	0	b	c

(α, β entiers).

Ces deux exemples suffiront pour faire comprendre quel est le sens du théorème général, et la façon de ramener à la forme canonique. Je renverrai pour plus de détails à un de mes Mémoires (¹).

Quoi qu'il en soit, rappelons ce que c'est qu'une fonction θ d'ordre k. Nous aurons p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et $2p$ périodes, p de la première sorte, p de la deuxième sorte ; la $k^{\text{ième}}$ période de la première sorte est égale à $2i\pi$ pour u_k et à zéro pour les autres variables ; la $k^{\text{ième}}$ période de la deuxième sorte est égale à a_{kh} pour u_h. On a d'ailleurs

$$a_{kh} = a_{hk}.$$

Soient alors, les m étant des entiers,

$$P = \Sigma_i m_i u_i, \qquad 2Q = \Sigma_{ij} a_{ij} m_i m_j.$$

(¹) *Sur les fonctions abéliennes* (*American Journal of Mathematics*, vol. VIII, 1886, p. 289-342).

La fonction Θ proprement dite est la fonction

$$\Theta = \Sigma e^{P+Q}.$$

Une fonction θ d'ordre k sera de la forme

$$\theta = \Sigma A e^{P+P_0-\frac{Q}{k}}.$$

où l'on aura $P_0 = \Sigma_i m_i b_i$, les b étant des constantes et où les A seront des coefficients dépendant des entiers m, mais assujettis à reprendre les mêmes valeurs quand les m augmentent de multiples de k.

Deux fonctions θ d'ordre k appartiennent au même faisceau, quand elles ont mêmes *multiplicateurs*, c'est-à-dire quand la forme P_0 est la même pour l'une et pour l'autre. Les fonctions θ d'un même faisceau s'expriment linéairement à l'aide de k^p d'entre elles, puisque c'est là le nombre des valeurs distinctes que peut prendre le coefficient A.

Supposons maintenant qu'il y ait réduction ; nous distinguerons alors les q premières variables que nous appellerons les u, et les $p-q$ dernières que nous appellerons les u'. Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus nous aurons une variable u qui sera u_1 et deux variables u' qui seront

$$u_1 + u_2, \qquad u_2 - u_3;$$

dans le deuxième exemple nous aurons deux variables u qui seront u_1 et u_2 et deux variables u' qui seront

$$u_1 - u_3, \qquad u_2 - u_4.$$

De même, nous désignerons par m_i et m'_i les coefficients entiers qui correspondent à u_i et u'_i.

Nous pouvons alors poser

$$P = P_1 + P_2, \qquad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

P_1 représente la partie de P qui dépend seulement des m et P_2 celle qui dépend seulement des m', de telle sorte que

$$P_2 = \Sigma m'_i u'_i.$$

De même, Q_1 représente la partie de Q qui dépend seulement des m, Q_2 celle qui dépend seulement des m', et Q_3 celle qui dépend à la fois des m et des m'. Tous les termes de Q_1 sont du second degré par rapport aux m, tous ceux de Q_2 sont du second degré par rapport aux m' ; ceux de Q_3 sont du premier degré, d'une part par rapport aux m, d'autre part par rapport aux m'. Dans le

premier exemple ci-dessus on a donc

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_1$$

et dans le deuxième exemple

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_2 + \frac{2i\pi}{\alpha\beta} m_2 m'_1.$$

Nous observerons ensuite que e^{-Q_3} ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Cela tient à ce que les m et les m', de même que α et β, sont des entiers. Dans le premier exemple, e^{-Q_3} ne change pas si m_1 ou m'_1 augmente de α, et comme il ne dépend d'ailleurs que de m_1 et m'_1, il ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de α ; dans le deuxième exemple, il ne change pas si m_1 ou m'_2 augmentent d'un multiple de α, ou si m_2 ou m'_1 augmentent de $\alpha\beta$. Il ne change donc pas si les m et les m' augmentent de multiples de $\alpha\beta$. Dans tous les cas il existe un nombre k tel que e^{-Q_3} ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de k.

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(u, u') = \sum e^{P_1+P_2+Q_1+Q_2+Q_3}.$$

La sommation doit se faire par rapport aux m et aux m'. Regardons pour un instant les u comme donnés ; posons alors

$$A = \sum e^{P_1+Q_1+Q_3},$$

où la sommation se fait par rapport aux m seulement ; A dépendra donc des u et des m' ; l'essentiel est de remarquer que A ne change pas quand les m' augmentent de multiples de k.

Posons

$$Q' = kQ_2 ;$$

Q' sera la forme quadratique formée avec des périodes de la deuxième sorte, k fois plus grandes que celles qui figurent au tableau primitif ; et l'on aura

$$\Theta(u, u') = \sum A e^{P_2+\frac{Q'}{k}},$$

la sommation devant cette fois s'effectuer par rapport aux m' ; ce qui montre que Θ considérée comme fonction des u' est une fonction θ d'ordre k admettant comme périodes de la deuxième sorte celles qui ont servi à construire la forme Q'. Dans le premier exemple ci-dessus, ce sera une fonction θ d'ordre α admettant comme périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 2i\pi & \alpha b & \alpha c. \end{matrix}$$

Dans le deuxième exemple, ce sera une fonction θ d'ordre $\alpha\beta$ admettant pour périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha\beta a' & \alpha\beta b' \\ 0 & 2i\pi & \alpha\beta b' & \alpha\beta c'. \end{matrix}$$

Remarquons que cette nouvelle manière d'envisager la réduction des périodes abéliennes est applicable non seulement aux fonctions Θ spéciales (comme l'étaient les précédentes qui partaient de la considération de la courbe algébrique C), mais aux fonctions Θ les plus générales.

II. — L'invariant de la réduction.

Soient α_{iq} les $2p$ périodes de nos intégrales abéliennes et reprenons la relation (1) du paragraphe précédent :

$$(1) \qquad \alpha_{ik} = \Sigma_j m_{kj}\beta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, 2p;\ j = 1, 2, \ldots, 2q).$$

Je ne suppose nullement ici que les périodes choisies soient les périodes normales. Nous devons d'abord définir la *forme bilinéaire* $F(x, y)$ *caractéristique de ce système de périodes.* Pour cela soient

$$\begin{aligned} U &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_p u_p, \\ U' &= \mu'_1 u_1 + \mu'_2 u_2 + \ldots + \mu'_p u_p \end{aligned}$$

deux combinaisons linéaires quelconques de nos p intégrales abéliennes. Soient

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_{2p}, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{2p} \end{matrix}$$

les $2p$ périodes de U et de U', de telle sorte que

$$x_j = \Sigma \mu_k \alpha_{kj}, \qquad y_j = \Sigma \mu'_k \alpha_{kj}.$$

On aura entre les x et les y une certaine relation bilinéaire

$$(2) \qquad F(x, y) = 0$$

qui subsistera quels que soient les coefficients μ et μ' ; et c'est le premier membre de cette relation qui sera la *forme bilinéaire caractéristique.*

Dans le cas des périodes normales, cette forme se réduit à

$$\Sigma(x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}).$$

Si la relation (1) a lieu de façon qu'il y ait réduction et que U soit une combinaison des intégrales réductibles, de telle sorte que

$$\mu_k = 0, \qquad (k > q)$$

on pourra écrire

$$x_k = \Sigma_i \mu_i \alpha_{ik} = \Sigma_{ij} \mu_i m_{kj} \beta_{ij},$$

ou bien encore

$$(3) \qquad x_k = \Sigma_j m_{kj} \omega_j, \qquad \omega_j = \Sigma_i \mu_i \beta_{ij}.$$

Si nous substituons dans (2) à la place des x leurs valeurs tirées de la première équation (3), cette relation bilinéaire prend la forme

$$(4) \qquad \Sigma H_j \omega_j = 0,$$

où

$$H_j = \sum_{ik} \frac{d^2 F}{dx_k \, dy_i} m_{kj} y_i = F(m_{kj}, y_i)$$

est une combinaison linéaire des y.

Nous pouvons assujettir les coefficients μ', restés jusqu'ici arbitraires, aux $2q$ conditions

$$(5) \qquad H_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q),$$

qui sont des relations linéaires entre les μ', puisque les y sont des fonctions linéaires des μ'. Si ces relations (5) étaient distinctes, elles admettraient $p - 2q$ solutions linéairement indépendantes, puisque nous aurions p inconnues μ' entre lesquelles nous aurions $2q$ relations distinctes. Mais ces relations (5) ne sont pas distinctes, puisque les H_j sont liés par les identités (4). Ces identités (4) sont au nombre de q, puisque U désigne une quelconque des intégrales abéliennes réductibles, de sorte que nous pouvons prendre indifféremment

$$U = u_1, \quad U = u_2, \quad \ldots, \quad U = u_q.$$

Les équations (5) admettront donc $p - q$ solutions linéairement indépendantes.

Si ces équations sont satisfaites, l'intégrale abélienne U′ sera réductible au genre $p - q$. En effet, ses $2p$ périodes y seront liées par les $2q$ relations linéaires (5) qui sont à coefficients entiers, de sorte que ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de $2p - 2q$ périodes distinctes que nous appellerons ζ et que nous pourrons écrire (les n étant des entiers)

$$(6) \qquad y_i = \Sigma n_{ij} \zeta_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p;\ j = 1, 2, \ldots, 2p - 2q).$$

En résumé, nous aurons d'une part q intégrales U réductibles au genre q et d'autre part $p - q$ intégrales U′ réductibles au genre $p - q$.

Rapprochons les égalités (5) et (6), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ik}\,\omega_k, \qquad y_i = \sum n_{ij}\,\zeta_j,$$

et formons le déterminant des entiers m et n ; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes, puisque les indices i, k et j varient respectivement de 1 à $2p$, de 1 à $2q$, de 1 à $2p-2q$. Je remarque que ce déterminant sera un *invariant*, je veux dire qu'il ne changera pas : 1° si l'on remplace le système des périodes α par un autre système équivalent ; 2° si l'on remplace les périodes ω, ou encore les périodes ζ par un système équivalent.

Je suppose, bien entendu, que le système des ω, de même que celui des ζ, a été choisi de la façon la plus simple possible ; c'est-à-dire que : 1° si l'on forme le tableau des coefficients m, tous les déterminants formés en prenant $2q$ colonnes de ce tableau sont des entiers premiers entre eux ; 2° que le tableau des coefficients n jouit de la même propriété.

Posons maintenant

$$(7) \qquad H_j = \sum h_{ij}\,y_i ;$$

les coefficients

$$h_{ij} = \sum_k \frac{d^2F}{dx_k\,dy_i}\,m_{kj}$$

seront des entiers. Rapprochons maintenant les équations (3) et (7), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ij}\,\omega_j, \qquad H_j = \sum h_{ij}\,y_i$$

et formons d'une part le tableau des m et d'autre part celui des h. Dans le premier tableau, m_{ij} occupera la j^e ligne et la i^e colonne ; dans le deuxième tableau h_{ij} occupera la j^e ligne et la i^e colonne.

Soit D l'un quelconque des déterminants formés à l'aide du premier tableau et qui, d'après ce que nous venons de supposer, sont tous premiers entre eux. Soit D′ le déterminant correspondant du deuxième tableau. Considérons la somme ΣDD′ et comparons-la au déterminant Δ des m et des n, qui, nous l'avons vu, est un invariant.

Les n seront définies par les équations

$$(8) \qquad \Sigma_i h_{ij}\,n_{ik} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q;\ k = 1, \ldots, 2p-2q).$$

On a en effet

$$0 = H_j = \sum h_{ij}\,y_i = \sum h_{ij}\,n_{ik}\,\zeta_k$$

et cette relation doit être une identité par rapport aux ζ_k.

Formons le déterminant M des h et des n ; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes. Soit D′ l'un des déterminants formés avec $2q$ colonnes du tableau des h ; ce sera un mineur de M ; nous continuons à désigner par D le déterminant formé avec les *mêmes* colonnes du tableau des m. Je désignerai de même par D″ le déterminant du tableau des n correspondant à D′ ; je veux dire par là celui que l'on obtient en supprimant dans le tableau des n les colonnes que l'on conserve dans le tableau des h quand on veut obtenir D′. Il résulte de là que D″ est aussi un mineur de M, et que l'on a, en développant le déterminant M,

$$M = \Sigma D' D''.$$

On aura de même en développant le déterminant Δ

$$\Delta = \Sigma D D''.$$

Et enfin nous nous proposons d'étudier l'expression

$$J = \Sigma D D'.$$

Quelle est alors la signification des égalités (8) ; elles signifient que les déterminants D′ et D″ sont proportionnels, c'est-à-dire que l'on a

$$D' = \lambda D''.$$

Par une hypothèse faite plus haut, les D″ sont des entiers premiers entre eux ; les D′ sont des entiers. Donc λ n'est pas autre chose que le plus grand commun diviseur de ces entiers.

Pour déterminer ce plus grand commun diviseur, nous remarquerons qu'il ne doit pas changer quand on remplace les périodes α par un système de périodes équivalent. Soit en effet un nouveau système de périodes α' ; les α' sont liés aux α par un système de relations linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1 ; les x' et les y' sont liés respectivement aux x et aux y par les mêmes relations linéaires. La relation $F(x, y) = 0$ devient

(2 *bis*) $$F'(x', y') = 0,$$

$F'(x', y')$ étant ce que devient $F(x, y)$ quand on y remplace les x et les y par leurs valeurs en fonctions des x' et des y'.

Les relations (3), (4), (6), (7) deviennent

(3 *bis*) $$x' = \Sigma m' \omega,$$

(4 *bis*) $$\Sigma H \omega = 0,$$

(6 *bis*) $$y' = \Sigma n' \zeta,$$

(7 *bis*) $$H = \Sigma h' y' = \Sigma h y.$$

On voit que les m et les m' sont liés entre eux par les mêmes relations linéaires que les α et les α' ; et que les h et les h', à cause de l'identité

$$\Sigma h_i y_i = \Sigma h'_i y'_i,$$

sont liés par les relations contragrédientes, c'est-à-dire par des relations qui sont comme les premières à coefficients entiers et de déterminant 1. Il résulte de là que ces transformations n'altéreront ni le plus grand commun diviseur des D, ni celui des D'. Nous pouvons donc supposer qu'on a choisi les périodes normales.

On a alors

$$F(x, y) = \Sigma(x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}),$$

$$H_j = \Sigma(m_{2k-1,j} y_{2k} - m_{2k,j} y_{2k-1}),$$

$$h_{2k,j} = m_{2k-1,j}, \qquad h_{2k-1,j} = -m_{2k,j},$$

ce qui montre que dans ce cas les h ne sont autre chose que les m au signe et à l'ordre près ; de sorte que les D ne sont autre chose que les D' au signe et à l'ordre près.

Or les D sont premiers entre eux, il en est donc de même des D' ; donc on a

$$\lambda = 1.$$

Nous pouvons supposer $\lambda = 1$, quitte à permuter deux des ω. Il vient ainsi

$$D = D', \qquad J = \Delta.$$

Ce qui montre que *l'expression J est l'invariant cherché.*

Appliquons cela aux deux exemples du paragraphe I ; pour le premier il vient

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha}, \qquad \omega_2 = h, \qquad G = 2u_1.$$

Le tableau des m est donc

(ω_1)	α	0	0	0	1	0
(ω_2)	0	0	0	1	0	0

et, comme les périodes sont normales, celui des h est

0	1	0	α	0	0,
-1	0	0	0	0	0.

Tous les D sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à α ; de même, tous les D' sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à α. Seulement le D qui est égal à α correspond au D' qui est égal à α, tandis que le D qui est égal à 1 correspond à un D' qui est

égal à zéro et le D' qui est égal à 1 à un D qui est égal à zéro. Donc tous les DD' sont égaux à zéro excepté un d'eux qui est égal à α^2 et l'on a

$$J = \Sigma DD' = \alpha^2.$$

Passons au deuxième exemple

$$I = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \qquad \omega_1 = \frac{2i\pi\mu_1}{\alpha}, \qquad \omega_2 = \frac{2i\pi\mu_2}{\alpha\beta},$$

$$\omega_3 = \mu_1 a + \mu_2 b, \qquad \omega_4 = \mu_1 b + \mu_2 c.$$

Les périodes x sont respectivement :

$$2i\pi\mu_1, \quad 2i\pi\mu_2, \quad 0, \quad 0, \quad \mu_1 a + \mu_2 b, \quad \mu_1 b + \mu_2 c, \quad \frac{2i\pi\mu_2}{\alpha\beta}, \quad \frac{2i\pi\mu_1}{\alpha};$$

ce qui donne pour le tableau des m

(ω_1)	α	0	0	0	0	0	0	1
(ω_2)	0	$\alpha\beta$	0	0	0	0	1	0
(ω_3)	0	0	0	0	1	0	0	0
(ω_4)	0	0	0	0	0	1	0	0

et pour le tableau des h, les périodes étant normales,

0	0	0	-1	α	0	0	0
0	0	-1	0	0	$\alpha\beta$	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0.	0	0

Le seul des produits DD' qui ne s'annule pas est celui où les déterminants D et D' sont formés avec les colonnes 1, 2, 5 et 6 ; et dans ce produit on a

$$D = D' = \alpha^2\beta.$$

On aura donc

$$J = \Sigma DD' = \alpha^4\beta^2.$$

Ainsi, si l'on choisit le système de périodes de façon à mettre le tableau des périodes réductibles sous la forme canonique, l'invariant J est un carré parfait. Car la démonstration que nous avons développée dans les deux exemples précédents s'applique évidemment à tous les cas. Or, cet invariant ne dépend pas du choix des périodes. Donc *l'invariant* J *est toujours un carré parfait.*

Jusqu'ici nous avons supposé que les périodes x et y étaient distinctes. Ne faisons plus cette hypothèse ; les périodes x peuvent n'être pas distinctes et par conséquent leur nombre peut être plus grand que $2p$.

Il existera alors un système de $2p$ périodes distinctes x', et nous aurons entre

les deux systèmes de périodes les relations

(9) $$x_i = \Sigma_k \lambda_{ik} x'_k,$$

les λ étant entiers ; et entre les périodes correspondantes y et y' les relations

(9 *bis*) $$y_i = \Sigma \lambda_{ik} y'_k.$$

Il existera encore une forme bilinéaire $F(x, y)$ telle qu'on aura pour deux intégrales abéliennes quelconques de première espèce

$$F(x, y) = 0.$$

Quand on remplacera, dans cette forme, les x et les y par leurs valeurs (9) et (9 *bis*), elle deviendra une forme bilinéaire en x' et y' que j'appellerai $F'(x', y')$, de sorte qu'on aura l'identité

$$F(x, y) = F'(x', y').$$

Nous conserverons les mêmes périodes ω et nous aurons la relation

(3'') $$x_k = \Sigma_j m_{kj} \omega_j$$

et de même avec les périodes x'

(3''') $$x'_k = \Sigma m'_{kj} \omega_j.$$

Les m et les m' sont entiers. Le tableau des m' a $2p$ colonnes et q lignes ; celui des m a q lignes, mais peut avoir plus de $2p$ colonnes. On aura d'ailleurs

(10) $$m_{ij} = \Sigma_k \lambda_{ik} m'_{kj}.$$

Nous avons d'autre part

$$F = \Sigma H_j \omega_j, \qquad H_j = \Sigma h_{ij} y_i,$$

et avec les périodes y'

$$H_j = \Sigma h'_{kj} y'_k,$$

d'où l'identité

$$\Sigma h_{ij} y_i = \Sigma h'_{kj} y'_k = \Sigma h_{ij} \Sigma \lambda_{ik} y'_k = \Sigma\Sigma h_{ij} \lambda_{ik} y'_k,$$

d'où

(11) $$h'_{kj} = \Sigma_i \lambda_{ik} h_{ij}.$$

Les relations (10) et (11) sont les relations linéaires qui lient les nombres m et h avec les nombres m' et h' qui jouent le même rôle par rapport aux périodes x' et y'. On voit que ces relations linéaires sont contragrédientes.

Considérons le tableau des m et désignons par

$$D(i_1, i_2, \ldots, i_q)$$

le déterminant formé en prenant dans ce tableau les colonnes de rang i_1, $i_2, \ldots, i_q$. Désignons par $D'(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ le déterminant formé de la même manière avec le tableau des h; par $D_1(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ et $D'_1(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ les déterminants formés de la même manière avec les tableaux des m' et des h'. Soit ensuite

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_q \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_q \end{vmatrix}$$

le déterminant obtenu de la façon suivante : on considère le tableau des λ, en plaçant λ_{ik} dans la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne ; on supprime ensuite dans ce tableau toutes les lignes sauf celles de rang $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (que l'on range dans l'ordre indiqué) et toutes les colonnes sauf celles de rang $k_1, k_2, \ldots, k_q$.

On aura alors, en vertu des relations (10) et (11),

$$(10\ bis)\qquad D(i_1, i_2, \ldots, i_q) = \Sigma_k \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_q \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q),$$

$$(11\ bis)\qquad D'_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) = \Sigma_i \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_q \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_q \end{vmatrix} D'(i_1, i_2, \ldots, i_q).$$

Formons l'invariant J d'après la règle énoncée plus haut

$$J = \Sigma_i D(i_1, i_2, \ldots, i_q) D'(i_1, i_2, \ldots, i_q),$$

ou, en vertu de (10 *bis*),

$$J = \Sigma_{i,k} \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_q \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) D'(i_1, i_2, \ldots, i_q),$$

ou, en vertu de (11 *bis*),

$$J = \Sigma_k D'_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q).$$

Nous voyons que la transformation n'altère pas la forme de l'expression J. Or dans le cas des périodes x' et y', J représente un invariant. Il sera donc encore un invariant dans le cas des périodes x et y. D'ailleurs dans le cas des périodes distinctes, le même calcul aurait pu servir pour démontrer les propriétés invariantes de l'expression $\Sigma D D'$.

Donc, *la règle pour former l'invariant reste la même quand les périodes ne sont pas distinctes.*

Il importe toutefois de faire attention au choix de la forme $F(x, y)$.

Nous ne devons pas prendre pour cette *forme bilinéaire caractéristique* toute forme qui s'annule en vertu des relations entre les périodes; sans quoi la définition s'appliquerait tout aussi bien, non seulement à la forme $F(x, y)$,

mais à la forme $\alpha F(x, y)$, quel que soit le coefficient α. Il faut choisir la forme F de telle façon que, si les x' et les y' sont les périodes normales, on ait

$$F(x, y) = F'(x', y') = \Sigma(x'_{2k-1} y'_{2k} - x'_{2k} y'_{2k-1}).$$

Si les périodes x et y sont distinctes, cela veut dire que le discriminant de la forme F doit être égal à 1.

Ou bien encore, supposons que les périodes x et y n'étant pas distinctes, les périodes x' et y' soient distinctes, sans être forcément normales; nous devrons nous imposer la condition que, si l'on a

$$F(x, y) = F'(x', y'),$$

le discriminant de F' soit égal à 1.

Si les périodes x et y sont distinctes, les coefficients de $F(x, y)$ sont entiers. Si ces périodes ne sont pas distinctes, ils peuvent être fractionnaires, mais rien n'est d'ailleurs à modifier dans l'analyse qui précède.

Si les périodes x et y sont distinctes, la forme $F(x, y)$ se trouve entièrement déterminée par les conditions précédentes. Il n'en est plus de même si ces périodes ne sont plus distinctes. On a en effet entre les x certaines relations linéaires

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$$

et les relations correspondantes entre les y

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_m = 0;$$

et alors nous pourrons remplacer F par

$$F(x, y) + \Sigma(B_i X_i - A_i Y_i),$$

les A_i étant des fonctions linéaires quelconques des x, et les B_i des fonctions linéaires quelconques des y.

Il y a toutefois une condition complémentaire que nous devons imposer à la forme $F(x, y)$; cette forme doit s'annuler identiquement quand on y fait $x_i = y_i$. Si nous tenons compte de cette condition, nous ne pouvons plus choisir les fonctions linéaires A_i et B_i d'une façon tout à fait arbitraire; mais les B_i doivent être formés avec les y comme les A_i avec les x.

III. — Introduction des fonctions fuchsiennes.

Reprenons les deux courbes C et C′ du paragraphe I, ayant respectivement pour genre p et q. Nous désignerons également par les lettres C et C′ les surfaces de Riemann correspondantes. Nous supposerons que ces courbes sont liées par une transformation unirationnelle, de telle façon qu'à un point de C correspond un point de C′ et un seul, tandis qu'à un point de C′ correspondent n points de C. Ce nombre n joue un rôle important dans la suite, et nous devons tout d'abord chercher quelle relation le lie à l'invariant de la réduction ; ce sera là l'objet des premiers paragraphes qui vont suivre.

Nous avons vu au paragraphe I que la définition de la réduction peut être élargie, mais nous nous bornerons à l'étude des cas où il y a une transformation unirationnelle analogue à celle dont nous venons de parler.

Soient M un point mobile de C, et M′ le point correspondant de C′. Supposons que M′ décrive un contour fermé infiniment petit autour d'un point fixe A′ de la surface de Riemann C′ ; il peut arriver que M revienne à sa valeur initiale et décrive aussi un contour fermé ; mais il peut arriver également que M ne revienne pas à sa valeur initiale, et que les n déterminations de M s'échangent entre elles. Dans ce cas A′ est un point de ramification.

Imaginons par exemple que les n valeurs de M subissent une permutation se décomposant en α permutations circulaires permutant respectivement

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \dots, \quad \gamma_\alpha$$

valeurs de M, de telle façon que

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\alpha = n.$$

Alors au point A′, correspondront sur C seulement α points $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ correspondant à ces permutations circulaires.

Soit par exemple $n = 6$, et supposons que, quand M′ tourne autour de A′,

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad M_4, \quad M_5, \quad M_6$$

se changent respectivement en

$$M_2, \quad M_3, \quad M_1, \quad M_5, \quad M_4, \quad M_6.$$

La permutation se décomposera en trois permutations circulaires

$$(M_1 M_2 M_3)(M_4 M_5)(M_6)$$

et l'on aura

$$\nu_1 = 3, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 1.$$

Quand le point M′ tendra vers A′, M_1, M_2 et M_3 tendront vers A_1; M_4 et M_5 tendront vers A_2; et M_6 vers A_3.

Cela posé, nous allons construire un système de fonctions fuchsiennes de la façon suivante :

Soient x, y les coordonnées de M, et x', y' celles de M′; soit z une variable auxiliaire. Je veux que x, y, x', y' soient fonctions fuchsiennes de z; que quand M décrit un contour fermé sur C, la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que quand M′ décrit un contour fermé sur C′, la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que z soit d'ailleurs choisi de la façon la plus simple possible.

Supposons que M′ décrive sur la surface de Riemann C′ un contour fermé infiniment petit enveloppant un point de ramification A′; il n'est pas possible que z revienne à sa valeur primitive, sans quoi x et y qui sont des fonctions fuchsiennes et par conséquent uniformes de z reviendraient à leurs valeurs initiales et A′ ne serait pas un point de ramification.

Il faut donc que z subisse une substitution linéaire elliptique; quelle est la période de cette substitution, ou, en d'autres termes, au bout de combien de tours décrits sur le contour fermé, notre variable z reviendra-t-elle à sa valeur primitive? Il faut pour cela que toutes les déterminations de M soient revenues à leurs valeurs primitives. Il faudra donc ν tours, ν étant le plus petit commun multiple de

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_\chi.$$

Qu'arrivera-t-il alors si le point M décrit sur C un contour fermé très petit autour de l'un des points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\chi?$$

Il arrivera que la variable z subira une substitution linéaire elliptique ayant respectivement pour période

$$\frac{\nu}{\nu_1}, \quad \frac{\nu}{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\nu}{\nu_\chi}.$$

Et en effet, quand M décrit $\frac{\nu}{\nu_1}$ tours autour de A_1, M′ en décrit ν autour de A′.

Si l'on regarde x et y comme fonctions fuchsiennes de z, on voit qu'elles admettent un certain groupe fuchsien G, engendré par un certain polygone fuchsien P. Si l'on regarde maintenant x' et y' comme fonctions de z, ce seront

encore des fonctions fuchsiennes admettant le groupe G, mais elles admettront également un autre groupe fuchsien G′ contenant le groupe G, et formé des substitutions linéaires que subit z quand M′ décrit sur C′ un contour fermé. Ce groupe G′ sera engendré par un polygone fuchsien P′, et comme G est un sous-groupe de G′, on voit que *le polygone* P *est décomposable en n polygones congruents à* P′. La question de la réduction des intégrales abéliennes est ainsi rattachée à celle de la décomposition des polygones fuchsiens en un certain nombre de polygones congruents.

Nous voyons que le polygone P aura autant de cycles de sommets qu'il y a de points analogues à $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots$; la somme des angles des sommets du cycle qui correspond au point A_i sera $\frac{2\pi\nu_i}{\nu}$. De même, le polygone P′ aura autant de cycles de sommets qu'il y a de points de ramification A′, la somme des angles, pour le cycle correspondant à A′, étant $\frac{2\pi}{\nu}$.

Nous pourrions, si nous le voulions, construire les polygones P et P′ de façon à leur donner un plus grand nombre de côtés et de cycles de sommets; nous pourrions en effet considérer sur la surface C′ un certain nombre de points choisis d'une façon arbitraire et les traiter comme nous avons fait des points A′, bien que ce ne soient pas des points de ramification. La seule différence serait que les nombres $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$ seraient tous égaux à 1, de telle sorte que pour les cycles correspondant à un pareil point A′ ou aux points A_i correspondants, la somme des angles serait 2π. C'est ainsi par exemple que le groupe fuchsien G, qui est engendré par un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est π, peut être également engendré par un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués, la somme des angles de rang pair étant π et celle des angles de rang impair étant 2π; plus généralement, un groupe fuchsien G quelconque peut être engendré par une infinité de polygones fuchsiens différents. Mais il n'y aurait là qu'une complication qui, la plupart du temps, serait inutile (sauf dans le cas où il n'y aurait aucun point de ramification A′).

Cela posé, soient Q et Q′ les nombres des cycles de sommets de P et P′; soient 2N et 2N′ le nombre de leurs côtés. On a, par la formule qui donne le genre d'un polygone fuchsien,

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2p &= N - Q + 1, \\ 2q &= N' - Q' + 1. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on trouve pour la surface de P (au point de vue de la

géométrie non euclidienne)

$$2\pi(N-1)-2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu},$$

$2\pi\frac{\nu_i}{\nu}$ étant la somme des angles d'un seul cycle et par conséquent $2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu}$ celle de tous les angles. On trouve de même pour la surface de P′

$$2\pi(N'-1)-2\pi\sum\frac{1}{\nu}.$$

Ces formules supposent que tout sommet d'un des polygones congruents à P′ est aussi un sommet de P. Elles ne seraient plus vraies si un de ces sommets, commun à plusieurs polygones congruents à P′, était à l'intérieur de P.

En tenant compte de (1), ces expressions peuvent s'écrire :

$$2\pi(Q+2p-2)-2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu}=2\pi\sum\left(1-\frac{\nu_i}{\nu}\right)+2\pi(2p-2),$$

$$2\pi(Q'+2q-2)-2\pi\sum\frac{1}{\nu}=2\pi\sum\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+2\pi(2q-2).$$

Comme P est décomposable en n polygones congruents à P′, la première surface doit être égale à n fois la seconde, de sorte qu'on a

$$Q+2p-2-\sum\frac{\nu_i}{\nu}=n\left(Q'+2q-2-\sum\frac{1}{\nu}\right).$$

Mais pour un même point A′, nous avons

$$\sum\nu_i=n,\qquad \sum\frac{\nu_i}{\nu}=n\frac{1}{\nu}$$

et pour tous les points A′

$$\sum\frac{\nu_i}{\nu}=n\sum\frac{1}{\nu}.$$

Il nous reste donc la formule

$$(2)\qquad Q+2p-2=n(Q'+2q-2).$$

Cette formule subsiste si, usant de la faculté dont je parlais tout à l'heure, on cherche à construire un polygone P d'un plus grand nombre de côtés, en prenant un point arbitraire sur C′ et le traitant comme un point A′. Dans ce cas, en effet, Q augmente de n unités et Q′ d'une unité.

Si l'on réunit un polygone Π de $2N$ côtés à un autre polygone Π′ de $2N'$ côtés, de façon à former un polygone Π″ de $2N''$ côtés et simplement connexe, il arrivera généralement que Π et Π′ n'auront qu'un seul côté commun, qui sera

leur frontière commune, laquelle disparaîtra par l'annexion. On aura donc

$$N'' = N + N' - 1.$$

Si exceptionnellement, Π et Π' ont deux côtés communs, ces deux côtés devront être consécutifs, sans quoi Π'' ne serait pas simplement connexe, et alors le sommet qui sépare ces deux côtés sera à l'intérieur de Π''; on aura donc généralement

$$N'' = N + N' - 1 - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets communs à Π et à Π' qui sont à l'intérieur de Π''.

Plus généralement, si avec trois polygones Π, Π', Π'', de $2N$, $2N'$, $2N''$ côtés on forme un polygone Π''' de $2N'''$ côtés, on aura

$$(N''' - 1) = (N - 1) + (N' - 1) + (N'' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets appartenant à deux ou plusieurs des polygones Π, Π', Π'' qui seront à l'intérieur de Π'''. Si nous appliquons cette formule à notre polygone P de $2N$ côtés formé de n polygones congruents à P' qui a $2N'$ côtés, il viendra :

$$(3) \qquad N - 1 = n(N' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets de P', ou d'un polygone congruent, qui sont à l'intérieur de P. Ces sommets devront correspondre à un point A_i de C qui soit tel que

$$\nu = \nu_i.$$

A de pareils points, s'ils existent, peuvent également correspondre des cycles de sommets de P ayant des angles dont la somme est 2π.

Nous reviendrons sur ces hypothèses à la fin du paragraphe V.

IV. — Calcul de la forme bilinéaire caractéristique.

Imaginons un polygone fuchsien P, la courbe C correspondante, et le système des intégrales abéliennes de première espèce relative à cette courbe; et cherchons à déterminer, pour les périodes correspondant aux côtés du polygone P, la forme bilinéaire caractéristique dont il a été question au paragraphe II.

Nous emploierons les notations suivantes. Soient

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_{2N}$$

les sommets consécutifs du polygone P en décrivant le périmètre de ce polygone

dans un certain sens. Soient

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2N}$$

les côtés consécutifs de P, de telle sorte que le côté γ_i soit le côté $\sigma_{i-1}\sigma_i$, et que le côté γ_1 soit le côté $\sigma_{2N}\sigma_1$.

Soit U l'une des intégrales abéliennes de première espèce; soit x_i cette intégrale prise le long du côté γ_i, et soit z_i la valeur de l'intégrale U au sommet σ_i; on aura

(1) $$x_i = z_i - z_{i-1},$$

et pour que cette formule soit générale, nous conviendrons de poser

$$x_i = x_{2N+i}, \quad z_i = z_{2N+i}.$$

Si les deux sommets σ_α et σ_β appartiennent à un même cycle, la différence

$$z_\beta - z_\alpha = x_{\alpha+1} + x_{\alpha+2} + \ldots + x_\beta$$

sera une période.

Si les côtés γ_α et γ_β sont conjugués, on aura

(2) $$x_\alpha = -x_\beta$$

ou

(2 *bis*) $$z_\alpha - z_{\alpha-1} = z_{\beta-1} - z_\beta.$$

Dans ce cas

$$z_{\beta-1} - z_\alpha = z_\beta - z_{\alpha-1} = J_\alpha$$

est une période, car les sommets $\sigma_{\beta-1}$ et σ_α, de même que les sommets σ_β et $\sigma_{\alpha-1}$, appartiennent à un même cycle. Si l'on permute les lettres α et β, il vient

$$z_{\alpha-1} - z_\beta = z_\alpha - z_{\beta-1} = J_\beta,$$

d'où

(3) $$J_\alpha + J_\beta = 0.$$

Si l'on fait la somme des équations (2), on trouve que la somme des 2N quantités x doit être nulle

(4) $$\Sigma x_i = 0.$$

Nous avons d'autres relations entre les x. Soient par exemple

$$\sigma_\alpha, \quad \sigma_\beta, \quad \sigma_\gamma, \quad \sigma_\delta$$

les sommets consécutifs d'un même cycle; les côtés γ_α et $\gamma_{\beta+1}$ seront conjugués

et l'on aura

$$y_\alpha = z_\beta - z_\alpha,$$
$$y_\beta = z_\gamma - z_\beta,$$
$$y_\gamma = z_\delta - z_\gamma,$$
$$y_\delta = z_\alpha - z_\delta;$$

(5) $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma + y_\delta = 0.$$

Il y aura autant de relations (5) que de cycles de sommets, soit Q leur nombre; le nombre des y est évidemment $2N$; ils se trouvent liées par N relations (3) et par Q relations (5). Ces $N + Q$ relations ne sont pas distinctes; car si l'on fait la somme des relations (3) et celle des relations (5) on trouve le même résultat, à savoir

$$\Sigma y_i = 0.$$

Il restera donc entre les y, $N + Q - 1$ relations qui cette fois seront bien distinctes. Car chacun des y figure une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (3); et une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (5).

Si nous désignons par A_i les premiers membres des relations (3), par B_i ceux des relations (5) et que nous cherchions si l'on peut avoir identiquement

$$\Sigma \alpha_i A_i + \Sigma \beta_i B_i = 0,$$

les α et les β étant des coefficients constants, chacun des y figurera dans l'un des A et dans un seulement, et, d'autre part, dans l'un des B et dans un seulement; il faudra que les deux coefficients α et β soient égaux et de signe contraire. Chacun des α correspond à l'une des relations (3) et par conséquent à une paire de côtés conjugués; chacun des β correspond à l'une des relations (5) et par conséquent à un cycle de sommets. Chaque côté appartenant à une paire, à chaque côté correspondra un α; chaque sommet appartenant à un cycle, à chaque sommet correspondra un β, et, d'après ce que nous venons de dire, le coefficient α qui correspond à un côté, et le coefficient β qui correspond soit au sommet suivant soit au sommet précédent, doivent être égaux et de signe contraire. D'où il suit que tous les α doivent être égaux à $+1$ (par exemple) et tous les β à -1. Il n'y a donc pas entre les A_i et les B_i d'autre identité que la suivante

$$\Sigma A_i - \Sigma B_i = 0.$$

Il y a donc $N + Q - 1$ relations distinctes entre les y, et comme les y sont au nombre de $2N$, il y a $N - Q + 1$ quantités y distinctes. Le genre est alors

$$\frac{N - Q + 1}{2},$$

comme il convient.

Cela posé, considérons une seconde intégrale abélienne U'; désignons par x', y', z' les quantités relatives à cette seconde intégrale et correspondant à celles que nous avons appelées x, y, z, en ce qui concerne la première. Il s'agit d'obtenir la forme bilinéaire

$$F(y, y').$$

Pour cela, prenons l'intégrale

$$\int U\, dU'$$

tout le long du périmètre de P; cette intégrale devra être nulle. Soient γ_α et γ_β deux côtés conjugués, et deux éléments correspondants de ces côtés; soient U_α et U_β, U'_α et U'_β les valeurs de nos intégrales en deux points correspondants de ces côtés; on aura

$$U_\beta = U_\alpha + y_\alpha, \qquad U'_\beta = U'_\alpha + y'_\alpha, \qquad dU'_\beta = -dU'_\alpha.$$

Je mets le signe — parce que si les deux côtés sont parcourus en suivant les points correspondants, ils seront parcourus en sens contraire. L'intégrale $\int U\,dU'$ prise le long de ces deux côtés se réduira donc à

$$\int (U_\beta - U_\alpha)\, dU' = \int y_\alpha\, dU'$$

le long du côté γ_β; c'est-à-dire $y_\alpha x'_\beta$ ou $-y_\alpha x'_\alpha$.

L'intégrale se réduira donc à

$$-\Sigma\, y_\alpha x'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à toutes les paires de côtés, en prenant un côté seulement dans chaque paire. Mais comme on a

$$y_\alpha = -y_\beta, \qquad x'_\alpha = -x'_\beta, \qquad y_\alpha x'_\alpha = y_\beta x'_\beta,$$

cela peut s'écrire

$$-\frac{1}{2}\Sigma\, y_\alpha x'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les côtés. Nous aurons donc

$$(6) \qquad \Sigma\, y x' = 0,$$

ou, en vertu de (1) (appliquée à l'intégrale U'),

$$\Sigma\, y_\alpha (z'_\alpha - z'_\beta) = 0,$$

ou, à cause de (3),

$$\Sigma\, y_\alpha z'_\alpha - \Sigma\, y_\beta z'_\alpha = 0.$$

Tenant compte de la relation

$$z'_{\alpha-1} = z'_\beta + y'_\beta,$$

il vient

$$\Sigma y_\alpha z'_\alpha + \Sigma y_\beta z'_\beta + \Sigma y_\beta y'_\beta = 0.$$

Mais on a

$$\Sigma y_\alpha z'_\alpha = \Sigma y_\beta z'_\beta, \qquad \Sigma y_\alpha y'_\alpha = \Sigma y_\beta y'_\beta.$$

En effet l'indice α peut prendre toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à 2N ; et quand il prend ces valeurs, l'indice β du côté conjugué prend également ces mêmes valeurs dans un autre ordre. Je puis donc écrire

$$(7) \qquad 2\Sigma y_\alpha z'_\alpha + \Sigma y_\alpha y'_\alpha = 0.$$

Nous devons vérifier d'abord que le premier membre de (7) est bien de la forme $F(y, y')$, F étant une forme bilinéaire. Choisissons en effet, dans chaque cycle de sommets, un sommet que nous appellerons le sommet *initial*. On aura alors, pour un sommet quelconque σ_α,

$$z'_\alpha = z'_{\alpha_0} + Y'_\alpha,$$

σ_{α_0} étant le sommet initial du cycle et Y' une combinaison linéaire des y'; de sorte que le premier membre de (7) devient

$$2\Sigma y_\alpha z'_{\alpha_0} + 2\Sigma y_\alpha Y'_\alpha + \Sigma y_\alpha y'_\alpha.$$

Il s'agit de démontrer que le coefficient de z'_{α_0} dans cette expression est nul, de telle sorte que cette expression ne dépend plus que des y et des y'. En effet, ce coefficient est égal à

$$2\Sigma y_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les sommets du cycle, et cette somme est nulle en vertu des relations (5).

Il s'agit maintenant de vérifier sur le premier membre de (7) l'identité

$$(8) \qquad F(y, y') + F(y', y) = 0$$

ou, ce qui revient au même, l'identité

$$F(y, y) = 0,$$

puisque

$$F(y, y') + F(y', y) = F(y + y', y + y') - F(y, y) - F(y', y').$$

Il est clair que

$$F(y, y) = 2\Sigma y_\alpha z_\alpha + \Sigma y_\alpha^2.$$

Or on trouve

$$F(y, y) = 2\Sigma z_\alpha (z_{\beta-1} - z_\alpha) + \Sigma (z_{\beta-1} - z_\alpha)^2$$

ou, en développant,

$$F(y, y') = \sum z_{\beta-1}^2 - \sum z_\alpha^2.$$

Or le second membre est évidemment nul puisque, quand l'indice α prend toutes les valeurs possibles il en est de même de l'indice $\beta - 1$, quoique dans un autre ordre.

En résumé nous avons entre les y et les y' une relation bilinéaire

$$2\sum y z' + \sum y y' = 0.$$

Cela prouve que la forme caractéristique cherchée $F(y, y')$ est égale, *à un facteur constant près*, à $2\sum y z' + \sum y y'$, et il reste à déterminer ce facteur constant.

Pour cela supposons que U', au lieu d'être une intégrale de première espèce soit une intégrale de troisième espèce admettant pour points logarithmiques deux points M_0 et M_1 de la surface de Riemann C, le premier avec le résidu $+1$, le second avec le résidu -1; dans ce cas on aura

$$F(y, y') = 2i\pi(U_0 - U_1),$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U en M_0 et M_1.

D'autre part, l'intégrale

$$\int U\, dU'$$

a aussi pour expression $2i\pi(U_0 - U_1)$, de sorte que

$$F(y, y') = \int U\, dU'. \qquad (7)$$

Mais le premier membre de (7) n'est autre chose que le premier membre de (6), qui a été obtenue elle-même en multipliant par -2 l'expression

$$-\frac{1}{2}\sum y_\alpha x'_\alpha$$

qui représentait notre intégrale; on aura donc

$$F(y, y') = -\sum y z' - \frac{1}{2}\sum y y'$$

ou enfin, en tenant compte de (8),

$$(9) \qquad F(y, y') = \sum z y' + \frac{1}{2}\sum y y'.$$

ou encore

$$F(y, y') = \frac{1}{2}\sum(z y' - y z').$$

V. — Mode de correspondance des côtés.

Représentons-nous le polygone P décomposé en un certain nombre n de polygones congruents à P'. Les côtés du polygone P' sont conjugués deux à deux, ils sont au nombre de $2N'$; le nombre total des côtés des divers polygones congruents à P' sera donc $2nN'$; parmi eux il y en aura $2N$ qui n'appartiendront qu'à un seul de ces polygones et qui feront partie du périmètre de P; les autres appartiendront à deux des polygones congruents à P' et leur serviront de frontière commune.

Nous pourrons représenter ces $2nN'$ côtés par une notation à double indice

$$\gamma(\alpha, \beta);$$

l'indice α variera de 1 à $2N'$ et se rapportera aux divers côtés de P'; l'indice β variera de 1 à n et se rapportera aux divers polygones congruents à P'; ainsi $P'(\beta)$ sera l'un des polygones congruents à P'; $\gamma(\alpha)$ sera l'un des côtés de P' et $\gamma(\alpha, \beta)$ sera le côté de $P'(\beta)$ homologue au côté $\gamma(\alpha)$ de P'.

Supposons alors que les côtés $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\alpha')$ de P' soient conjugués, et considérons un côté $\gamma(\alpha, \beta)$; il existera alors toujours un côté $\gamma(\alpha', \beta')$, et un seul, qui sera identique ou conjugué à $\gamma(\alpha, \beta)$.

Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, $\gamma(\alpha', \beta')$ sont identiques, ils n'appartiendront pas au périmètre de P, mais ils feront la frontière commune de $P'(\beta)$ et $P'(\beta')$. Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, $\gamma(\alpha', \beta')$ sont conjugués, ils appartiendront au périmètre de P et ils représenteront deux côtés conjugués de P.

Nous pouvons alors envisager la substitution S_α qui change β en β'; c'est une substitution qui change l'ordre des n lettres β. A chaque côté de P' correspond une pareille substitution et les substitutions correspondant à deux côtés conjugués S_α et $S_{\alpha'}$ sont inverses l'une de l'autre.

Voyons maintenant comment les sommets de P se répartiront en cycles. Nous désignerons encore par $\sigma(\alpha)$ celui des sommets de P' qui est compris entre $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\alpha+1)$, et par $\sigma(\alpha, \beta)$ le sommet homologue de $P'(\beta)$. Considérons un des cycles de sommets de P', et soient

$$\sigma(\alpha_1), \quad \sigma(\alpha_2), \quad \ldots, \quad \sigma(\alpha_m)$$

ces sommets. Considérons alors le sommet $\sigma(\alpha_1, \beta_1)$; il sera identique ou conjugué au sommet $\sigma(\alpha'_1 - 1, \beta'_1)$, où β'_1 sera le transformé de β_1 par la substitu-

tion S_{α_1} : j'écris

$$\beta'_1 = \beta_1 S_{\alpha_1}.$$

On aura d'ailleurs $\alpha'_1 - 1 = \alpha_2$, et je poserai pour plus de symétrie dans les notations

$$\beta_2 = \beta'_1 = \beta_1 S_{\alpha_1}.$$

De même, le sommet

$$\sigma(\alpha'_1 - 1, \beta'_1) = \sigma(\alpha_2, \beta_2)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(\alpha'_2 - 1, \beta'_2) = \sigma(\alpha_3, \beta_3),$$

où $\gamma(\alpha'_2)$ est conjugué de $\gamma(\alpha_2)$ et où

$$\beta_3 = \beta'_2 = \beta_2 S_{\alpha_2},$$

et ainsi de suite ; et enfin le sommet

$$\sigma(\alpha'_{m-1}, \beta'_{m-1}) = \sigma(\alpha_m, \beta_m)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(\alpha'_{m-1}, \beta'_m) = \sigma(\alpha_1, \beta'_m)$$

où

$$\beta'_m = \beta_m S_{\alpha_m} = \beta_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}.$$

Ainsi, pour obtenir β'_m en partant de β_1, il faut appliquer aux n lettres β la substitution

$$\Sigma = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}$$

qui change leur ordre.

Soient alors

$$\beta''_1, \quad \beta''_2, \quad \ldots, \quad \beta''_q$$

les transformés successifs de β_1 par Σ, Σ^2, ..., Σ^q ; on finira par arriver à

$$\beta''_q = \beta_1,$$

c'est-à-dire par retrouver la lettre initiale. Alors les divers sommets

$$\sigma(\alpha_1, \beta_1), \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_1), \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_2), \quad \ldots, \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_{q-1})$$

appartiendront à un même cycle, lequel comprendra en outre

$$\sigma(\alpha_2, \beta_1 S_{\alpha_1}), \quad \sigma(\alpha_2, \beta''_1 S_{\alpha_1}), \quad \sigma(\alpha_2, \beta''_2 S_{\alpha_1}), \quad \ldots,$$
$$\sigma(\alpha_3, \beta_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2}), \quad \sigma(\alpha_3, \beta'_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2}), \quad \ldots$$

On sait qu'une permutation quelconque entre n lettres peut toujours être décomposée en un certain nombre de permutations circulaires ; ici l'une des

permutations circulaires de Σ est la suivante :

$$(\beta_1, \beta_1', \beta_2'', \ldots, \beta_q''')$$

et porte sur q lettres.

Supposons donc que Σ se décompose en λ semblables permutations circulaires; nous avons sur P′ un cycle de m sommets. A ce cycle correspondront sur P, non pas un, mais λ cycles de sommets; et si une de ces permutations circulaires porte sur q lettres, le cycle correspondant comprendra qm sommets.

Il pourra se faire que plusieurs de ces sommets appartenant à divers polygones P′(β) soient identiques; le nombre des sommets *distincts* de P sur ce cycle sera alors moindre que qm; il pourra même se faire, et c'est une hypothèse que nous avons déjà envisagée au paragraphe III, que tous ces sommets soient identiques et que la somme de leurs angles soit 2π; ce sommet n'appartiendra plus alors au périmètre de P, mais ce sera un point intérieur à P appartenant à la fois à plus de deux polygones P′(β) et étant le point d'intersection des frontières de ces polygones.

VI. — Calcul de l'invariant.

Pour calculer notre invariant, nous devons d'abord chercher les nombres que nous avons appelés h et m au paragraphe II. Les nombres m se rapportent aux différents λ et par conséquent aux différents côtés. Au côté $\gamma(\alpha, \beta)$ qui est identique ou conjugué au côté $\gamma(\alpha', \beta')$ correspond une période $y(\alpha, \beta)$, qui est l'intégrale U prise entre les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha'-1, \beta)$. Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$ et $\gamma(\alpha', \beta')$ sont identiques et non conjugués, il en est de même des deux sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha'-1, \beta')$ et l'on a

$$y(\alpha, \beta) = 0$$

et de même pour l'intégrale U′

(1) $$y'(\alpha, \beta) = 0.$$

On a dans tous les cas

$$y(\alpha, \beta) + y(\alpha', \beta') = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (3) du paragraphe IV.

Les y peuvent s'exprimer en fonctions linéaires des périodes ω_j et l'on aura

(2) $$y(\alpha, \beta) = \Sigma m(\alpha, \beta, j)\,\omega_j$$

et de même

$$y'(\alpha, \beta) = \Sigma m(\alpha, \beta, j)\,\omega_j',$$

les $m(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Considérons maintenant la valeur $z(\alpha, \beta)$ de l'intégrale U au sommet $\sigma(\alpha, \beta)$ et la valeur $z(\alpha_0, \beta_0)$ de U au sommet initial du cycle $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ tel qu'il a été défini au paragraphe IV, nous pourrons écrire

$$(3) \qquad z(\alpha, \beta) = z(\alpha_0, \beta_0) + \Sigma k(\alpha, \beta, j)\omega_j,$$

et de même

$$z'(\alpha, \beta) = z(\alpha_0, \beta_0) + \Sigma k(\alpha, \beta, j)\omega'_j,$$

les $k(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Remplaçons les y et les z par leurs valeurs dans

$$F(y, y') = \Sigma z y' + \frac{1}{2}\Sigma y y'.$$

Observons que nous pouvons dans les sommes du second membre introduire les termes correspondant à des côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, qui n'appartiennent pas au périmètre de P, mais servent de frontière commune à deux des polygones $P'(\beta)$. En effet, ces termes contiennent en facteur $y'(\alpha, \beta)$ qui est nulle dans ce cas en vertu de la relation (1). De plus, nos formules sont applicables comme nous l'avons vu au paragraphe IV, bien que les y ne soient pas des périodes distinctes. Le premier membre doit se réduire à :

$$F(y, y') = \Sigma H_j \omega_j.$$

Quant au second membre il va prendre la forme d'une expression linéaire par rapport aux $z(\alpha_0, \beta_0)$ et aux ω_j, puisque les seconds membres des coefficients (2) et (3) sont de cette forme. Mais le coefficient de $z(\alpha_0, \beta_0)$ est égal à

$$\Sigma y'(\alpha, \beta),$$

la sommation étant étendue à tous les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ du cycle dont $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ est le sommet initial. Or cette somme est nulle par la relation (5) du paragraphe IV. Donc les termes en $z(\alpha_0, \beta_0)$ disparaissent et le second membre est linéaire par rapport aux ω_j seulement. On trouve alors, en identifiant les coefficients de ω_j,

$$H_j = \Sigma k(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}\Sigma m(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta).$$

Mais on a, par la définition des nombres h,

$$H_j = \Sigma h(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta),$$

d'où

$$(4) \qquad h(\alpha, \beta, j) = k(\alpha, \beta, j) + \frac{1}{2} m(\alpha, \beta, j).$$

On a d'autre part

$$J(\alpha, \beta) = -J(\alpha', \beta) + \sigma(\alpha' - 1, \beta') - \sigma(\alpha, \beta) + \sigma(\alpha', \beta') - \sigma(\alpha - 1, \beta)$$

et par conséquent, en égalant les coefficients de ω_j,

$$(5) \qquad m(\alpha, \beta) = -m(\alpha', \beta) + k(\alpha' - 1, \beta') - k(\alpha, \beta) + k(\alpha', \beta') - k(\alpha - 1, \beta).$$

Il faudrait affecter les m et les k d'un troisième indice j qui serait le même pour tous les nombres qui figurent dans cette formule (5).

Comparons maintenant deux expressions telles que $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha, \beta')$.

La dérivée de U prendra la même valeur en $\sigma(\alpha, \beta)$ et en $\sigma(\alpha, \beta')$ ou, plus généralement, en deux points correspondants des deux polygones $P'(\beta)$ et $P'(\beta')$; et en effet nous avons supposé que l'intégrale U était réductible, c'est-à-dire qu'elle appartenait, non seulement à la courbe C, mais encore à la courbe C'. La différence des valeurs de U en ces deux points est donc une constante, et par conséquent la différence

$$\sigma(\alpha, \beta') - \sigma(\alpha, \beta)$$

ne dépend que des indices β et β', et ne dépend pas de l'indice α. Il en est donc de même de la différence

$$k(\alpha, \beta', j) - k(\alpha, \beta, j).$$

Il résulte de là que nous pouvons écrire

$$k(\alpha, \beta, j) = k(\alpha, j) + k(\beta, j)$$

et considérer le nombre $k(\alpha, \beta, j)$ comme la somme de deux autres nombres analogues dépendant, le premier seulement de l'indice α et le second seulement de l'indice β.

Cela posé, rappelons comment on forme l'invariant J : on dresse le tableau des m et celui des h; on désigne par D l'un quelconque des déterminants obtenus en prenant $2q$ colonnes dans le premier tableau; par D' le déterminant obtenu en prenant *les mêmes* colonnes dans le deuxième tableau; et l'on a

$$J = \Sigma DD'.$$

Je dis que J ne changera pas quand dans le premier tableau on ajoutera la première colonne à la seconde, en même temps que dans le deuxième tableau on retranchera la seconde colonne de la première. Désignons en effet par D un déterminant tiré du tableau primitif des m; par D', Δ et Δ' les déterminants correspondants tirés du tableau primitif des h, du tableau modifié des m et du

tableau modifié des h. Il s'agit de montrer que

$$\Sigma DD' = \Sigma \Delta\Delta'.$$

Soient D_α l'un quelconque des déterminants qui ne contiennent ni la première ni la seconde colonne; D_β l'un quelconque des déterminants qui contiennent à la fois ces deux colonnes; D_γ l'un quelconque des déterminants qui contiennent la première colonne sans contenir la seconde et enfin D_γ^0 le déterminant obtenu en remplaçant dans D_γ la première colonne par la seconde. On aura

$$D_\alpha = \Delta_\alpha, \qquad D'_\alpha = \Delta'_\alpha, \qquad D_\beta = \Delta_\beta, \qquad D'_\beta = \Delta'_\beta,$$

$$\Delta_\gamma^0 = D_\gamma + D_\gamma^0, \qquad \Delta'_\gamma = D'_\gamma - D'^0_\gamma, \qquad \Delta_\gamma = D_\gamma, \qquad \Delta'^0_\gamma = D'^0_\gamma;$$

d'où

$$D_\alpha D'_\alpha = \Delta_\alpha \Delta'_\alpha, \qquad D_\beta D'_\beta = \Delta_\beta \Delta'_\beta, \qquad D_\gamma D'_\gamma + D_\gamma^0 D'^0_\gamma = \Delta_\gamma \Delta'_\gamma + \Delta_\gamma^0 \Delta'^0_\gamma;$$

et par conséquent

$$\Sigma DD' = \Sigma \Delta\Delta'.$$

On pourrait évidemment opérer de même sur d'autres colonnes quelconques.

Les colonnes de nos deux tableaux pourront être rangées dans un ordre tel que celle qui se rapporte à un côté $\gamma(\alpha, \beta)$ soit immédiatement suivie de celle qui se rapporte au côté conjugué $\gamma(\alpha', \beta')$. Nous aurons alors dans les deux tableaux, dans chaque colonne de rang impair, les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha', \beta', j), \quad h(\alpha', \beta', j).$$

Faisons l'opération dont nous venons de démontrer la légitimité, d'abord sur les deux premières colonnes, puis sur les deux suivantes, et ainsi de suite. Alors dans les deux tableaux modifiés nous aurons dans chaque colonne de rang impair les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j) - h(\alpha', \beta', j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha, \beta, j) + m(\alpha', \beta', j), \quad h(\alpha, \beta, j).$$

Mais

$$m(\alpha, \beta, j) + m(\alpha', \beta', j) = 0.$$

Nous pouvons alors supprimer toutes les colonnes de rang pair, et en effet tous les déterminants Δ qui contiennent une de ces colonnes sont nuls, puisque tous les termes de ces colonnes sont nuls dans le premier tableau modifié.

Il nous restera donc deux tableaux formés respectivement avec les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j) - h(\alpha', \beta', j)$$

et il s'agit de former la somme

$$\Sigma\Delta\Delta'$$

relative à ces deux tableaux.

On a d'abord

$$m(\alpha, \beta, j) = k(\alpha' - 1, j) - k(\beta', j) - k(\alpha, j) - k(\beta, j)$$

et

$$2h(\alpha, \beta, j) = k(\alpha' - 1, j) + k(\beta', j) + k(\alpha, j) + k(\beta, j),$$

$$2h(\alpha', \beta', j) = k(\alpha - 1, j) + k(\beta, j) + k(\alpha', j) + k(\beta', j),$$

d'où

$$2h(\alpha, \beta, j) - 2h(\alpha', \beta', j) = k(\alpha' - 1, j) + k(\alpha, j) - k(\alpha - 1, j) - k(\alpha', j),$$

ce qui montre que les nombres du deuxième tableau modifié et par conséquent les Δ' ne dépendent pas de l'indice β.

Chaque colonne dépendant de deux indices α et β, chaque déterminant dépendra de deux séries de $2q$ indices

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{2q}$$

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{2q};$$

je pourrai donc désigner l'un des déterminants Δ par ces indices, en l'écrivant

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2q}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2q})$$

ou simplement

$$\Delta(\alpha_i, \beta_i).$$

Nous pourrions écrire de même $\Delta'(\alpha_i, \beta_i)$; mais Δ', comme nous venons de le voir, ne dépendant pas des β, nous écrirons simplement

$$\Delta'(\alpha_i)$$

et nous aurons

$$J = \Sigma\Delta(\alpha_i, \beta_i)\Delta'(\alpha_i).$$

La sommation doit s'effectuer, d'une part par rapport aux indices β, et d'autre part par rapport aux indices α. Nous pourrons écrire

$$H(\alpha_i) = \Sigma_\beta \Delta(\alpha_i, \beta_i),$$

la sommation s'effectuant seulement par rapport aux indices β, et l'on aura ensuite

$$J = \Sigma_\alpha H(\alpha_i)\Delta'(\alpha_i),$$

la sommation s'effectuant cette fois par rapport aux indices α.

Nous devons observer que les indices α doivent être tous différents, sans quoi

$\Delta'(\alpha_i)$ serait nul; en revanche deux ou plusieurs des β peuvent être identiques; car, si $\beta_1 = \beta_2$, par exemple, les nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \quad m(\alpha_2, \beta_1, j)$$

n'en seront pas moins différents. De plus, on doit tenir compte de l'ordre des β et, par exemple, les deux combinaisons

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \beta_4, \quad \ldots, \quad \beta_{2q}$$

et

$$\beta_2, \quad \beta_1, \quad \beta_3, \quad \beta_4, \quad \ldots, \quad \beta_{2q}$$

doivent être tenues pour différentes, puisque la première conduit aux nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \quad m(\alpha_2, \beta_2, j)$$

et la seconde à

$$m(\alpha_1, \beta_2, j), \quad m(\alpha_2, \beta_1, j).$$

Cela nous indique comment doivent être faites les sommations.

J'écrirai

$$\Delta(\alpha_i, \beta_i) = [m(\alpha_i, \beta_i, j)]$$

voulant dire par là que $\Delta(\alpha_i, \beta_i)$ est un déterminant où l'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne et la $j^{\text{ième}}$ ligne est $m(\alpha_i, \beta_i, j)$. J'aurai alors, avec la même notation,

$$H(\alpha_i) = \Sigma_\beta \Delta(\alpha_i, \beta_i) = [\Sigma_\beta m(\alpha_i, \beta, j)].$$

Or

$$m(\alpha_i, \beta, j) = h(\alpha_i - 1, j) - h(\alpha_i, j) + h(\beta', j) - h(\beta, j),$$

ce que je puis écrire

$$m(\alpha_i, \beta, j) = m(\alpha_i, j) + h(\beta', j) - h(\beta, j),$$

en posant

$$m(\alpha_i, j) = h(\alpha_i - 1, j) - h(\alpha_i, j).$$

La sommation doit s'étendre aux n valeurs de β. Le terme $m(\alpha_i, j)$ étant indépendant de β, on a

$$\Sigma m(\alpha_i, j) = n\, m(\alpha_i, j).$$

D'autre part, quand β parcourt les valeurs 1, 2, ..., n, l'indice β' parcourt les mêmes valeurs dans un autre ordre, de sorte qu'on a

$$\Sigma h(\beta', j) - \Sigma h(\beta, j) = 0$$

et qu'il reste simplement

$$\Sigma_\beta \Delta(\alpha_i, \beta_i) = n^{2q}[m(\alpha_i, j)]$$

ou

$$H(\alpha_i) = n^{2q} \Delta(\alpha_i),$$

en posant

$$\Delta(\alpha_i) = [m(\alpha_i, j)].$$

de sorte qu'il reste

$$J = n^{2q} \Sigma \Delta(\alpha_i) \Delta'(\alpha_i)$$

ou bien

$$J = n^{2q} J',$$

J' étant l'invariant relatif à la courbe C' et au polygone P'.

Examinons en particulier les deux exemples du paragraphe I. Dans le premier de ces exemples on a $q = 1$, et nous pouvons prendre pour périodes

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha}, \qquad \omega_2 = h$$

et supposer que la courbe C' est une courbe de genre 1 admettant comme intégrale de première espèce u_1, laquelle elle-même aura pour périodes fondamentales $\frac{2i\pi}{\alpha}$ et h; nous reprenons les notations du paragraphe I, de sorte que les lettres α et h n'ont plus du tout la même signification qu'au début du présent paragraphe. Quoi qu'il en soit, les périodes ω_1 et ω_2 pouvant être regardées comme des périodes normales, on aura

$$J' = 1, \qquad J = n^2$$

et d'après le paragraphe II

$$J = \alpha^2, \qquad n = \alpha.$$

Mais nous pourrions également prendre d'autres périodes $\Big($de façon que toute fonction périodique admettant les périodes ω_1 et ω_2 admette nécessairement les périodes $\frac{2\pi i}{\alpha}$ et $h\Big)$, par exemple

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha\beta}, \qquad \omega_2 = \frac{h}{\gamma},$$

β et γ étant des entiers quelconques. Dans ce cas le tableau des nombres m s'écrit :

$$\begin{matrix} \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{matrix}$$

et l'on a

$$J = \alpha^2\beta^2\gamma^2; \qquad J' = 1, \qquad J = n^2, \qquad n = \alpha\beta\gamma.$$

Mais nous nous tiendrons à la première hypothèse, c'est-à-dire que parmi les systèmes de périodes ω qui conduisent à la réduction, *nous choisirons toujours le plus simple;* on aura alors

$$n = \alpha.$$

Passons au deuxième exemple. Ici $q = 2$, les intégrales u_1 et u_2 admettent

pour périodes

$$\begin{array}{cccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \dfrac{2i\pi}{\alpha}, \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & 0. \end{array}$$

Nous pourrions donc prendre le tableau suivant des périodes ω :

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4. \\ u_1 & \dfrac{2i\pi}{\alpha} & 0 & a & b, \\ u_2 & 0 & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & b & c. \end{array}\right.$$

Mais ces périodes ne satisfont pas à la condition que doit remplir un système de périodes d'intégrales abéliennes engendrées par une courbe de genre 2. Nous devons donc chercher un autre système de périodes *sous-multiple* du premier. Je dis, pour abréger le langage, qu'un système de périodes S est *sous-multiple* d'un autre système S′, quand l'existence des périodes S entraîne celle des périodes S′, sans que la réciproque soit vraie.

Il est clair alors que parmi les systèmes sous-multiples de (S′), et satisfaisant à la condition fondamentale imposée aux périodes des intégrales abéliennes, le plus simple est le suivant :

$$(\mathrm{S}')\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & 0 & a & b \\ u_2 & 0 & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & b & c. \end{array}\right.$$

et que tous les autres ne sont que des sous-multiples de (S′). Nous pouvons alors supposer que u_1 et u_2, regardées comme intégrales abéliennes relatives à la courbe C′, admettent les périodes S′. Alors le tableau des nombres m ne sera plus, comme au paragraphe II :

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

mais bien

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

On n'a donc plus, comme au paragraphe II, $J = \alpha^4\beta^2$, mais

$$J = \alpha^4\beta^4.$$

D'autre part, les périodes ω étant normales, on a

$$J' = 1, \qquad J = n^4,$$

d'où

$$n = \alpha\beta.$$

Dans le premier exemple, nous avons trouvé $n = \alpha$, dans le deuxième nous trouvons $n = \alpha\beta$; la loi est évidemment générale et peut s'énoncer ainsi :

Le nombre n des polygones $P'(\beta)$ *n'est autre chose que le nombre k relatif à la réduction et défini au* paragraphe I; pourvu du moins que l'on choisisse le système des périodes ω de la façon la plus simple possible.

VII. — Autre mode de calcul.

On peut arriver à ce même résultat d'une manière plus simple, de sorte que je n'aurais pas pris un chemin aussi détourné si les propositions intermédiaires ne devaient pas nous être utiles dans la suite.

Soient U et U' deux intégrales abéliennes appartenant à la courbe C', à laquelle se rapporte le polygone P'; la première sera de première espèce et la deuxième de troisième espèce; elle admettra deux points singuliers logarithmiques M_0 et M_1 avec les résidus $+1$ et -1.

Prenons l'intégrale

$$\int U\, dU'$$

le long du périmètre P'; elle sera égale à

$$2i\pi(U_0 - U_1).$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U aux points M_0 et M_1; le résultat serait encore le même si l'on intégrait le long du périmètre d'un quelconque des polygones appelés plus haut $P'(\beta)$, et en effet quand on passe du point M_0 intérieur à P' au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_0 augmente d'une période; et quand on passe de M_1 au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_1 augmente de la même période, de sorte que la différence $U_1 - U_0$ ne change pas.

D'autre part, cette même intégrale est égale à

$$\Phi(\omega, \omega').$$

les ω étant les périodes de U par rapport à la courbe C', et les ω' étant les périodes correspondantes de U', tandis que $\Phi(\omega, \omega')$ est la forme bilinéaire caractéristique relative à ces périodes. On a donc

$$\Phi(\omega, \omega') = 2i\pi(U_0 - U_1).$$

Prenons maintenant la même intégrale le long du périmètre de P, ce sera comme si on la prenait le long des divers polygones P'(β) qui sont au nombre de n. On trouvera donc

$$2ni\pi(U_0 - U_1).$$

D'autre part l'intégrale sera égale à

$$F(y, y'),$$

les y étant les périodes de U par rapport à la courbe C, les y' étant les périodes correspondantes de U', et $F(y, y')$ étant la forme bilinéaire relative à ces périodes. On aura donc

$$F(y, y') = 2ni\pi(U_0 - U_1),$$

d'où

$$F(y, y') = n\Phi(\omega, \omega').$$

Si nous prenons les périodes normales et le premier exemple du paragraphe I, nous aurons : pour

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \quad y_5, \quad y_6,$$

les valeurs

$$2i\pi, \quad 0, \quad 0, \quad h, \quad \frac{2i\pi}{\alpha}, \quad 0;$$

pour

$$\omega_1, \quad \omega_2,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi}{\alpha}, \quad h;$$

d'où

$$y_1 = \alpha\omega_1, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = \omega_2, \qquad y_5 = \omega_1, \qquad y_6 = 0$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω'; d'ailleurs

$$F(y, y') = y_1 y'_4 - y_4 y'_1 + y_2 y'_5 - y_5 y'_2 + y_3 y'_6 - y_6 y'_3,$$

$$\Phi(\omega, \omega') = \omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1,$$

d'où, en remplaçant les y et les y' par leurs valeurs en fonctions des ω et des ω',

$$F(y, y') = \alpha\Phi(\omega, \omega')$$

et

$$n = \alpha.$$

Passons au second exemple du paragraphe I; nous aurons (si $U = \lambda u_1 + \mu u_2$) :

pour

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\quad y_6,\quad y_7,\quad y_8,$$

les valeurs

$$2i\pi\lambda,\quad 2i\pi\mu,\quad 0,\quad 0,\quad a\lambda+b\mu,\quad b\lambda+c\mu,\quad \frac{2i\pi\mu}{\alpha\beta},\quad \frac{2i\pi\lambda}{\alpha};$$

pour

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_4,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi\lambda}{\alpha\beta},\quad \frac{2i\pi\mu}{\alpha\beta},\quad a\lambda+b\mu,\quad b\lambda+c\mu;$$

d'où

$$\begin{array}{llll} y_1=\alpha\beta\omega_1, & y_2=\alpha\beta\omega_2, & y_3=0, & y_4=0, \\ y_5=\omega_3, & y_6=\omega_4, & y_7=\omega_2, & y_8=\beta\omega_1 \end{array}$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω'; d'ailleurs

$$F(y,y')=y_1y'_5-y_5y'_1+y_2y'_6-y_6y'_2+y_3y'_7-y_7y'_3+y_4y'_8-y_8y'_4,$$

$$\Phi(\omega,\omega')=\omega_1\omega'_3-\omega_3\omega'_1+\omega_2\omega'_4-\omega_4\omega'_2,$$

d'où

$$F(y,y')=\alpha\beta\Phi(\omega,\omega')$$

et

$$n=\alpha\beta.$$

Les résultats du paragraphe précédent sont ainsi retrouvés et la méthode est évidemment générale.

VIII. Cas où $q=1$.

Je me propose maintenant d'étudier de plus près les circonstances de la réduction et je commence par rappeler et compléter les relations entre les nombres N, N', Q, Q', etc. Nous avons trouvé au paragraphe III les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} 2p=N-Q+1, \\ 2q=N'-Q'+1. \end{cases}$$

$$(2)\qquad Q+2p-2=n(Q'+2q-2).$$

$$(3)\qquad N-1=n(N'-1)-\mu.$$

La formule (2) s'applique au cas où le nombre μ est égal à zéro, c'est-à-dire où il n'y a pas de sommet commun à plusieurs polygones $P'(\beta)$ qui se trouve à l'intérieur de P. Nous adopterons cette hypothèse; si d'ailleurs elle n'était pas satisfaite, et que ABCDA représentant le périmètre de P, un sommet commun E à plusieurs $P'(\beta)$ fût à l'intérieur de P, nous pourrions joindre AE et prendre pour périmètre de P la ligne fermée EABCDAE. Dans le polygone P modifié, E serait regardé comme un sommet, dont l'angle serait 2π, et le périmètre

comprendrait deux fois le côté EA, parcouru une fois dans le sens direct, une fois dans le sens rétrograde. Nous pouvons donc toujours supposer

$$\mu = 0.$$

Dans ce cas, la formule (3) devient

$$(3\ bis) \qquad N - 1 = n(N' - 1);$$

elle est une conséquence immédiate des formules (1) et (2).

La formule (2) peut s'écrire

$$(4) \qquad nQ' - Q = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Le premier membre de cette relation est susceptible d'une interprétation particulière. Nous avons vu au paragraphe V comment se forment les Q cycles de sommets de P. A chacun des Q′ cycles de sommets de P′ correspond une substitution

$$\Sigma = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}$$

portant sur n lettres. Cette substitution se décompose en un certain nombre de permutations circulaires. A chacune de ces permutations circulaires correspond un cycle de sommets de P. Il y a donc en tout Q′ substitutions Σ, et le nombre total des permutations circulaires dont elles se composent est de Q.

Le nombre total des lettres est nQ′; si alors λ_i est le nombre des permutations circulaires qui permutent i lettres, on aura

$$\Sigma \lambda_i = Q, \qquad \Sigma i \lambda_i = nQ',$$

d'où

$$(5) \qquad \Sigma (i - 1)\lambda_i = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Voyons en passant quelle est la relation de ces substitutions Σ avec les nombres ν_i définis au paragraphe III. Chacun des points singuliers A′ du paragraphe III correspond à un sommet de P′ et par conséquent à une substitution Σ. Cette substitution permute n lettres correspondant aux n feuillets de la surface de Riemann C du paragraphe III ou aux n déterminations de M, c'est précisément la permutation que subissent ces n déterminations quand M′ tourne autour de A′. Les points A_i correspondent à divers sommets de P et par conséquent aux permutations circulaires en lesquelles se décompose Σ. On voit ainsi que ces permutations circulaires porteront respectivement sur

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_q$$

lettres.

Nous allons examiner en particulier le cas où $q = 1$, c'est-à-dire celui où la courbe C′ est de genre 1, et où les intégrales abéliennes sont réductibles aux intégrales elliptiques.

La formule (5) devient alors :

$$(5\ bis) \qquad \Sigma(i-1)\lambda = 2(p-1).$$

Ceci nous montre d'abord que p ne peut être nul, ce qui était d'ailleurs évident puisque alors C n'admettrait pas d'intégrale abélienne; si l'on supposait $p = 1$, tous les nombres i devraient être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes nos substitutions Σ devraient se réduire à la substitution identique; il n'y aurait pas sur la surface de Riemann C′ de points de ramification A′, nous devrions prendre pour le polygone fuchsien un quadrilatère, à côtés opposés conjugués, dont la somme des angles serait 2π; ce quadrilatère se réduirait alors à un parallélogramme rectiligne de la géométrie ordinaire; puisque la somme des angles serait 2π et non plus petite que 2π comme dans la géométrie non euclidienne; nous retomberions en définitive sur la théorie ordinaire de la transformation des fonctions elliptiques.

Examinons donc le cas de

$$q = 1, \qquad p > 1.$$

Deux hypothèses sont possibles :

1° Ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres. Dans ce cas chacune de ces substitutions se décompose en un certain nombre de permutations circulaires, qui ne portent que sur une lettre, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est nul, excepté pour l'une d'elles qui porte sur deux lettres, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est égal à 1. Nous aurons donc dans le premier membre de (5 *bis*) autant de termes égaux à 1 qu'il y a de substitutions Σ, tous les autres termes étant nuls; ce premier membre est donc égal au nombre des substitutions Σ. A chacune de ces substitutions Σ correspond un cycle de sommets de P′. Si, comme nous l'avons supposé au paragraphe III, nous choisissons ce polygone P′ de la façon la plus simple possible, il n'y en aura pas d'autres. Ainsi notre premier membre est égal au nombre de ces cycles et l'on a

$$(6) \qquad Q = 2p - 2$$

et par conséquent

$$(7) \qquad N = 2p - 1.$$

La somme des angles sera π pour chacun de ces cycles (puisque le nombre ν est égal à 2). Les polygones P′ ainsi définis seront des *polygones* P′ *de la première sorte.*

2° On peut supposer, au contraire, que quelques-unes des substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation entre deux lettres; que, par exemple, l'une d'elles se réduit à une permutation circulaire entre trois ou plusieurs lettres, ou à deux permutations entre deux lettres. Alors le premier membre de (3 *bis*) contient plusieurs termes égaux à 1, ou un terme supérieur à 1 et correspondant à cette substitution, de sorte que l'on a

$$Q' = 2p - 2, \qquad N' = 2p - 1.$$

Les polygones P′ ainsi définis seront des *polygones* P′ *de la deuxième sorte.*

Les cas les plus simples sont ceux d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est égale à π; ou bien encore celui d'un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués et qui a deux cycles de sommets, avec des sommes d'angles de π et de $\frac{2\pi}{3}$.

Nous verrons plus loin que les polygones P′ de la deuxième sorte peuvent être regardés comme des dégénérescences de ceux de la première sorte.

Examinons surtout ceux de la première sorte. Pour déterminer un polygone de $2N' = 4p - 2$ côtés, il faut $8p - 7$ données. Mais notre polygone est assujetti à certaines conditions. D'abord les côtés conjugués doivent être égaux (au point de vue non euclidien), ce qui fait $N' = 2p - 1$ conditions; ensuite la somme des angles de chaque cycle doit être égale à π, ce qui fait $Q' = 2p - 2$ conditions. Il reste donc

$$(8p - 7) - (2p - 1) - (2p - 2) = 4p - 4$$

données arbitraires.

Mais ces données sont *réelles*, elles équivalent donc à $2p - 2$ données arbitraires *complexes*.

Comparons ce nombre à celui des périodes arbitraires de notre tableau. Le tableau des périodes peut être réduit à la forme canonique comme nous l'avons fait au paragraphe I; reportons-nous par exemple au premier exemple de ce paragraphe où $q = 1$, $p = 3$; nous voyons que dans ce tableau figurent quatre arbitraires h, a, b, c; le nombre α est l'entier caractéristique de la réduction et ne doit pas être regardé comme arbitraire; c'est notre nombre n. En général,

nous aurons une arbitraire correspondant à h, et $\frac{p(p-1)}{2}$ arbitraires analogues à a, b, c; en tout

$$\frac{p(p-1)}{2}+1.$$

Ce nombre n'est pas égal à $2p-2$ et cela ne doit pas nous étonner, puisqu'un système quelconque de périodes ne correspond pas toujours à une courbe C, ou, pour parler le langage du paragraphe I, à des fonctions abéliennes *spéciales*. La différence

$$\frac{p(p-1)}{2}+1-(2p-2)=\frac{p^2-5p+6}{2}$$

est le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *réductibles* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

Considérons maintenant un système de périodes *quelconques*, non réductibles en général; le nombre des périodes arbitraires est

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Le nombre des données arbitraires dont dépend une courbe C de genre p (modules) est

$$3p-3.$$

La différence

$$\frac{p(p+1)}{2}-3p+3=\frac{p^2-5p+6}{2}$$

représente le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *quelconques* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

On remarquera que, comme il convient, ce nombre de conditions est le même dans les deux cas.

Si l'on avait pris un polygone de la deuxième sorte, on aurait eu $Q'<2p-2$ et le nombre des arbitraires (réelles) eût été

$$4(N'-3)-N'-Q'=3N'-Q'-3=2Q'<4p-4.$$

Voyons, en nous plaçant à un point de vue entièrement différent, à quoi correspondent ces Q' points singuliers. Considérons la courbe C', qui sera de degré m et aura par conséquent

$$d=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-p$$

points doubles.

Soit u_1 l'intégrale abélienne de C qui est réductible aux intégrales elliptiques. Les points A correspondant aux sommets de P' seront ceux pour lesquels la

dérivée de cette intégrale $\frac{du_1}{dx}$ s'annulera. Ce seront donc les points d'intersection de C avec la courbe

$$\frac{du_1}{dx} = 0.$$

Cette courbe, adjointe à C, et passant par les d points doubles, est de degré $m - 3$. Elle coupe C (en dehors des points doubles) en

$$m(m-3) - 2d = 2(p-1)$$

points. A chacun d'eux correspond en général une valeur de u_1 et par conséquent un cycle de sommets de P'.

En général, ces $2p - 2$ points d'intersection sont distincts et correspondent à autant de valeurs distinctes de u_1. Le nombre des cycles de sommets de P' est donc

$$Q' = 2p - 2.$$

Le polygone P' est alors de la première sorte, mais il peut se faire également que les deux courbes se touchent de façon que deux des points d'intersection se confondent (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute circulairement trois lettres), ou bien encore que deux de ces points correspondent à une même valeur de u_1 (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute à la fois deux lettres β_1 et β_2, et deux autres lettres β_3 et β_4). Le nombre Q' est alors plus petit que $2p - 2$ et le polygone P' est de la seconde sorte.

IX. Cas de $q > 1$.

Nous avons alors à appliquer la formule

$$(1) \qquad \Sigma(i-1)\lambda_i = 2(p-1) - 2n(q-1)$$

et nous ferons une première remarque : si

$$(2) \qquad n > \frac{p-1}{q-1},$$

le premier membre de (1) doit être négatif, ce qui est absurde. Il est donc impossible de construire les polygones P et P' de façon à satisfaire à l'inégalité (2), Et cependant nous pouvons construire un tableau de périodes réductibles analogue, par exemple, au tableau relatif du deuxième exemple du paragraphe I. Dans ce tableau $q = 2$, $p = 4$ et $n = 23$. Il est clair que nous pouvons

choisir les entiers α et β qui sont arbitraires de telle façon que le produit $\alpha\beta$ soit plus grand que 3, c'est-à-dire que $\frac{p-1}{q-1}$.

Nous pouvons donc construire un tableau de périodes réductibles, tel que l'inégalité (2) soit satisfaite, et cela non seulement pour $p=4$, $q=2$ mais quels que soient p et q, le résultat étant évidemment général. A la vérité, cela n'implique pas l'existence des courbes C et C′, puisque ces périodes pourraient engendrer des fonctions abéliennes *non spéciales*. Mais dans l'exemple choisi ($p=4$, $q=2$) il suffit d'une condition pour que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et pour que la courbe C existe; et, en effet, pour $p=4$, on a $\frac{p^2-5p+6}{2}=1$. Comme il reste dans notre tableau plusieurs arbitraires, nous pourrons disposer de l'une d'elles de façon à satisfaire à cette condition, et la courbe C existera. Quant à la courbe C′, elle existe toujours puisque, pour $q=2$, on a $\frac{q^2-5q+6}{2}=0$.

Ainsi nous pourrons trouver un système de périodes réductibles, telles que C et C′ existent et que l'inégalité (2) ait lieu. Il suffira pour cela, quel que soit n, que le nombre des arbitraires

$$\frac{q(q+1)}{2}+\frac{(p-q)(p-q+1)}{2}$$

soit plus grand que le nombre des conditions à remplir

$$\frac{p^2-5p+6}{2}+\frac{q^2-5q+6}{2}.$$

Qu'est-ce à dire? Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe I, si l'on considère un système S′ de q points de C′, on peut lui faire correspondre un système S de q points de C, de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S′ soit une fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S. Mais il ne s'ensuit pas qu'à *un* point M′ de C′, on puisse faire correspondre *un* point M de C′, de telle sorte que toute fonction rationnelle des coordonnées de M soit une fonction rationnelle des coordonnées de M′.

Quand la seconde condition (qui entraîne la première) sera remplie, nous dirons que la courbe C est *multiple* de la courbe C′, et quand la première condition sera remplie sans que la seconde le soit, nous dirons que la courbe C est *pseudo-multiple* de la courbe C′.

L'analyse qui précède nous montre que pour des valeurs convenables de p, q et n il existe certainement des courbes pseudo-multiples.

Maintenant il peut se faire que

$$n = \frac{p-1}{q-1}. \tag{3}$$

Nous pouvons alors construire les polygones P′ et P; seulement le premier membre de (1) est nul, de sorte que tous les nombres i doivent être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes les substitutions Σ doivent se réduire à la substitution identique. Alors *il n'y a pas de point de ramification tel que* A′ *sur* C′. Si nous choisissons le polygone P′ de la façon la plus simple possible, on n'aura qu'un seul cycle de sommets de P′ et la somme des angles sera 2π; on aura donc :

$$Q' = 1, \qquad N' = 4q.$$

Nous dirons alors que le polygone P′ est *de la troisième sorte*. L'exemple le plus simple est $q=2$, $p=3$, $n=2$; le polygone P′ est un octogone dont les côtés opposés sont conjugués; le polygone P est un polygone de 14 côtés formé par la réunion de deux de ces octogones et dont les côtés opposés sont conjugués.

Supposons maintenant

$$n < \frac{p-1}{q-1}; \tag{4}$$

nous pouvons alors faire deux hypothèses :

1° Ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres; on a alors

$$\Sigma(i-1) = Q = 2(p-1) - 2n(q-1),$$
$$N' = Q' + 2q - 1 = 2(p-1) - 2(n-1)(q-1) + 1.$$

Le nombre des données arbitraires (réelles) qui définissent P′ est

$$4N' - 3 - N - Q = 2Q + 6q - 6 = 4(p-1) - (4n-6)(q-1)$$

et elles équivalent à

$$2(p-1) - (2n-3)(q-1)$$

arbitraires complexes. Nous dirons dans ce cas que le polygone P′ est *de la première sorte*.

2° Ou bien toutes les substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation

entre deux lettres; alors

$$Q' = 2(p-1) - 2m(q-1), \qquad \nu = 2(p-1) - (2n-3)(q-1).$$

Le polygone P′ est alors *de la deuxième sorte*.

Nous pouvons, ainsi que nous l'avons fait pour le cas de $q = 1$, comparer le nombre des arbitraires du polygone P′ avec celui des périodes arbitraires. Nous nous bornerons au cas des polygones de la première sorte; on a alors

$$\nu = 2(p-1) - (2n-3)(q-1)$$

données arbitraires *complexes* dans le polygone P′. Le nombre des arbitraires dans le tableau des périodes réductibles est

$$H = \frac{q(q+1)}{2} + \frac{(p-q)(p-q+1)}{2}.$$

Étant donné un tableau de périodes réductibles, à combien de conditions doivent satisfaire les périodes de ce tableau pour que l'on soit conduit à une courbe C multiple d'une courbe C′? Le nombre cherché de ces conditions est $H - \nu$.

Comparons-le avec le nombre

$$\frac{p^2 - 5p + 6}{2}$$

des conditions pour qu'un système *quelconque* de périodes conduise à des fonctions abéliennes spéciales, c'est-à-dire pour que la courbe C existe. La différence

$$H - \nu - \frac{p^2 - 5p + 6}{2}$$

est égale à $(1-q)(p-q+2-2n)$.

On voit que l'égalité a lieu pour $q = 1$, ainsi que nous l'avons vu dans le paragraphe précédent; en revanche elle n'a plus lieu en général pour $q > 1$.

1° Si

$$(5) \qquad p = q + 2n - 2,$$

le nombre des conditions pour qu'un système de périodes *réductibles* engendre deux courbes algébriques C et C′ telle que la première soit multiple de l'autre, est égal au nombre des conditions pour qu'un système de périodes *quelconques* engendre une courbe algébrique C.

2° Si

$$(6) \qquad p \neq q + 2n - 2,$$

le premier nombre est supérieur au second; c'est-à-dire qu'il peut arriver que les conditions pour que C existe étant satisfaites, cette courbe C ne soit cependant pas multiple d'une courbe C'; et cela peut s'expliquer de deux manières :

Ou bien la courbe C' n'existe pas. En effet, si nous avons q intégrales abéliennes réductibles n'ayant chacune que $2q$ périodes distinctes, il peut se faire que les périodes de ces q intégrales engendrent des fonctions abéliennes à q variables *non spéciales*.

Ou bien la courbe C' existe, mais la courbe C est seulement *pseudo-multiple* de C'. Le nombre des conditions pour que la courbe C' existe est

$$\frac{q^2 - 5q + 6}{2}.$$

Si donc

(7) $$H > \frac{p^2 - 5p + 6}{2} + \frac{q^2 - 5q + 6}{2},$$

il peut arriver que, les conditions pour que les courbes C et C' existent l'une et l'autre étant satisfaites, la courbe C ne soit cependant pas multiple de C'. Il est certain dans ce cas que C est pseudo-multiple de C'.

3° Si au contraire

(8) $$p < q + 2n - 2,$$

le premier nombre est plus petit que le second.

Pour nous résumer : soit α le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant quelconques; soit β le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant réductibles; soit γ le nombre des conditions pour que C et C' existent, les périodes étant réductibles; et enfin δ le nombre des conditions pour que C soit multiple de C'. On aura certainement

$$\delta \geq \gamma \geq \beta, \quad \beta \leq \alpha.$$

Les égalités et inégalités (5), (6) et (8) entraînent respectivement les conséquences

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = \delta, \quad \alpha > \delta.$$

Si l'on a $\alpha > \delta$, on a certainement $\delta > \beta$, et dans l'hypothèse (7) on a même $\gamma > \beta$; si l'on a $\alpha > \delta$, on a certainement $\alpha > \beta$; mais, même dans cette hypothèse, il peut très bien se faire que l'on ait par exemple

$$\gamma < \delta, \quad \alpha > \beta,$$

ce qui entraînerait encore l'existence de courbes pseudo-multiples. Tout ce que

nous pouvons dire, c'est que l'existence de ces courbes, certaine dans l'hypothèse (7) et dans l'hypothèse (2), est possible, on pourrait presque dire probable, dans les autres hypothèses.

Plaçons-nous maintenant au même point de vue qu'à la fin du paragraphe précédent. Soit d'abord $q = 2$: Soient u et v les deux intégrales réductibles. La courbe C sera de degré m avec

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Les courbes

$$\frac{du}{dx} = \lambda \frac{dv}{dx}$$

seront des courbes adjointes de degré $m-3$ qui couperont C en $2p-2$ points en dehors des points doubles.

Supposons que la courbe C soit pseudo-multiple de C'; soient x'_1, y'_1; x'_2, y'_2 un couple de points quelconques de C'; et x_1, y_1; x_2, y_2 le couple de points correspondant de C. (Je prends un système de 2 points parce que $q = 2$.) Appelons K' et K ces deux couples ; à un couple K correspond un seul couple K'; mais à un couple K' correspondent plusieurs couples K. Dans quelle condition ces couples s'échangent-ils entre eux? Il y a certains couples qu'on peut appeler *couples de ramification*, parce que deux ou plusieurs couples K s'échangent, quand le couple K' subit un cycle de variations en tournant autour d'un de ces couples de ramification. Ce qui caractérise ces couples, c'est que le jacobien est nul :

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0.$$

Soient u_1 et u_2, v_1 et v_2 les valeurs des intégrales u et v aux points x_1 et x_2; soient

$$U = u_1 + u_2, \qquad V = v_1 + v_2.$$

Si nous considérons deux couples K correspondant à un même couple K' et par conséquent susceptibles de s'échanger entre eux, les valeurs de U et de V seront les mêmes pour ces deux couples. La condition précédente équivaut donc à :

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{du_1}{dx_1}\frac{dv_2}{dx_2} - \frac{du_2}{dx_2}\frac{dv_1}{dx_1} = 0,$$

ce qui signifie que les deux points x_1 et x_2 du couple de ramification sont sur une même courbe du faisceau

$$(9) \qquad \frac{du}{dx} + \lambda \frac{dv}{dx} = 0.$$

Pour trouver les couples de ramification, il suffira donc de mener une courbe quelconque de ce faisceau et de prendre deux de ses points d'intersection avec C.

Supposons maintenant que la courbe C soit multiple de C'; alors (x'_1, y'_1) sera une fonction uniforme de (x_1, y_1). Si donc M' est un point de C'; M_1 et M_2 deux des points de C qui correspondent à M'; u_1, u_2 et v_1, v_2 les valeurs correspondantes des intégrales u et v, on aura

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2.$$

Soient alors A' un des points de ramification sur C' et A_1 le point correspondant de C; on aura en A_1

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire que A_1 devra être un des points bases du faisceau (9) en dehors des points doubles.

Supposons que le polygone P' soit de la première sorte, il y aura

$$Q' = 2(p-1) - 2n(q-1)$$

de ces points bases en dehors des points doubles, puisqu'il y a Q' points de ramification. Il restera donc pour une courbe quelconque du faisceau

$$2n(q-1)$$

points d'intersection en dehors des points bases et des points doubles.

Supposons maintenant que l'on considère deux points M_1 et M_2 correspondant à un même point M' et qu'on fasse varier d'une manière continue M_1, M_2 et M'; il viendra

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2,$$

d'où

$$\frac{du_1}{dx_1} = \frac{du_2}{dx_2},$$

ce qui veut dire que les deux points M_1 et M_2 sont sur une même courbe du faisceau. Mais à un point M', correspondent n points M qui sont tous sur une même courbe du faisceau. Les $2n(q-1)$ intersections de cette courbe avec C se répartissent donc en $2q-2$ groupes de n points; les n points de chaque groupe correspondent à un même point M'; ainsi, à ces $2n(q-1)$ intersections correspondent sur C' seulement $2q-2$ points M' qui, correspondant à une même valeur de $\frac{du}{dx}$, *sont tous sur une même courbe adjointe à* C', de degré $m'-3$ si C' est de degré m'.

Dans ce dernier cas, considérons un couple de points M_1 et M_2 sur C, situés sur une même courbe du faisceau, mais en dehors des points bases; considérons le couple correspondant M'_1 et M'_2 sur C'. Comme on a

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = 0,$$

on pourrait croire que

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$$

et que ce couple est de ramification, ainsi qu'il arrive pour les courbes pseudo-multiples. Mais il n'en est rien, il y a exception dans ce cas. Nous avons, en effet,

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x'_1, x'_2)} \frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Le second membre peut s'annuler, soit quand le second facteur du premier membre s'annule, soit quand le premier facteur s'annule. Ici c'est ce premier facteur qui s'annule, puisque M'_1 et M'_2 sont sur une même courbe adjointe de degré $m' - 3$.

Si le polygone P' est de la deuxième sorte, le nombre Q' est plus petit que

$$2(p-1) - 2n(q-1),$$

mais le nombre des points bases situés sur C est toujours le même, en tenant compte du degré de multiplicité; soit parce que C touche toutes les courbes du faisceau, soit parce que deux points bases correspondent à un même point M' et par conséquent à un même sommet de P'. Si enfin P' est de la troisième sorte, il n'y aura pas de point de ramification et par conséquent pas de point base sur C. Le nombre total des intersections sera

$$2p - 2 = 2n(q-1)$$

se répartissant comme plus haut en $2q - 2$ groupes de n points.

Si, dans un cas quelconque, une courbe du faisceau devient tangente à C, c'est que deux de ces groupes se confondent, ou que deux points d'un même groupe se confondent. Dans le premier cas *la courbe n'est pas simplement tangente à* C, *mais n fois tangente à* C. Dans le deuxième cas, le contact ne peut avoir lieu qu'en un point base, puisque ce n'est que là que deux des points correspondant à M' peuvent s'échanger; et comme alors deux des points du groupe doivent venir se confondre au point base, comme d'ailleurs en un point base quelconque, on aura $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0$, ce qui veut dire que l'un des points

du groupe ne peut venir en ce point base sans qu'un autre point du groupe y vienne également; nous devons conclure :

Celle des courbes du faisceau qui touche C en un point base l'y rencontre en trois points confondus.

Le cas le plus simple est le suivant :

$$p = 3, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = m' = 4.$$

La courbe C est du quatrième degré sans point double, la courbe C′ du quatrième degré avec un point double; P′ est de la troisième sorte. Les courbes adjointes à C′ sont des droites passant par le point double; les courbes du faisceau (9) sont des droites passant par un point fixe B. Ce point fixe B n'est pas sur C puisque nous ne devons pas avoir de point base sur C. Si C est multiple de C′, toute droite passant par B coupera C en 4 points qui correspondront à 2 points de C′ situés sur une même droite passant par le point double. *Toute tangente menée à C par B sera une tangente double;* il y en aura 6, correspondant aux 6 tangentes menées à C′ par le point double. Donc, *sur* 28 *tangentes doubles de* C, *il y en a* 6 *qui passent par un même point.*

Soit maintenant

$$p = 4, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = 5, \quad m' = 4;$$

P′ est de la première sorte, $Q' = 2$; C est du cinquième degré avec 2 points doubles, C′ du quatrième degré avec 1 point double. Les courbes du faisceau (9) sont des coniques passant par les 2 points doubles et par les $Q' = 2$ points bases. Ces coniques coupent C en 4 points en dehors des points doubles et des points bases; ces 4 points correspondent aux 2 intersections de C′ avec une droite passant par le point double de C′.

Si C est multiple de C′, *il y a* 6 *de ces coniques qui sont doublement tangentes à* C; *celle de ces coniques qui touche* C *en un des points bases est osculatrice à* C.

Terminons en supposant $q = 3$. Si C est pseudo-multiple de C′ au lieu de systèmes de 2 points, il faudra envisager des triplets ou systèmes de 3 points, au lieu de 2 intégrales u et v, il en faudra considérer 3, u, v et w; le faisceau (9) deviendra donc un réseau

$$(9\ bis) \qquad \frac{du}{dt} + \lambda \frac{dv}{dt} + \mu \frac{dw}{dt} = 0.$$

Rien à changer d'ailleurs à ce qui précède; pour obtenir les triplets de ramifi-

cation on prendra une courbe quelconque de ce réseau et trois des points d'intersection de cette courbe avec C.

Supposons maintenant que C soit multiple de C'; en un point de ramification on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire que ce point sera l'un des points bases du réseau situé sur C.

Si M_1 et M_2 correspondent à un même point M', on aura

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{dw_1}{dw_2},$$

ce qui montre que toute courbe du réseau qui passe par M_1 passe aussi par M_2.

Si donc deux courbes du réseau se coupent sur C en un point, elles ont n points d'intersection sur C qui correspondent à un même point M'.

Un certain nombre des théorèmes précédents sont évidemment généraux; celui d'après lequel toute courbe du réseau en dehors des points bases et des points doubles coupe C en $2n(q-1)$ points qui se répartissent en $2q-2$ groupes de n points; celui d'après lequel toute courbe du réseau qui touche C en dehors des points bases touche C en n points, etc.

Le cas le plus simple est

$$p = 3, \quad q = 3, \quad n = 2, \quad m = 6, \quad m' = 4;$$

P' est de la troisième sorte; C a 5 points doubles; C' n'en a pas. Le réseau est formé de cubiques passant par ces points doubles. Si nous envisageons toutes celles de ces cubiques qui passent par un point B de C, elles iront toutes passer par un autre point B_1 de C.

X. — Étude spéciale du cas elliptique.

Supposons $q = 1$, d'où

$$Q = 2p - 2.$$

Le cas le plus simple est $p = 2$; d'où $Q' = 2$, $N = 3$, le polygone P' est un hexagone. Nous pouvons supposer d'abord que les côtés opposés sont conjugués, de telle façon que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(4)$; $\gamma(2)$ et $\gamma(5)$; $\gamma(3)$ et $\gamma(6)$ soient conjugués. Les sommets se répartissent alors en deux cycles auxquels corres-

pondent les deux substitutions

$$(1) \qquad \Sigma = S_1 S_2^{-1} S_3, \qquad \Sigma' = S_1^{-1} S_2 S_3^{-1}$$

pour employer la notation du paragraphe V.

Mais on pourrait faire d'autres hypothèses sur la loi de conjugaison des côtés; ces hypothèses se ramènent à deux que j'écris :

(2) 12, 35, 46,

(3) 13, 25, 46.

Voici la signification de cette notation; quand j'écris 12 par exemple, je veux dire que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ sont conjugués; de sorte que l'hypothèse des côtés opposés conjugués s'écrit

(4) 14, 25, 36.

Dans l'hypothèse (2) les substitutions Σ relatives aux deux cycles s'écrivent

$$\Sigma = S_1^{-1}, \qquad \Sigma' = S_1 S_2 S_3^{-1} S_2^{-1} S_3$$

et dans l'hypothèse (3)

$$\Sigma = S_1 S_3, \qquad \Sigma' = S_2 S_3^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1}.$$

Seulement il est clair que ces deux dernières hypothèses ne sont pas distinctes de la précédente; si, en effet, les côtés de l'hexagone P' étaient conjugués d'après l'une des deux lois (2) ou (3), on mènerait l'une des diagonales de cet hexagone qui en partagerait la surface en deux parties P'_1 et P'_2; soient C un des côtés de P' appartenant à P'_1 et C' son conjugué que je supposerai appartenir à P'_2; soient S la substitution du groupe fuchsien qui change C en C', et P'_3 le transformé de P'_1 par cette substitution.

Nous pouvons remplacer le polygone $P' = P'_1 + P'_2$ par le polygone $P'_2 + P'_3$; ce nouveau polygone engendrera le même groupe fuchsien, et nous pourrons nous arranger pour que dans ce nouveau polygone les côtés opposés soient conjugués.

Revenons aux équations (1); les deux substitutions Σ et Σ' doivent se réduire à des permutations entre deux lettres, puisque le polygone P' est de la première sorte pour employer la terminologie du paragraphe précédent. Regardons ces deux substitutions comme données et proposons-nous de déterminer les substitutions S_1, S_2 et S_3. On trouvera successivement

$$S_2^{-1} S_3 = S_1^{-1} \Sigma, \qquad S_1 \Sigma' = S_2 S_3^{-1}, \qquad S_3 S_2^{-1} = \Sigma'^{-1} S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_2^{-1} S_2 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} \Sigma'^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = (S_2 S_1^{-1})^{-1} (\Sigma'^{-1} S_1^{-1}) (S_2 S_1^{-1}).$$

La signification de cette identité est que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma'^{-1} S_1^{-1}$ sont *semblables* et que la première est la *transformée* de la deuxième par la substitution $S_2 S_1^{-1}$.

Nous devons donc chercher à déterminer S_1^{-1} de telle façon que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma'^{-1} S_1^{-1}$ (ou ce qui revient au même dans ce cas particulier $\Sigma' S_1^{-1}$, puisque Σ' se réduisant a une permutation entre deux lettres, on a $\Sigma' = \Sigma'^{-1}$) soient semblables.

Dans ce cas $S_1^{-1}\Sigma$ et $S_1^{-1}\Sigma'$ sont également semblables, puisqu'il est clair que ΣS_1^{-1} et $S_1^{-1}\Sigma = S_1^{-1}(\Sigma S_1^{-1})S_1$ sont semblables.

Voyons comment on peut reconnaître que deux permutations entre n lettres sont semblables. Supposons que la substitution S se réduise à α permutations circulaires entre

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_\alpha \text{ lettres},$$

de sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_\alpha = n$. Nous dirons alors que S répartit les n lettres en α *cycles* comprenant respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ lettres.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient semblables est alors que les nombres $\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ soient les mêmes pour les deux substitutions et, quand cette condition sera remplie, il sera facile de trouver la transformation qui transforme l'une de ces substitutions dans l'autre.

Cela posé, imaginons que Σ permute deux lettres a et b et que S_1^{-1} admette α cycles de $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ lettres. Alors de deux choses l'une :

1° Ou bien a et b appartiennent à un même cycle de S_1^{-1}. Dans ce cas $S_1^{-1}\Sigma$ aura les mêmes cycles que S_1^{-1}; seulement le cycle auquel appartenaient a et b se sera décomposé en deux, le premier commençant par a et le second par b. Si donc le cycle de S_1^{-1} avait p_1 lettres et que les deux lettres a et b s'y rencontrent à un intervalle de q lettres, les deux cycles nouveaux auront respectivement $p_1 - q$ et q lettres.

2° Ou bien a et b appartiennent à deux cycles différents de S_1^{-1} ayant respectivement p_1 et p_2 lettres; dans ce cas dans $S_1^{-1}\Sigma$, ces deux cycles se fondront en un seul qui aura $p_1 + p_2$ lettres.

D'où la règle suivante pour former S_1^{-1}; supposons que Σ permute les lettres a et b et que Σ' permute les lettres c et d; alors S_1^{-1} devra satisfaire à l'une des conditions suivantes :

1° Ou bien les quatre lettres a, b, c, d appartiendront à un même cycle

de S_1^{-1} et y occuperont les rangs

$$R_a, \quad R_b, \quad R_c, \quad R_d,$$

de telle façon que

$$R_a - R_b = R_c - R_d,$$

c'est-à-dire que les deux distances ab et cd soient les mêmes.

2° Ou bien que ces deux couples de lettres ab et cd soient dans deux cycles différents, que ces deux cycles aient le même nombre de lettres, et que les distances ab et cd soient les mêmes.

3° Ou bien que les quatre lettres a, b, c, d appartiennent à quatre cycles C_a, C_b, C_c, C_d ayant respectivement N_a, N_b, N_c, N_d lettres et de telle façon que

$$C_a, \quad C_b, \quad C_c, \quad C_d,$$
$$N_a = N_c, \quad N_b = N_d$$

(ou $N_a = N_d$, $N_b = N_c$).

On voit de combien de manières on peut déterminer S_1 et ce qu'il y reste d'arbitraires.

Une fois S_1 déterminée, nous connaîtrons les deux substitutions semblables ΣS_1^{-1}, $\Sigma' S_1^{-1}$ et il nous sera facile de déterminer la substitution $S_2 S_1^{-1}$ qui les transforme l'une dans l'autre. Nous aurons donc S_2 et nous en déduirons immédiatement S_3.

Le problème comporte donc en général un grand nombre de solutions. Lorsqu'on en connaîtra une, voyons comment nous pourrons construire le polygone P. Partons de l'hexagone P'. Le polygone P sera formé de n hexagones $P'(1)$, $P'(2)$, ..., $P'(n)$, congruents à P'. Représentons symboliquement ces n hexagones par n points A_1, A_2, ..., A_n. Supposons que la substitution S_1 change A_α en A_β, nous joindrons les deux points A_α et A_β par un trait continu ; ces traits continus seront ce que j'appellerai *les lignes* L_1. Nous définirons de même les lignes L_2 et les lignes L_3, à l'aide des substitutions S_2 et S_3. Une condition à remplir, c'est qu'en suivant les lignes L_1, L_2 et L_3, on puisse passer d'un quelconque des points A à un autre, c'est-à-dire que *le groupe dérivé de* S_1, S_2, S_3, que j'appellerai le groupe (S_1, S_2, S_3), *soit transitif*.

Si cette condition est remplie, on pourra en général aller d'un des points A à un autre par plusieurs chemins différents. Pratiquons alors des coupures dans quelques-unes des lignes L_1, L_2, L_3 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus aller d'un point A à un autre que d'une seule manière sans revenir sur ses pas. Nous disposerons alors les hexagones $P'(\alpha)$ de la façon suivante : supposons que A_α

et A_3 soient reliés par une ligne L_i non affectée de coupure; alors les deux hexagones $P'(\alpha)$ et $P'(\beta)$ seront contigus de telle façon que le $(i+3)^{\text{ième}}$ côté de $P'(\alpha)$ coïncide avec le $i^{\text{ième}}$ côté de $P'(\beta)$. Si la ligne L_i est affectée d'une coupure, ces deux hexagones ne seront plus contigus, mais le $(i+3)^{\text{ième}}$ côté de $P'(\alpha)$ et le $i^{\text{ième}}$ côté de $P'(\beta)$ seront deux côtés conjugués du périmètre de P.

Il est possible de choisir S_1 *de plusieurs manières*, de façon à satisfaire aux équations (1) et de telle sorte que le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif. Mais il est aisé de comprendre que toutes ces manières ne sont pas essentiellement distinctes. Nous supposons en effet $p=2$ et nous nous donnons l'entier n de telle façon que le tableau des périodes réduites s'écrive

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & a & \dfrac{2i\pi}{n}, \\ 0 & 2i\pi & \dfrac{2i\pi}{n} & b. \end{array}$$

Il dépend donc de deux constantes a et b qui sont arbitraires. Ces deux constantes définissent la courbe C qui varie d'une manière continue, quand les constantes varient elles-mêmes d'une manière continue. *Les courbes* C *réductibles forment donc une seule série analytique.*

Si nous nous donnons les substitutions S_1, S_2, S_3 et le polygone P', nous pourrons construire le polygone P. Ce dernier polygone et par conséquent la courbe C varient alors d'une façon continue quand les éléments de P' varient d'une façon continue. Les courbes C ainsi obtenues forment donc une série analytique.

Partons maintenant d'autres substitutions S'_1, S'_2, S'_3; nous obtiendrons encore une série analytique de courbes C; mais cette série sera identique à la première puisqu'il n'y en a qu'une.

On doit donc pouvoir passer des substitutions S_1, S_2, S_3 aux substitutions S'_1, S'_2, S'_3 en transformant l'hexagone P' comme nous l'avons expliqué au début de ce paragraphe; c'est-à-dire en le coupant par une diagonale qui le divise en deux polygones P'_1 et P'_2 et remplaçant $P'=P'_1+P'_2$ par $P'_2+P'_3$, P'_3 étant l'un des transformés de P'_1. Il s'agit de voir ce que deviennent dans ces conditions les substitutions S_1, S_2, S_3, mais pour cela je préfère traiter le problème d'une façon un peu plus générale. Supposons que P' soit un polygone de $2N'$ côtés, N' étant quelconque; supposons que $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ soient conjugués, et soit S_α la substitution correspondante. Soient $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ deux côtés conjugués appartenant l'un à P'_1, l'autre à P'_2, et soit S_a la substitution correspondante. Suppo-

sons que P_3 soit le transformé de P_1 par la transformation T_a du groupe fuchsien qui change $\gamma(a)$ en $\gamma(b)$.

Soient S'_α les diverses substitutions relatives au nouveau polygone; S'_α se rapportera à $\gamma(\alpha)$, si ce côté appartient à P'_2 et par conséquent fait partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; S'_α se rapportera au transformé de $\gamma(\alpha)$ par T_a, si $\gamma(\alpha)$ appartient à P'_1 et que son transformé appartenant à P'_3 fasse partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$. Dans ces conditions, ni $\gamma(a)$, ni son transformé $\gamma(b)$, ne font partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; nous aurons en revanche dans le nouveau polygone deux nouveaux côtés qui seront la diagonale menée dans P', et sa transformée par T_a. Ce sera, par définition, à cette paire de côtés que se rapportera la substitution S'_a.

Cela posé, on aura

$$S'_a = S_a,$$

et quand aux autres substitutions S'_α, on aura

$$(5)\quad \begin{cases} S'_\alpha = S_\alpha & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ et } \gamma(\beta) \text{ appartiennent tous deux à } P_2, \\ S'_\alpha = S_a S_\alpha S_a^{-1} & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ et } \gamma(\beta) \text{ appartiennent tous deux à } P_1, \\ S'_\alpha = S_\alpha S_a^{-1} & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ appartient à } P_1 \text{ et } \gamma(\beta) \text{ à } P_2, \\ S'_\alpha = S_a S_\alpha & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ appartient à } P_2 \text{ et } \gamma(\beta) \text{ à } P_1. \end{cases}$$

Si nous supposons en particulier que P' soit un hexagone à côtés opposés conjugués, que la diagonale joigne deux sommets opposés et que les côtés $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ soient adjacents à cette diagonale, on aura

$$(5\ bis)\qquad S'_1 = S_1, \qquad S'_2 = S_1 S_2, \qquad S'_3 = S_1 S_3.$$

Nous devons donc prévoir que si les équations (1) admettent deux solutions et que pour ces deux solutions le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif, on peut passer de l'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5 *bis*) ou (5). Il serait intéressant de retrouver ce résultat par une vérification directe.

Supposons maintenant $p = 3$; le polygone P' sera un décagone. Soit par exemple

$$(1, 2), \quad (3, 8), \quad (4, 9), \quad (5, 10), \quad (6, 7)$$

la loi de conjugaison des côtés. On aura pour les substitutions Σ

(6) $\Sigma_1 = S_2$, $\Sigma_2 = S_6^{-1}$, $\Sigma_3 = $ [illegible], $\Sigma_4 = $ [illegible] $S_6 S_3^{-1}$.

Des équations (6) on déduit

$\Sigma_3 \Sigma_2 = $ [illegible], $\Sigma_4 \Sigma_1 = $ [illegible].

Ces équations sont de même forme que les équations (1), on en déduirait donc que

$$\Sigma_3 \Sigma_1 S_3^{-1} \quad \text{et} \quad (\Sigma_5 \Sigma_2)^{-1} S_3^{-1} = \Sigma_2^{-1} \Sigma_5^{-1} S_3^{-1} — \Sigma_2 \Sigma_5 S_3^{-1}$$

sont deux substitutions semblables. Il serait possible d'en déduire S_3 et ensuite les autres substitutions. Mais je ne ferai pas le calcul jusqu'au bout.

Ici encore, et pour la même raison, les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique et par conséquent si les équations (6) admettent deux solutions (conduisant à un groupe transitif), on peut passer d'une solution à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

Soit enfin $p = 4$; notre polygone P' aura 14 côtés. Nous ne pouvons plus démontrer de la même manière que les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique. Si, en effet, nous formons le tableau des périodes réductibles

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & h & \frac{2i\pi}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \frac{2i\pi}{n} & a & b & c \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & 0 & c & e & f \end{matrix}$$

les sept constantes h, a, b, c, d, e, f ne sont plus arbitraires. Il faut leur imposer une relation, si nous voulons que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et que la courbe C existe. Cette relation représente une surface de l'espace à sept dimensions, si nous regardons nos sept constantes comme les coordonnées d'un point dans cet espace; *et nous ne savons pas si cette surface n'est pas décomposable.*

Il serait d'autant plus intéressant de vérifier si, lorsque les équations analogues à (1) et à (6) admettent deux solutions (conduisant toutes deux à un groupe transitif), on peut toujours passer d'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

XI. — Cas de dégénérescence.

Comme nous savons que, tout au moins si $p = 2$ ou 3, les courbes C ne forment qu'une série analytique, nous devons prévoir que les polygones P' de la deuxième sorte ne seront que des dégénérescences de ceux de la première sorte. Pour nous en rendre compte, voyons ce qui arrive lorsqu'un polygone P dégénère de telle sorte que deux de ses côtés conjugués se réduisent à zéro.

Soient $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ les deux côtés conjugués qui se réduisent à zéro; soient $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\alpha - 1)$, $\sigma(\beta)$, $\sigma(\beta - 1)$ leurs sommets; de telle sorte que $\sigma(\alpha)$ et $\sigma(\beta - 1)$ d'une part, $\sigma(\alpha - 1)$ et $\sigma(\beta)$ d'autre part, appartiennent à un même cycle. Deux cas sont à distinguer suivant que les quatre sommets appartiennent ou non à un même cycle. Si ces quatre sommets n'appartiennent pas à un même cycle, le genre q du polygone P′ ne change pas par suite de la dégénérescence; dans le cas contraire, ce genre diminue d'une unité.

Plaçons-nous dans le premier cas, qui est le plus intéressant; avec la dégénérescence les sommets qui nous intéressent font partie de deux cycles différents K et K′; le premier de ces cycles commencerait par exemple par le sommet $\sigma(\beta)$ et se terminerait par le sommet $\sigma(\alpha - 1)$, d'où l'on reviendrait au sommet $\sigma(\beta)$. La substitution Σ correspondante s'écrirait

$$\Sigma = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\alpha.$$

Les substitutions S_λ, etc. correspondant à divers côtés de P′ et la dernière S_α au côté $\gamma(\alpha)$. Le cycle K′ commencerait par $\sigma(\beta - 1)$ suivi de $\sigma(\alpha)$ et des autres sommets du cycle; à ce cycle correspondrait la substitution

$$\Sigma' = S_\beta S_\gamma \ldots S_\theta,$$

la première des substitutions S du second membre étant $S_\beta = S_\alpha^{-1}$ et correspondant au côté $\gamma(\beta)$.

Après la dégénérescence, les deux cycles se confondent en un seul où l'on rencontre successivement $\sigma(\beta - 1) = \sigma(\beta)$, puis les divers sommets du cycle K, et enfin

$$\sigma(\alpha - 1) = \sigma(\alpha),$$

puis les sommets consécutifs du cycle K′. La substitution correspondante est

$$\Sigma_1 = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\gamma \ldots S_\theta = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots S_\theta = \Sigma\Sigma'.$$

Je dis que le genre p ne pourra pas augmenter par la dégénérescence. Nous avons en effet, comme au paragraphe VIII,

$$\Sigma(i - 1)\lambda_i = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Il s'agit donc de montrer que $\Sigma(i - 1)\lambda_i$ ne peut pas augmenter par la dégénérescence, c'est-à-dire que cette somme $\Sigma(i - 1)\lambda_i$, étendue aux divers cycles de lettres de Σ_1, ne peut être plus grande que la même somme étendue aux cycles de lettres de Σ et de Σ'. A chacune de nos n lettres faisons correspondre un symbole de β_i; égalons ceux de ces symboles qui correspondent à un même

cycle de lettres de la substitution Σ par exemple; soit h le nombre des équations symboliques distinctes ainsi obtenues; ce nombre h ne sera autre chose que la somme $\Sigma(i-1)\lambda_i$ étendue aux divers cycles de lettres de Σ; puisque si l'un de ces cycles est formé de i lettres, cela nous fera $(i-1)$ équations et, s'il y a λ_i cycles de i lettres, cela fera en tout $\Sigma(i-1)\lambda_i$ équations. Soient h' et h_1 les nombres analogues relatifs à Σ' et à Σ_1; je me propose de montrer que

$$h + h' \geqq h_1.$$

Les équations symboliques relatives à Σ_1 sont des conséquences de celles qui sont relatives à Σ et à Σ'; si en effet Σ change a en b, et que Σ' change b en c, Σ_1 changera a en c; cela nous donnera l'équation symbolique $\beta_a = \beta_c$ engendrée par Σ_1, laquelle sera une conséquence de l'équation $\beta_a = \beta_b$ engendrée par Σ, et de $\beta_b = \beta_c$ engendrée par Σ'. Cela me permet d'écrire l'inégalité précédente; je ne mets pas simplement le signe d'égalité, pour deux raisons : 1° d'abord parce que, si les équations dues à Σ_1 sont toutes des conséquences de celles qui sont dues à Σ et à Σ', il ne s'ensuit pas que toutes ces conséquences soient elles-mêmes des équations dues à Σ_1; 2° parce qu'il peut se faire que les équations dues à Σ ne soient pas toutes distinctes des équations dues à Σ'.

Le cas le plus simple, est celui où Σ se réduit à une permutation entre deux lettres et où il en est de même de Σ'. En d'autres termes Σ et Σ' contiendront chacune un cycle de deux lettres, tous les autres cycles n'ayant qu'une lettre. Alors deux cas peuvent se présenter : 1° ces deux cycles de deux lettres ont une lettre commune; 2° ils n'ont pas de lettre commune. Dans le premier cas Σ_1 aura un cycle de trois lettres, et dans le second cas deux cycles de deux lettres.

Considérons les courbes C et C′ correspondant au cas de dégénérescence et formons le polygone P′, en nous astreignant, comme nous l'avons fait, à choisir ce polygone *de la façon la plus simple possible*; ce sera un polygone de la deuxième sorte, et l'on aura

$$Q = 2(p-1) - 2m(q-1) - 1.$$

Deux des cycles de sommets qui existent dans le cas général se seront confondus en un seul. Soient : P′ le polygone dans le cas général; P'_0 ce que devient ce polygone par la dégénérescence; P'_1 le polygone *le plus simple* qui peut engendrer les courbes C et C′ dans le cas de la dégénérescence. P′ possédera deux cycles K et K′ correspondant à Σ et Σ'; sur P'_0, de même que sur P'_1, ces deux cycles sont confondus en un seul K_1 qui correspond à Σ_1. La somme des angles de K est égale à π de même que celle des angles de K′; quant à la

somme des angles de K_1, elle est égale à zéro sur P_0, tandis que sur P_1, elle est égale à $\frac{2\pi}{3}$ si Σ_1 a un cycle de trois lettres, et à π si Σ_1 a deux cycles de deux lettres.

Soit par exemple $q=1$, $p=2$; le polygone P′ est un hexagone à côtés opposés conjugués, la somme des angles est 2π; dans les cas de dégénérescence, ce polygone se réduit à la limite à un quadrilatère à côtés opposés conjugués, et dont la somme des angles est zéro. Mais le quadrilatère P'_0 ainsi obtenu n'est pas le plus simple qui puisse engendrer les courbes C et C′; ce quadrilatère le plus simple P'_1 est encore à côtés opposés conjugués, mais la somme des angles est $\frac{2\pi}{3}$ ou π.

On voit ainsi que si les courbes C forment une série analytique continue, il n'en est pas de même des polygones P′ les plus simples susceptibles de les engendrer. Si l'on considère une série continue de courbes C, et la série des polygones P′ les plus simples correspondants, cette série présentera une discontinuité au moment de la dégénérescence.

XII. — Polygones doublement réductibles.

Soient $q=1$, $p=2$; nous avons une courbe C de genre 2 qui est multiple d'une courbe C′ de genre 1, mais si la courbe C admet une intégrale abélienne réductible aux intégrales elliptiques, elle en admet une seconde, c'est-à-dire qu'il y a une seconde courbe C″ de genre 1 dont C est multiple. Existe-t-il un système de fonctions fuchsiennes engendrant à la fois les trois courbes? Soit G un groupe fuchsien de genre 2, et engendrant la courbe C, c'est-à-dire tel qu'entre deux des fonctions fuchsiennes attachées à ce groupe, il y ait précisément la relation algébrique représentée par la courbe C. Peut-on choisir ce groupe G, de telle sorte qu'il soit contenu dans un autre groupe fuchsien G′ de genre 1, et engendrant la courbe C′, et qu'il soit en même temps contenu dans un troisième groupe fuchsien G″ de genre 1 et engendrant la courbe C″? Alors le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P décomposable en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P′ qui engendre la courbe C′. En même temps le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P_1 *équivalent* à P; par ce mot *équivalent*, je veux dire que P et P_1 peuvent être décomposés en un même nombre de parties et de telle façon que chacune des parties de P_1 ne soit autre chose que la transformée de la partie correspondante de P par une des substitutions de G. D'autre part, P_1

pourra être décomposé en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P'' qui engendre la courbe C''.

Nous allons voir bientôt que cela n'est pas toujours possible. Reprenons les trois surfaces de Riemann C, C', C'' : à un point de la deuxième correspondent n points de la première et de même à un point de la troisième correspondent n points de la première. Soient : M' un point de C'; M_1, M_2, $\ldots$, M_n les points correspondants de C. Si deux de ces points M_i se confondent, le point M' est un point de ramification de C' et l'on définirait de même ceux de C''. Soient A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_p ceux de C'; et soient B''_1, B''_2, $\ldots$, B''_p ceux de C''. Aux points A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_p correspondront l'un des cycles de sommets de P'; mais ce n'est pas tout. Considérons B''_1; à ce point correspondront sur C, n points B_{11}, B_{12}, $\ldots$, B_{1n} dont deux au moins sont confondus. Soit B_{1i} un de ces n points qui ne se confond avec aucun autre (s'il en existe, ce qui arrivera en général); à ce point correspondra sur C' un point B'_{1i} qui devra encore correspondre à un cycle de sommets de P'. A ce point B'_{1i} correspondront sur C, n points parmi lesquels B_{1i}; soit D_1 un autre de ces points auquel correspondra sur C'' un point D''_1; à D''_1 correspondront sur C, n points dont le point D_1; soit E_1 un autre de ces points; soit E'_1 le point correspondant de C'; je dis qu'à E'_1 correspondra encore un cycle de sommets de P' et ainsi de suite; on poursuivrait ainsi indéfiniment.

Voici comment on verrait par exemple que B'_{1i} correspond à un cycle de sommets de P'. Soient z la variable qui figure dans nos fonctions fuchsiennes; M, M', M'' les points correspondants sur C, C', C'', de telle sorte que les coordonnées de ces trois points soient des fonctions fuchsiennes de z. Supposons que z tourne autour d'un certain point z_0, en même temps que M, M' et M'' tournent respectivement autour de B_{1i}, B'_{1i} et B''_1. Supposons que quand z fait α tours, M, M' et M'' en fassent respectivement β, γ, δ. Comme B''_1 correspond à un cycle de sommets de P'', on devra avoir en ce point

$$\frac{dM}{dz} \quad 0.$$

D'autre part, comme B_{1i} ne se confond avec aucun autre point B_{1k}, et qu'en ce point, par conséquent, M est fonction uniforme de M'', on aura

$$\frac{dM'}{dM} \quad 0.$$

Comme M' est fonction uniforme de M, on aura

$$\frac{dM}{dM} \quad 0.$$

De ces relations

$$\frac{dM}{dM'} = 0, \qquad \frac{dM''}{dM} = 0, \qquad \frac{dM'}{dz} = 0,$$

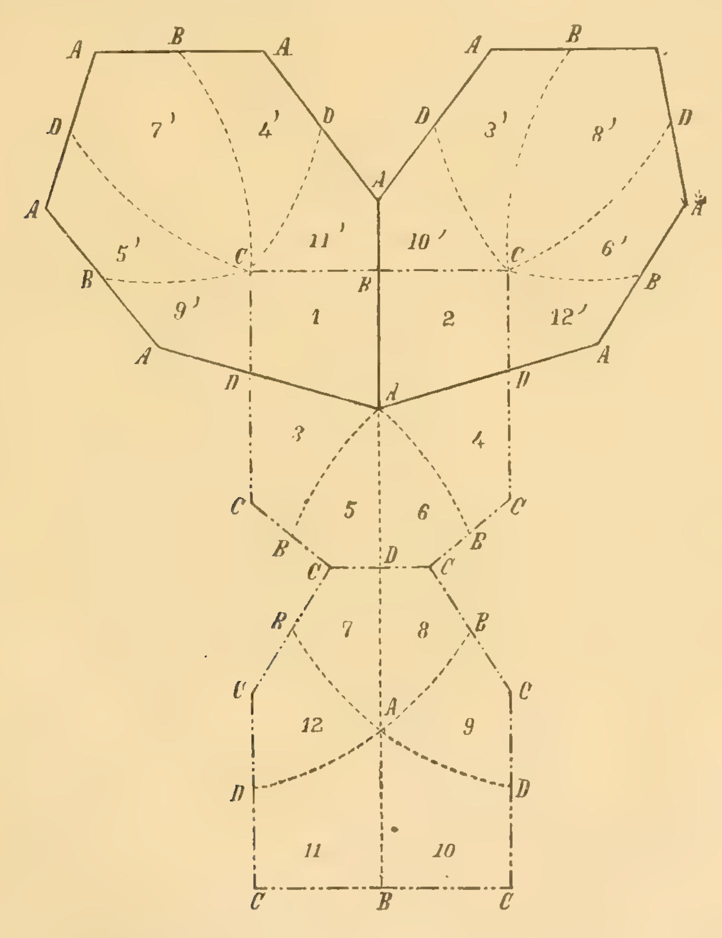
on déduira

$$\frac{dM'}{dz} = 0,$$

ce qui veut dire que z_0 est aussi un sommet du polygone P'.

En général on serait conduit à attribuer à P' une infinité de cycles de sommets, ce qui veut dire que le problème que nous nous étions proposé est impossible.

Cette impossibilité n'a pas lieu dans le cas de $n = 2$; en effet nous n'avons



que deux points B_{11} et B_{12} qui doivent se confondre, et il n'existe pas de point B_{1i} ne se confondant avec aucun autre; ce que nous venons de dire ne s'applique donc pas.

Reportons-nous à la figure, sur laquelle je vais d'abord donner quelques explications. Les proportions et les courbures n'y sont pas observées, *même grossièrement*. On ne doit s'attacher qu'aux positions relatives des lignes et des points au point de vue de l'*Analysis situs*. Toutes les lignes, droites ou courbes, qui y sont tracées représentent des *droites non euclidiennes*, c'est-à-dire des arcs de circonférences orthogonales au cercle fondamental. Quand je parlerai de ligne droite, d'égalité ou de symétrie, j'entendrai toujours ces mots *au sens non euclidien*.

Le polygone P est décomposé en deux hexagones P' et P'_1 ; les contours de ces deux hexagones sont figurés en trait plein, leurs sommets sont désignés par la lettre A. Le polygone P_1, équivalent à P, est décomposé en deux hexagones P'' et P''_1 ; les contours sont représentés en trait mixte —··—··, leurs sommets sont désignés par la lettre C.

Quand un hexagone a ses côtés opposés égaux et que la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair (ce qui arrive ici où les côtés opposés sont conjugués et où ces deux sommes d'angles sont égales à π) cet hexagone possède un centre de symétrie. Ici le polygone P', formé des quadrilatères 1, 11', 4', 7', 5', 9', et le polygone P'_1, formé des quadrilatères 2, 10', 3', 8', 6', 12', admettent pour centres de symétrie deux sommets C du polygone P ; le polygone P'' formé des quadrilatères 1, 2, 3, 4, 5, 6, a pour centre de symétrie un sommet A commun à P'_1 et à P'_1 ; le polygone P''_1, formé des quadrilatères 7, 8, 9, 10, 11, 12, possède un centre de symétrie que j'appelle encore A.

Les points B et D sont les milieux des côtés de P', P'_1, P'', P''_1. Notre figure se trouve décomposée en 22 quadrilatères numérotés de 1 à 12, et de 3' à 12'. Ces quadrilatères présentent les symétries suivantes :

1, 7 ;	4', 9 ;	11, 5	sont symétriques par rapport à	C_1 (sommet C du quadrilatère 1)
3', 12 ;	2, 8 ;	6, 10		C_2
1, 10 ;	2, 11' ;	3', 9		B_1
8, 5 ;	6', 7 ;	12', 4'		B_1
1, 6 ;	2, 5 ;	4, 3	»	A_1
5, 8 ;	6, 7 ;	3, 9	»	D_5
1, 10 ;	2, 11 ;	4, 12	»	D_5
7, 10 ;	8, 11 ;	9, 12	»	A_7
3, 9				D_1
4, 12			»	D_2

D'où les égalités suivantes :

$$
(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} 1 = 10' = 10, & 6 = 6' = 7 = 7', \\ 4 = 12 = 4' = 12', & 3 = 9 = 3' = 9', \\ 2 = 11 = 11', & 5 = 8 = 5' = 8'. \end{cases}
$$

Ces égalités ont lieu de telle sorte que les sommets A, B, C, D de deux quadrilatères égaux se correspondent. On aura d'autre part

$$1 = 6, \qquad 4 = 3, \qquad 2 = 5,$$

mais de telle sorte que les sommets ABCD d'un des quadrilatères correspondent aux sommets ADCB de l'autre. Il en résulte que dans le tableau des égalités (A), les sept quadrilatères de la première ligne sont égaux entre eux, de même que les huit de la deuxième ou les sept de la troisième.

Les quadrilatères 4 et $4'$, 5 et $5'$, etc. sont transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe G, et c'est pour cela que les deux polygones

$$P' = P'_1 + P'', \qquad P_1 = P'_1 + P''$$

sont équivalents.

Il est clair que la surface du cercle fondamental peut être décomposée en quadrilatères tous égaux à l'un des trois quadrilatères 1, 2 ou 3, de telle façon que tout sommet de l'un des quadrilatères soit un centre de symétrie de la figure. On peut les assembler 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P'; on peut les assembler d'une seconde manière 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P''.

Considérons la courbe C': les sommets A de rang pair de l'hexagone P' correspondront à un point M'_1 de cette courbe, les sommets A de rang impair à un autre point M'_2 de cette courbe. Soient u_1 et u_2 les arguments elliptiques de ces deux points. Le point C, centre de symétrie de P', correspondra sur C' à un point M_3 d'argument elliptique $\frac{u_1+u_2}{2}$, tandis que les arguments elliptiques des milieux B et D des côtés seront encore $\frac{u_1+u_2}{2}$ à une demi-période près. L'argument elliptique de tous les points C sera le même.

Considérons maintenant les arguments elliptiques sur la courbe C''; nous trouverons encore que ceux de tous les points A sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang pair de P'' sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang impair sont les mêmes; que celui d'un point A est moyenne arithmétique entre celui d'un sommet C de rang pair et celui d'un sommet C de rang impair.

Nous remarquerons que l'hexagone P' est quelconque, de telle sorte que le résultat est général et nous l'énoncerons sous la forme suivante :

Supposons que la courbe C de genre 2 soit multiple de la courbe C' de genre 1, de telle façon qu'à chaque point de C corresponde un point de C' et à chaque point de C', deux points de C : il existera une autre courbe C'' de genre 1, telle qu'à chaque point de C corresponde un point de C'' et à chaque point de C'' deux points de C.

Il y aura sur C' deux points M'_1 et M'_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en M_1 pour le premier, en M_2 pour le second; soient M''_1 et M''_2 les points de C'' qui correspondent à M_1 et M_2.

Il y aura de même sur C'' deux points N''_1 et N''_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en N_1 pour le premier, en N_2 pour le second; soient N'_1 et N'_2 les points de C' qui correspondent à N_1 et N_2.

Les points N'_1 et N'_2 sont identiques, de même que les points M''_1 et M''_2.

Nous pouvons supposer que C' et C'' sont deux cubiques. La tangente à C' au point $N'_1 = N'_2$ et la droite $M'_1 M'_2$ se coupent sur C'. La tangente à C'' au point $M''_1 = M''_2$ et la droite $N''_1 N''_2$ se coupent sur C''.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone P' est régulier et où nos trois quadrilatères sont égaux. Le cercle fondamental se trouve alors subdivisé en une infinité de quadrilatères égaux. Ces quadrilatères engendreront alors un groupe fuchsien Γ, qui est de genre zéro, et un système de fonctions fuchsiennes de la classe de celles qui sont engendrées par la série hypergéométrique. Le groupe Γ contient comme sous-groupes G', G'' et G. Considérons une fonction fuchsienne quelconque engendrée par Γ; ce sera une fonction rationnelle à la fois des coordonnées du point M, de celles du point M' et de celles du point M''. A une valeur de cette fonction correspondront 12 points M sur la courbe C, 6 points M' sur la courbe C', et 6 points M'' sur la courbe C''.

SUR LA RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

ET

LA THÉORIE DES FONCTIONS FUCHSIENNES

Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und Mathematischen Physik, gehalten zu Göttingen vom 22-28 April 1909. Leipzig und Berlin, 1910 (Vierter Vortrag.)

Messieurs, j'ai l'intention de vous parler aujourd'hui de la réduction des intégrales abéliennes en tant qu'elle est liée à la théorie des fonctions automorphes et, en particulier, des fonctions fuchsiennes.

Un système de fonctions abéliennes de p variables et $2p$ périodes est dit *réductible* quand il se laisse ramener à un système de q variables et $2q$ périodes avec $q < p$. Il est tout d'abord ici important de distinguer deux cas :

Dans le *premier cas*, le système S de fonctions abéliennes de p variables peut être engendré par une *courbe algébrique* de genre p ; de même, le système S′ à q variables a pour origine un domaine algébrique de genre q.

On sait bien que ce premier cas n'est pas le cas général, car la courbe C ne dépend que de $3p-3$ constantes essentielles, alors que les fonctions abéliennes de p variables renferment $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. C'est ce qui nous amène à distinguer le *deuxième cas*, celui où l'un au moins des systèmes S, S′ ne provient pas d'un domaine algébrique.

Dans la conférence d'aujourd'hui, je me restreindrai *exclusivement* au premier cas. Mais là encore, il me faut distinguer deux cas. Nous basons notre étude sur la considération des deux courbes algébriques C et C′ ; dans le cas de la réductibilité, il existe entre elles une *correspondance* algébrique. C'est cette correspondance qui va décider de la nouvelle distinction.

Dans le premier cas, en vertu de la correspondance, à chaque point M de C est associé un point M′ de C′ et un seul, pendant qu'à tout point de C′ correspondent n points de C. Je nomme n le *nombre caractéristique* de la correspondance et dis que C est une *courbe multiple* de C′.

Ce premier cas n'est pas le plus général, qui est en fait le deuxième. La correspondance n'a plus lieu entre deux points M et M′, mais entre deux groupes de points M_1, ..., M_ν de C avec les coordonnées x_1, y_1, ..., x_ν, y_ν et M'_1, ..., M'_ν de C′ avec les coordonnées x'_1, y'_1, ..., x'_ν, y'_ν.

A chaque groupe de C, correspond un et un seul groupe de C′ pendant qu'inversement à un groupe de C′ sont associés, en général, plusieurs groupes de C. Je dis alors que C est une *courbe pseudo-multiple* de C′.

Dans le premier cas, x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et y, alors que, dans le deuxième, on peut seulement affirmer que toute fonction symétrique des couples $(x'_1, y'_1, \ldots, x'_\nu, y'_\nu)$ est une fonction rationnelle de $(x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu)$. Il est facile de voir que chaque courbe C qui est multiple de C′ est aussi courbe pseudo-multiple de C′. Mais, inversement, j'ai pu former plusieurs exemples montrant que toute courbe pseudo-multiple de C′ n'est pas multiple de C′.

Je ne veux pas ici insister sur ce point, d'autant plus que les considérations qui suivent s'appliquent expressément au premier cas.

Dans le cas de la réductibilité de nos intégrales, il est possible d'amener le tableau de leurs périodes à une certaine *forme normale*. Les deux exemples suivants donneront une idée de cette forme.

1° $q = 1$, $p = 3$. Le tableau des périodes peut être réduit à la forme suivante :

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 & h & \frac{2i\pi}{\alpha} & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} & a & b \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & b & c \end{matrix}$$

2° $q = 2$, $p = 4$. Les périodes normalisées sont ici :

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \frac{2i\pi}{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha\beta} & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & -\frac{2i\pi}{\alpha} & 0 & b' & c' \end{matrix}$$

Les nombres α et β représentent dans les deux tableaux des nombres entiers.

Je définis maintenant un deuxième *nombre caractéristique* $\varkappa$. Il désigne l'ordre de la fonction thêta de q variables en laquelle, dans le cas de la réductibilité, est transformée une fonction thêta du premier ordre de p variables.

Dans le premier exemple, on a $\varkappa = \alpha$, et dans le deuxième $\varkappa = \alpha\beta$. *Les deux nombres caractéristiques n et $\varkappa$ sont toujours égaux.* J'ai trouvé deux démonstrations de cette proposition que j'exposerai maintenant dans leurs traits essentiels.

Première démonstration. — Soient M et M' deux intégrales abéliennes de première, seconde ou troisième espèce de la courbe C. J'imagine la surface de Riemann correspondante découpée d'une manière canonique par $2p$ rétrosections issues d'un point et ne partageant pas la surface. Les intégrales M et M' possèdent alors les périodes suivantes :

(M) $\qquad x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{2p},$

(M') $\qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_{2p}.$

Il me faut maintenant définir une *forme bilinéaire* caractéristique fondamentale. Je pose donc

$$F(x, y) = \int \mathrm{M}\, d\mathrm{M}',$$

où l'intégrale est prise le long du contour total de la coupure. Si les x et les y sont des périodes normales, $F(x, y)$ prendra la forme

$$F(x, y) = \sum_{\varkappa=1}^{p} (x_{2\varkappa-1} y_{2\varkappa} - x_{2\varkappa} y_{2\varkappa-1}).$$

Si je suppose que M soit l'une des intégrales réductible, ses $2p$ périodes pourront s'exprimer sous forme linéaire à coefficients entiers avec seulement $2q$ périodes $\omega_1, \ldots, \omega_{2q}$. J'ai donc alors

$$x_\varkappa = \sum_{j=1}^{2q} m_{\varkappa j}\, \omega_j \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où les $m_{\varkappa j}$ sont des nombres entiers.

Si M et M' sont maintenant des intégrales de première espèce, on sait qu'on a

$$F(x, y) = 0.$$

En remplaçant dans cette équation les x par leur expression en ω, on obtient

une équation bilinéaire entre les y et les ω, qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{j=1}^{2q} H_j \omega_j = 0.$$

Soient alors $u_1, \ldots, u_p$, p intégrales de première espèce linéairement indépendantes de la courbe C; nous pouvons poser

$$U = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_p u_p,$$
$$U' = \mu'_1 u_1 + \mu'_2 u_2 + \ldots + \mu'_p u_p.$$

Les coefficients, encore indéterminés, μ' seront choisis de façon à satisfaire aux $2q$ équations linéaires

$$H_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q).$$

Si l'on observe que ces $2q$ équations ne sont pas linéairement distinctes, mais qu'il existe entre elles q relations

$$\Sigma H_j \omega_j = 0,$$

on reconnaît facilement que M' est aussi réductible et que, de même que M appartient à un système linéaire de q intégrales réductibles, M' est aussi l'élément d'un système linéaire de $(p-q)$ intégrales réductibles. Mais ceci est seulement dit en passant.

Remarquons maintenant que H_j est une fonction linéaire des $y_\varkappa$, de telle sorte qu'on peut écrire

$$H_j = \sum_{i=1}^{2p} h_{ij} y_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q),$$

où les h_{ij} sont des nombres entiers. Avec les $m_{i\varkappa}$ et les h_{ij}, on peut former deux tableaux ayant chacun $2q$ colonnes et $2p$ lignes et tirer de chacun d'eux certains déterminants à $2q$ lignes. Je désigne par D l'un de ces déterminants formés avec les m et par D' le déterminant correspondant formé avec les mêmes lignes de h. En posant $J = \Sigma DD'$ (où le signe Σ s'étend à *tous* les déterminants tels que D), J est, au sens que l'on va dire, un *nombre invariant*. Il ne change pas si l'on remplace un quelconque des systèmes de périodes x ou ω par un système équivalent.

Deux systèmes de périodes sont équivalents quand chacun d'eux s'exprime sous forme linéaire à coefficients entiers avec les éléments de l'autre. On peut alors démontrer, d'une part, que $J = \varkappa^2$ et, d'autre part, que $J = n^2$.

On peut donc en conclure $\varkappa = n$.

C'est la première démonstration.

Deuxième démonstration. — Elle est essentiellement plus courte. Elle repose sur la comparaison des deux formes bilinéaires $F(x, y)$ et $\Phi(\omega, \omega')$ qui correspondent à C et à C'.

On a, d'une part,

$$F(x, y) = z\Phi(\omega, \omega'),$$

et, d'autre part,

$$F(x, y) = n\Phi(\omega, \omega'),$$

d'où l'on conclut $n = z$.

J'en viens maintenant au *lien de la théorie de la réduction avec la théorie des fonctions fuchsiennes.*

On sait que chaque courbe algébrique C définit un système de fonctions fuchsiennes. Le fait que C est une courbe multiple de C' peut aussi s'exprimer de la manière suivante : Il est toujours possible, de diverses façons, d'associer à C' un groupe à cercle limite G' (Grenzkreisgruppe) et à C un tel groupe G, de telle sorte que G soit un *sous-groupe* de G'. Si C est, en particulier, multiple n fois de C', G sera un sous-groupe d'indice n de G'.

On obtiendra, par suite, un domaine fondamental de G en prenant n domaines fondamentaux de G', convenablement choisis, dérivés de l'un d'eux par des transformations de G' et contigus. Le polygone P de G paraît donc partagé en n polygones $P'(\beta)$, qui sont congruents au polygone P' de G' au sens de la géométrie non euclidienne.

Je désigne par $\gamma(\alpha)$ les *côtés* du polygone P', et par $\gamma(\alpha, \beta)$ les côtés homologues du polygone $P'(\beta)$. Ces côtés $\gamma(\alpha, \beta)$ sont, ou à l'intérieur, ou sur la frontière de P.

Admettons que le côté $\gamma(\alpha')$ se déduise de $\gamma(\alpha)$ par une opération du groupe G'. Si $\gamma(\alpha, \beta)$ se trouve sur la frontière de P, il existera un autre côté $\gamma(\alpha', \beta')$ de cette frontière qui sera conjugué de $\gamma(\alpha, \beta)$ par une opération de G. Mais si $\gamma(\alpha, \beta)$ est intérieur à P, il n'existe pas un tel côté $\gamma(\alpha', \beta')$ différent de $\gamma(\alpha, \beta)$, car $\gamma(\alpha, \beta)$ et $\gamma(\alpha', \beta')$ coïncident et forment un côté commun à $P'(\beta)$ et à $P'(\beta')$. Quoi qu'il en soit, dans les deux cas correspond à chaque côté $\gamma(\alpha)$ de P' une permutation des n nombres $1, 2, \ldots, n$.

Une discussion tout à fait semblable peut se faire pour les *sommets* de P'. De même, que les côtés s'associent par couples, les sommets se partagent en cycles, de telle sorte que tous les sommets d'un cycle dérivent de l'un d'eux par des opérations de G'. A chacun de ces cycles, on peut de nouveau associer

une permutation déterminée des nombres 1, 2, ..., n qui peut, d'ailleurs, s'obtenir avec les permutations associées aux côtés.

Supposons que P possède 2N côtés et Q cycles de sommets; soient 2N′ et Q′ les nombres correspondants pour P′.

La permutation correspondant à un cycle de sommets de P′ se laisse décomposer en permutations circulaires. Supposons que pour l'ensemble des cycles de P′, on obtienne ainsi λ_i permutations circulaires de i nombres. On aura les relations suivantes :

$$2p = N - Q + 1,$$
$$2q = N' - Q' + 1,$$
$$Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2),$$
$$(nQ' - Q) = 2(p-1) - 2n(q-1),$$
$$Q = \Sigma\lambda_i, \qquad nQ' = \Sigma i\lambda_i.$$

Les considérations générales que nous venons de développer nous permettent de déduire une suite de propositions belles et importantes sur la *géométrie non euclidienne des polygones formés d'arcs de cercle* et sur la *géométrie des courbes algébriques*. J'indiquerai quelques exemples de ces propositions sans m'attacher à les démontrer en détail, les principes des démonstrations étant contenus dans les résultats précédents :

(I) $\qquad p = 3, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = m' = 4.$

Par les lettres m et m', on désigne les ordres des courbes C et C′. La courbe C n'a pas de point double, C′ a un point double.

Des vingt-huit tangentes doubles de C, il y en a six qui passent par un point extérieur à la courbe.

(II) $\qquad p = 4, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = 4, \quad m' = 5.$

C a deux points doubles, C′ un seul. Si l'on égale à zéro la différentielle de l'intégrale réductible de première espèce, on obtient un *faisceau de coniques*, dont les quatre points-base sont les deux points doubles de C et deux autres points de cette courbe.

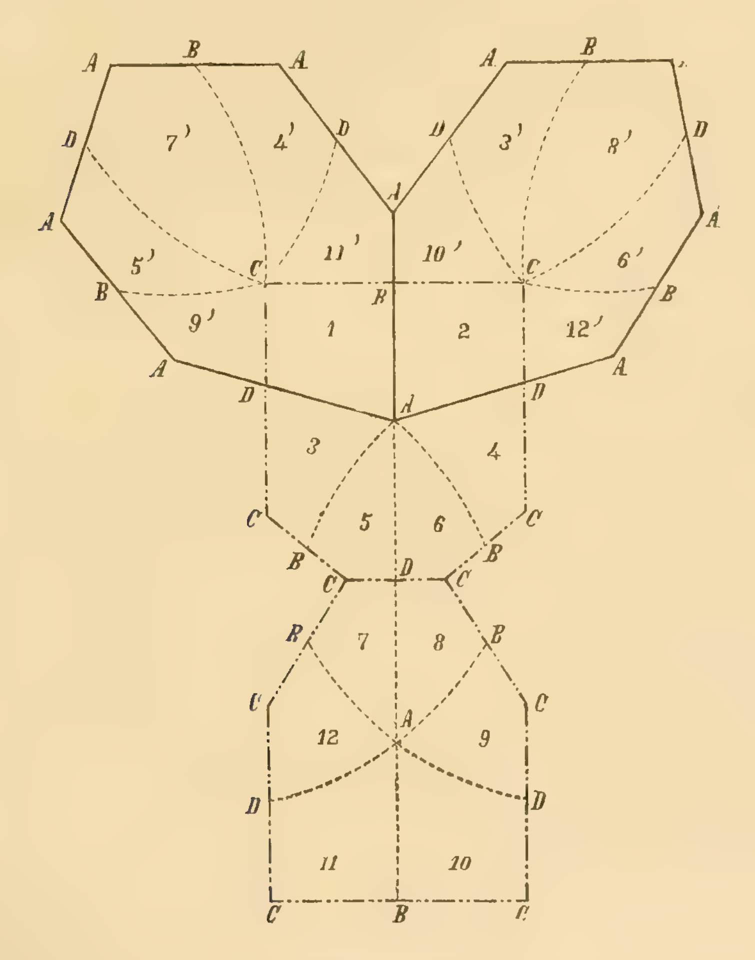
Six de ces coniques touchent C deux fois. Celle de ces coniques qui touche C en un point base y est osculatrice :

(III) $\qquad p = 2, \quad q = 1, \quad n = 2.$

La courbe C est *une courbe multiple de deux courbes* différentes C′ et C″. Il existe un groupe fuchsien G auquel on peut associer un premier polygone P_1

constitué par deux polygones d'un groupe G', correspondant à C' et aussi un second polygone P_2 composé de deux polygones d'un groupe G'' correspondant à C''.

La figure schématique ci-dessous servira à la compréhension des rapports mutuels de ces éléments.



Les deux domaines fondamentaux P_1 et P_2 sont représentés par les polygones avec les sommets respectifs A et C. Chacun d'eux se décompose en deux hexagones qui sont les domaines fondamentaux de G' et de G''. Pour faire apparaître plus nettement l'équivalence de P_1 et P_2, on a lié les centres de symétrie de ces hexagones au milieu des côtés de telle sorte que tous les polygones soient formés, d'une manière visible, de quadrilatères.

Je passe maintenant aux propositions de géométrie des courbes algébriques

que cet exemple illustre. Si l'on marque sur C' un point M', il lui correspond deux points M_a et M_b sur C. A chacun de ceux-ci correspond un point de C'', soit M''_a, M''_b.

On peut conclure de même, qu'en général, à chaque point de C'' correspondent deux points de C'.

La correspondance (C', C) a, d'ailleurs, deux points de ramification M'_1, M'_2, à chacun desquels ne correspond qu'un point de C et par suite, qu'un point de C''; soient M''_1, M''_2 ces points.

De même, la correspondance (C'', C) possède deux points de ramification N''_1, N''_2 à chacun desquels ne correspond qu'un point de C'; soient N'_1, N'_2 ces points.

Nous pouvons alors énoncer la première proposition en disant : N'_1 *et* N'_2 *d'une part*, M''_1 et M''_2 *d'autre part coïncident*.

La deuxième proposition suppose que C' et C'' sont des courbes de *troisième ordre*.

Menons en N'_1 (qui est aussi N'_2) *la tangente à* C' *et aussi la sécante* $M'_1 M'_2$. *Ces deux droites se coupent sur* C'.

De même, si l'on mène en M''_1 (qui est aussi M''_2), la tangente à C'' et si l'on prend son point d'intersection avec la sécante $N''_1 N''_2$, on obtient un point de C''.

Ces quelques exemples font reconnaître suffisamment combien nombreux sont les cas particuliers.

SUR

LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 202-204 (18 janvier 1886).

Il y a le plus grand intérêt à tenter de généraliser les théories de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires et les résidus des fonctions d'une variable : c'est l'objet des considérations suivantes.

Soient

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

deux variables imaginaires et

$$F(\xi, \eta) = P + iQ$$

une fonction de ces variables. Posons ensuite, pour définir le contour (ou *surface*) d'intégration,

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v), \qquad t = \varphi_4(u, v),$$

u et v étant deux paramètres arbitraires réels. Soient maintenant $[X, Y]$, $[X, Z]$, ... diverses fonctions de x, y, z et t; nous supposerons

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, X] = 0.$$

Soit

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$$

le déterminant fonctionnel de x et y par rapport à u et à v. Considérons l'intégrale double

$$\int\!\!\int \left\{ [X, Y]\frac{d(x, y)}{d(u, v)} + [X, Z]\frac{d(x, z)}{d(u, v)} + [X, T]\frac{d(x, t)}{d(u, v)} \right.$$
$$\left. + [Y, Z]\frac{d(y, z)}{d(u, v)} + [Y, T]\frac{d(y, t)}{d(u, v)} + [Z, T]\frac{d(z, t)}{d(u, v)} \right\} du\, dv.$$

Quand on permutera u et v, l'intégrale changera de signe : je dirai alors qu'on change le sens de l'intégration. Considérons trois fonctions entières quel-

conques de x, y, z et t et envisageons-les comme les coordonnées d'un point M dans l'espace. Faisons varier ensuite u et v : si, quelles que soient les fonctions entières considérées, le point M décrit une surface fermée, je dirai que le contour d'intégration est fermé.

Les conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire les conditions pour que l'intégrale soit nulle, toutes les fois que le contour d'intégration est fermé, sont au nombre de quatre. L'une d'elle est

$$\frac{d[X, Y]}{dz} + \frac{d[Y, Z]}{dx} + \frac{d[Z, X]}{dy} = 0,$$

et les autres s'en déduisent par permutation des lettres x, y, z, t; X, Y, Z, T.

Nous poserons alors

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int\int \left[(P + iQ)\frac{d(x, z)}{d(u, v)} + (iP - Q)\frac{d(x, t)}{d(u, v)} \right.$$
$$\left. + (iP - Q)\frac{d(y, z)}{d(u, v)} - (P + iQ)\frac{d(y, t)}{d(u, v)} \right] du\, dv.$$

Il est aisé de voir que les conditions d'intégrabilité sont remplies.

J'envisagerai le cas où la fonction $F(\xi, \eta)$ est rationnelle et je l'écrirai sous la forme

$$F(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\theta(\xi, \eta)},$$

en décomposant le dénominateur en ses facteurs.

Il ne faut pas que la fonction F devienne infinie en un point du contour d'intégration. En exprimant que ψ ou θ s'annule en un point de ce contour, on obtient quatre équations algébriques à quatre inconnues. On doit s'arranger pour que ces quatre équations n'aient aucune solution réelle.

Je ne puis exposer ici le mode de représentation, grâce auquel on peut s'affranchir de l'hypergéométrie et reconnaître, à l'aide de la Géométrie ordinaire, si l'intégrale, prise le long d'un contour fermé, est réellement nulle. Je me bornerai à indiquer quelles sont les différentes périodes de l'intégrale double, c'est-à-dire les valeurs qu'on obtient en prenant l'intégrale le long d'un contour fermé. Ces périodes sont de trois sortes :

1° Les périodes de la première sorte sont égales à $2\pi i H$, H étant une période de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi}{\psi(\xi, \eta)\dfrac{d\theta}{d\eta}},$$

relative à la courbe algébrique

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Il en est de même pour la seconde courbe algébrique,

$$\psi(\xi, \eta) = 0.$$

2° Les périodes de la seconde sorte se rapportent aux points d'intersection des deux courbes

$$\psi(\xi, \eta) = 0, \qquad \theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$(2\pi i)^2 \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\theta}{d\eta} - \frac{d\psi}{d\eta}\frac{d\theta}{d\xi}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point d'intersection.

3° Les périodes de la troisième sorte se rapportent, par exemple, aux points doubles de la courbe

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$(2\pi i)^2 \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\sqrt{\left(\frac{d^2\theta}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\theta}{d\xi^2}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point double.

Ainsi se trouve confirmé, et en même temps complété et précisé, un beau résultat obtenu dernièrement par M. Stieltjes au sujet d'une généralisation des formules de Cauchy et de Lagrange.

SUR

LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

(*Acta mathematica*, t. 9, p. 321-380 (1887).

C'est à Cauchy que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires; cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'Analyse mathématique et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où l'on cultive les sciences exactes, et en particulier en Allemagne et en France.

Il semblait qu'il n'y avait plus qu'un pas à faire pour étendre cette théorie aux intégrales doubles et qu'on pouvait se promettre de cette extension d'aussi belles conquêtes que de la considération des intégrales simples. Il y avait là de quoi tenter l'ambition des géomètres et cependant, au bout de quarante ans, nous sommes à peine plus avancés qu'au premier jour.

La plupart des tentatives qui ont été faites n'ont été que des échecs ou des demi-succès.

On croit pourtant que Jacobi possédait à ce sujet plusieurs résultats importants; mais ces résultats n'ont pas été publiés et ont été perdus pour la Science.

M. Maximilien Marie a entrepris de résoudre la question et écrit, peu de temps après la découverte de Cauchy, plusieurs mémoires qui ont été publiés longtemps après dans le 44e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Ses efforts néanmoins n'ont pas été heureux. Je ne parlerai pas ici de l'insuffisance de certains raisonnements fondés sur des considérations infinitésimales. Bien que toutes les démonstrations soient à refaire, la formule à laquelle l'auteur parvient est exacte si on l'interprète convenablement, mais elle exigerait pour pouvoir être appliquée sans crainte d'erreur une discussion délicate que M. Marie n'a pas faite.

Pour faire comprendre la nécessité de cette discussion, je ne citerai qu'un

seul exemple. L'auteur donne (*loc. cit.*, p. 58) la formule suivante :

$$\frac{a^2}{2}\int\int\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{-1}.$$

Cette formule est manifestement fausse; car on a dans le premier membre a^2 et dans le second le facteur a^3. En réalité l'intégrale du premier membre est nulle.

Comment la formule de M. Marie se trouve-t-elle en défaut? Il est aisé de le voir ; dans cette formule entre le volume limité par une surface qui, dans l'espace, a pour équation

$$x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

C'est une sphère, et l'auteur écrit que ce volume est $\frac{4}{3}\pi a^3$. Mais pour appliquer correctement la formule, il aurait fallu regarder cette surface non comme une sphère, mais comme un tore dégénéré dont la section méridienne aurait son centre sur l'axe de révolution. Le volume aurait alors été nul, et l'on aurait trouvé :

$$\frac{a^2}{2}\int\int\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On voit quels pièges aurait à redouter l'analyste inexpérimenté qui voudrait faire usage de la formule de M. Marie.

Les premières recherches de M. Picard présentent beaucoup plus d'intérêt, comme tout ce qui sort de la plume de cet auteur. Mais elles ne se rapportent qu'indirectement à la question.

Dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus* le 29 janvier 1883 et le 1er février 1886, M. Picard étudie des intégrales, définies comme il suit :

Soit $F(x, y)$ une fonction uniforme de x et de y; introduisons deux variables auxiliaires u et v, en posant :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Je supposerai que les fonctions φ et ψ sont uniformes et de plus que

$$F(x, y) = \Phi(u, v)$$

est une fonction uniforme de u et de v.

Cela posé, soient u_0, v_0 et u_1, v_1 deux systèmes de valeurs de u et de v. Imaginons que ces deux systèmes de valeurs correspondent à un même système de valeurs de x et de y.

L'intégrale envisagée par M. Picard est alors :

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} \Phi(u, v) \left(\frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{dv} \frac{d\psi}{du} \right) dv.$$

M. Picard a donné à ces intégrales le nom de *périodes ;* je ne saurais l'en blâmer puisque cette dénomination lui a permis d'exprimer dans un langage plus concis les intéressants résultats auxquels il est parvenu. Mais je crois qu'il serait fâcheux qu'elle s'introduisît définitivement dans la Science et qu'elle serait propre à engendrer de nombreuses confusions.

Et cela pour deux raisons :

D'abord ces intégrales ne sont pas des constantes, comme le fait fort bien observer M. Picard.

En second lieu, il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires u et v qui satisfont aux conditions énoncées. Chacun de ces systèmes donne pour l'intégrale une valeur différente. Il en résulterait que, si l'on voulait donner à cette intégrale le nom de période, cette période ne dépendrait pas uniquement de la fonction $F(x, y)$ à laquelle elle appartient, mais bien de ces variables soi-disant auxiliaires qui joueraient ainsi un rôle prépondérant.

M. Stieltjes a adressé à M. Hermite un travail fort remarquable où il cherchait à généraliser diverses formules de Cauchy et de Lagrange. Malheureusement quelques points restaient obscurs et l'auteur ne put les éclaircir de façon à se mettre à l'abri de toute objection. C'est ce qui le détermina à ne pas publier son mémoire, mais je tiens à lui rendre ici justice. Je chercherai plus loin à expliquer quels sont les points qui avaient arrêté M. Stieltjes et à montrer comment ses démonstrations peuvent être rendues parfaitement rigoureuses.

Le 25 janvier 1886, j'eus l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences une Note où j'étudiais à un point de vue nouveau les périodes des intégrales doubles, et en particulier celles qui sont analogues aux périodes polaires des intégrales simples. Ce sont les résultats de cette Note que je veux développer dans le présent travail.

Peu de temps après, M. Picard (*Comptes rendus*, 15 et 26 février 1886) se plaçant au même point de vue que moi, a obtenu un grand nombre de résultats remarquables. Le savant géomètre emploie dans ces deux Notes le mot de *période* avec la signification que nous lui donnerons dans la suite. Les périodes qu'il étudie n'ont donc aucun rapport avec les intégrales qu'il avait primitivement

désignées sous ce nom. Je crois devoir insister sur ce point afin de rendre toute confusion impossible.

I. — Modes de représentation.

Les difficultés auxquelles les géomètres se sont heurtés si souvent dans la théorie qui nous occupe n'ont rien d'essentiel et ne sont pour ainsi dire qu'une question de langage.

Dans l'étude des intégrales simples, on emploie un mode de représentation géométrique très commode et dont il semble qu'on pourrait difficilement se passer. On ne peut le transporter sans changement dans la théorie des intégrales doubles, pour une raison qu'il est aisé d'apercevoir.

Soient ξ et η deux variables complexes; si nous posons

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

en séparant les parties réelle et imaginaire, nous aurons quatre variables x, y, z et t. Nous ne pouvons les regarder comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à moins de nous résigner à admettre un espace à quatre dimensions.

On se trouve donc en présence du dilemme suivant : il faut, ou renoncer à toute représentation ou employer l'*hypergéométrie;* mais, dans ce dernier cas, on est exposé à rebuter la plupart des lecteurs, et de plus on ne possède que l'avantage d'un langage commode, mais incapable de parler aux sens.

Comme cette langue hypergéométrique répugne encore à beaucoup de bons esprits, je n'en ferai qu'un usage peu fréquent; je crois néanmoins nécessaire de préciser ici le sens des termes que je lui emprunterai.

Un point est un système de valeurs des quatre variables x, y, z et t.

L'ensemble des points qui satisfont à une seule relation entre x, y, z et t est une « multiplicité à trois dimensions » que l'on appelle *hypersurface*.

L'ensemble des points qui satisfont à deux relations simultanées est une « multiplicité à deux dimensions » que l'on appellera *surface*.

L'ensemble des points qui satisfont à trois relations simultanées est une « multiplicité à une dimension » à laquelle on conservera le nom de *ligne*.

Deux surfaces quelconques ont au point de vue analytique un certain nombre de points communs; mais il peut arriver que tous ces points deviennent imaginaires; comme nous ne considérons que des points réels, nous dirons alors que ces deux surfaces n'ont aucun point commun.

Une intégrale double doit être étendue à tous les points d'une surface. Nous aurons donc une *surface d'intégration* de même qu'on a, dans la théorie des intégrales simples, un chemin d'intégration.

De plus l'ensemble des *points singuliers* formera une surface.

Supposons en effet que la fonction sous le signe $\int\int$ soit le quotient de deux polynomes entiers $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$. Pour que cette fonction devienne infinie, il faut que

$$Q(\xi, \eta) = 0. \tag{1}$$

Mais on a, en séparant les parties réelle et imaginaire,

$$Q(\xi, \eta) = Q_1(x, y, z, t) + iQ_2(x, y, z, t),$$

de sorte que la relation (1) se décompose en deux :

$$Q_1(x, y, z, t) = 0,$$
$$Q_2(x, y, z, t) = 0.$$

Elle représente donc une surface.

Il faudra alors que la surface d'intégration et les surfaces singulières n'aient aucun point commun.

Si la fonction sous le signe $\int\int$ est algébrique, les surfaces singulières seront algébriques. Au contraire la surface d'intégration étant purement arbitraire ne sera pas forcément algébrique; elle pourra être transcendante ou se composer de portions appartenant à diverses surfaces algébriques.

Je vais maintenant exposer les artifices à l'aide desquels je compte m'affranchir de la nécessité de considérations hypergéométriques.

Soient λ, μ, ν trois quantités que je regarderai comme les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et considérons une surface algébrique ou portion de surface algébrique S sur laquelle se trouve le point λ, μ, ν. Écrivons :

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des fonctions rationnelles de λ, μ, ν dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle de ces variables. Il est clair que quand le point λ, μ, ν décrira dans l'espace ordinaire la surface ou portion de surface S, le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine surface ou portion de surface S'; de telle sorte que la surface S' est définie par la surface S et par les quatre *fonctions fondamentales* φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4.

Si la surface S est fermée, nous dirons aussi que la surface S′ est fermée.

La notion des surfaces d'intégration fermées qui va jouer un si grand rôle dans ce qui va suivre se trouve ainsi nettement définie.

Le genre de la surface S (au point de vue de la géométrie de situation) sera aussi le même que le genre de la surface S′, à moins que le point x, y, z, t ne décrive deux ou plusieurs fois la surface S′, ce que nous ne supposerons pas.

Lorsque l'on donnera à λ, μ, ν toutes les valeurs réelles possibles, le point λ, μ, ν décrira l'espace tout entier, et le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine hypersurface unicursale.

Tant donc que le point x, y, z, t restera sur cette hypersurface, nous pourrons le représenter par un point de l'espace ordinaire et nous serons affranchis de l'hypergéométrie.

Dans certaines questions nous n'envisagerons que des surfaces d'intégration situées sur une même hypersurface unicursale et nous pourrons nous servir de ce mode de représentation.

La plupart du temps nous supposerons simplement :

$$x = \varphi_1 = \lambda, \qquad y = \varphi_2 = \mu, \qquad z = \varphi_3 = \nu, \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu) = \varphi_4(x, y, z).$$

Alors le point x, y, z, t sera représenté par le point de l'espace x, y, z et la quatrième coordonnée t sera une fonction rationnelle de x, y, z.

La surface d'intégration sera alors définie par une surface S située dans l'espace ordinaire (x, y, z) et par une fonction rationnelle φ_4. On aura :

$$t = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)},$$

P et Q étant deux polynomes entiers, et nous supposerons qu'on n'a en aucun point réel de l'espace (x, y, z)

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Il est aisé de démontrer que toute surface d'intégration, ou bien est susceptible de ce mode de représentation, ou bien diffère très peu d'une surface qui en est susceptible, ou bien enfin peut être décomposée en plusieurs autres qui diffèrent très peu de surfaces algébriques admettant ce mode de représentation.

Ce mode de représentation est donc suffisamment général pour s'appliquer à tous les cas ; cependant il sera quelquefois plus commode de le modifier un peu.

Reprenons les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

dont il a été question plus haut.

Nous avons supposé jusqu'ici que ces quatre fonctions étaient rationnelles ; il nous suffit qu'elles soient *uniformes* et *bien déterminées*. Il peut même suffire que sans être uniformes dans tout l'espace, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de λ, μ, ν, elles restent uniformes dans une certaine région de l'espace (λ, μ, ν) pourvu que notre surface S qui représente la surface d'intégration soit tout entière contenue dans cette région.

II. — Conditions d'intégrabilité.

On sait ce qu'on doit entendre par une *intégrale simple* :

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long d'une courbe gauche quelconque dans l'espace (x, y, z). On connaît également les conditions d'intégrabilité ; c'est-à-dire les conditions pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin. (On suppose bien entendu que X, Y et Z sont des fonctions données de x, y et z.) Ces conditions sont :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \qquad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \qquad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Ces résultats s'étendent immédiatement, comme on le sait, au cas d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n fonctions de ces n variables ; il est aisé de définir l'intégrale simple :

$$(1) \qquad \int (X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n).$$

En effet, introduisons une variable auxiliaire et posons :

$$(2) \qquad x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(u).$$

Ces équations (2) définiront le chemin d'intégration.

Nous ferons varier u depuis u_0 jusqu'à u_1. Nous poserons :

$$x_1^0 = \varphi_1(u_0), \quad \ldots, \quad x_n^0 = \varphi_n(u_0),$$
$$x_1^1 = \varphi_1(u_1), \quad \ldots, \quad x_n^1 = \varphi_n(u_1).$$

Les deux systèmes de valeurs $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ définiront les deux points extrêmes de ce chemin d'intégration.

Alors l'intégrale (1) prise le long du chemin d'intégration (2) depuis le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ jusqu'au point $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ ne sera autre chose que l'intégrale définie

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(X_1 \frac{dx_1}{du} + X_2 \frac{dx_2}{du} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{du} \right) du.$$

Nous cherchons les conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire les conditions pour que cette intégrale soit indépendante du chemin d'intégration, c'est-à-dire ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$.

Ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ et elles s'écrivent

$$\frac{dX_i}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_i}.$$

Passons maintenant au cas des *intégrales doubles*, et d'abord dans l'espace ordinaire. Soit une intégrale double

$$\int\int (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)$$

A, B et C étant trois fonctions de x, y, z.

On sait ce qu'on doit entendre par là. La surface d'intégration peut n'être pas fermée, mais on peut toujours convenir de regarder l'un des côtés de la surface comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur.

Soient donc $d\omega$ un élément de cette surface et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dirigée vers l'extérieur.

L'intégrale sera alors

$$\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\,d\omega$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface.

On peut également la définir comme il suit, ce qui revient au même :

Exprimons x, y et z en fonctions de deux variables auxiliaires u et v,

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Ces équations définiront la surface d'intégration. L'intégrale ne sera alors autre chose que l'intégrale double ordinaire

$$\int\int \left[A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + B \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + C \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du\,dv.$$

Nous désignons suivant la coutume par la notation $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ le déterminant fonc-

tionnel

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

La condition d'intégrabilité (c'est-à-dire la condition pour que l'intégrale prise le long d'une surface fermée quelconque soit nulle) s'écrit alors

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

Tous ces points sont trop connus pour que j'y insiste davantage.

Passons maintenant au cas général.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes. Désignons maintenant par la notation

$$(X_i, X_k)$$

diverses fonctions données de ces n variables. Nous supposerons que l'on a

$$(3) \qquad (X_i, X_i) = 0, \qquad (X_i, X_k) = -(X_k, X_i).$$

Nous allons envisager l'intégrale double

$$J = \int\int \sum (X_i, X_k)\, dx_i\, dx_k$$

où l'on fait entrer sous le signe Σ les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k.

Pour la définir, imaginons qu'on introduise deux variables auxiliaires u et v de telle sorte que

$$(4) \qquad x_i = \varphi_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ces équations (4) définiront la surface d'intégration. Nous donnerons à u et à v outes les valeurs qui satisfont à une certaine inégalité

$$(5) \qquad \psi(u, v) > 0$$

de sorte qu'en réalité la surface d'intégration sera complètement définie par les équations (4) d'une part et par l'inégalité (5) d'autre part. L'égalité

$$\psi(u, v) = 0$$

définira ainsi la ligne qui servira de limite à la surface d'intégration.

L'intégrale proposée sera alors l'intégrale double ordinaire

$$J = \int\int \sum (X_i, X_k) \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)}\, du\, dv$$

qui devra être étendue à toutes les valeurs de u et de v satisfaisant à l'inéga-

lité (5). Quant au signe Σ, il s'appliquera aux $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k.

Mais en tenant compte des relations (3), on peut écrire l'intégrale étudiée sous la forme

$$J = \int\int \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv.$$

Il est manifeste que si l'on permute les variables u et v, l'intégrale change de signe, mais cette opération est tout à fait analogue à ce que serait, dans l'étude des intégrales simples, un changement du sens de l'intégration.

A part ce changement de signe, l'intégrale est indépendante du choix des variables auxiliaires u et v.

Notre intégrale double étant ainsi complètement définie, il faut trouver les conditions d'intégrabilité; je veux dire les conditions pour que l'intégrale ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de la courbe qui limite cette surface; de même que les intégrales simples appliquées à des différentielles exactes ne dépendaient pas du chemin d'intégration, mais seulement des extrémités de ce chemin.

Supposons que l'on remplace les équations (4) par les suivantes :

$$x_i = \varphi'_i(u, v),$$

la fonction φ'_i étant différente de la fonction φ_i. Alors on changera la surface d'intégration.

Mais supposons en même temps que l'on conserve l'inégalité (5) sans aucun changement, et que l'on ait

$$\varphi_i(u, v) = \varphi'_i(u, v)$$

toutes les fois que l'on a

$$\psi(u, v) = 0.$$

Alors la courbe qui limite la surface d'intégration n'a pas changé.

Si dans ces conditions l'intégrale n'a pas changé, nous dirons que l'expression sous le signe $\int\int$ est intégrable.

Imaginons que l'on pose

$$x_i = \varphi_i(u, v, w)$$

en introduisant une troisième variable auxiliaire w. Nous calculerons l'intégrale proposée J en l'étendant à toutes les valeurs de u et de v qui satisfont à l'inégalité (5) et en regardant w comme un paramètre arbitraire.

Je supposerai de plus que pour

$$\psi(u, v) = 0$$

les fonctions φ_i soient indépendantes de w. Alors la surface d'intégration dépendra de w, mais la courbe qui limite cette surface n'en dépendra pas.

J sera une fonction du paramètre w et nous cherchons les conditions pour que cette fonction soit une constante; ce seront les conditions d'intégrabilité.

Nous avons donc à écrire que

$$\frac{dJ}{dw} = 0.$$

Or

$$J = \int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv,$$

ce qui donne

$$\frac{dJ}{dw} = \int\int \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv$$
$$+ \int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{d^2 x_i}{du\, dw} \frac{dx_k}{dv} + \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} \frac{dx_i}{du} \right) du\, dv.$$

La première intégrale double du second membre peut s'écrire

$$\int\int \sum_i \sum_k \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} du\, dv.$$

Cherchons à réduire la seconde. Pour cela, remarquons que l'on a

$$(6) \qquad \int F\, du = \int\int \frac{dF}{dv} du\, dv,$$

l'intégrale double étant étendue à toute notre surface d'intégration et l'intégrale simple du premier membre au contour qui limite cette surface et qui est défini par l'équation

$$\psi(u, v) = 0.$$

Faisons dans cette équation

$$F = (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw}.$$

Nous avons supposé que les fonctions φ_i, c'est-à-dire les x_i, sont indépendantes de w pour $\psi = 0$. On a donc, si ψ est supposé nul,

$$\frac{dx_k}{dw} = 0, \qquad F = 0.$$

Il résulte de là que le premier membre de (6) est nul. On doit donc avoir

$$(7)\qquad \iint (X_i, X_k)\frac{dx_i}{du}\frac{d^2x_k}{dv\,dw}\,du\,dv = -\iint (X_i, X_k)\frac{dx_k}{dw}\frac{d^2x_i}{du\,dv}\,du\,dv - \iint \frac{d(X_i, X_k)}{dv}\frac{dx_k}{dw}\frac{dx_i}{du}\,du\,dv.$$

On peut écrire une seconde équation analogue à l'équation (6),

$$(6')\qquad -\int F\,dv = \iint \frac{dF}{du}\,du\,dv$$

d'où l'on déduit, de la même façon,

$$(7')\qquad \iint (X_i, X_k)\frac{dx_k}{dv}\frac{d^2x_i}{du\,dw}\,du\,dv = -\iint (X_i, X_k)\frac{dx_i}{dw}\frac{d^2x_k}{du\,dv}\,du\,dv - \iint \frac{d(X_i, X_k)}{du}\frac{dx_i}{dw}\frac{dx_k}{dv}\,du\,dv.$$

Remarquons maintenant que

$$\iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k)\left(\frac{dx_k}{dw}\frac{d^2x_i}{du\,dv} + \frac{dx_i}{dw}\frac{d^2x_k}{du\,dv}\right)du\,dv = 0.$$

En effet si l'on envisage l'expression suivante :

$$H = (X_i, X_k)\left(\frac{dx_i}{dw}\frac{d^2x_k}{du\,dv} + \frac{dx_k}{dw}\frac{d^2x_i}{du\,dv}\right)$$

on voit qu'elle se change en $-H$ quand on permute les indices i et k.

Dans l'emploi des relations (7) et (7′) nous pourrons donc laisser de côté le premier terme du second membre. Il vient donc pour l'expression de $\frac{dJ}{dw}$

$$\iint \sum_i \sum_k \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dw}\frac{dx_i}{du}\frac{dx_k}{dv} - \frac{d(X_i, X_k)}{dv}\frac{dx_i}{du}\frac{dx_k}{dw} - \frac{d(X_i, X_k)}{du}\frac{dx_i}{dw}\frac{dx_k}{dv}\right]du\,dv.$$

Observons maintenant que

$$\frac{d(X_i, X_k)}{du} = \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h}\frac{dx_h}{du}$$

et que l'on a deux formules analogues pour

$$\frac{d(X_i, X_k)}{dv} \quad \text{et} \quad \frac{d(X_i, X_k)}{dw}.$$

Ceci nous permet de transformer l'expression de $\frac{dJ}{dw}$ et de l'écrire

$$\iint \sum_h \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h}\left[\frac{dx_i}{du}\frac{dx_k}{dv}\frac{dx_h}{dw} - \frac{dx_i}{du}\frac{dx_h}{dv}\frac{dx_k}{dw} - \frac{dx_h}{du}\frac{dx_k}{dv}\frac{dx_i}{dw}\right]du\,dv.$$

Transformons-la encore en laissant de côté les termes où les indices i et k sont égaux entre eux, puisque nous savons que ces termes sont nuls. Réunissons de plus les termes en (X_i, X_k) et (X_k, X_i) en remarquant que

$$(X_i, X_k) = -(X_k, X_i).$$

Cela donnera

$$\int\int \sum \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv.$$

Le signe Σ porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on convient :

1° De laisser de côté les combinaisons où $i = k$.

2° De ne pas regarder comme différentes les deux combinaisons (i, k, h) et (k, i, h).

Nous pouvons écrire aussi :

$$\frac{dJ}{dw} = \int\int \sum \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k}\right] \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv.$$

Le signe Σ change alors de signification. Il porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on ne considère pas comme différentes deux combinaisons qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres i, k, h.

Il est clair d'ailleurs qu'on peut laisser de côté les combinaisons où deux des lettres i, k, h sont égales entre elles, parce qu'elles donneraient un résultat nul.

L'expression de $\frac{dJ}{dw}$ doit être nulle quelles que soient les fonctions φ_i. Cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(8) \qquad \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} = 0.$$

Telles sont les conditions d'intégrabilité. Il faut prendre pour le système des trois nombres (i, k, h) toutes les combinaisons possibles, en excluant celles où deux des lettres seraient identiques et en ne regardant pas comme distinctes celles qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres. Les conditions d'intégrabilité sont donc au nombre de

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Considérons en particulier le cas de $n = 4$ et envisageons l'intégrale double :

$$\int\int \left[(X, Y)\, dx\, dy + (X, Z)\, dx\, dz + (X, T)\, dx\, dt \right.$$
$$\left. + (Y, Z)\, dy\, dz + (Y, T)\, dy\, dt + (Z, T)\, dz\, dt\right].$$

Les conditions d'intégrabilité seront

$$\frac{d(X, Y)}{dz} + \frac{d(Y, Z)}{dx} + \frac{d(Z, X)}{dy} = 0,$$

$$\frac{d(X, Y)}{dt} + \frac{d(Y, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dy} = 0,$$

$$\frac{d(X, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dz} = 0,$$

$$\frac{d(Y, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dy} + \frac{d(T, Y)}{dz} = 0.$$

Si l'on compare les conditions d'intégrabilité relatives aux intégrales simples

(9) $$\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} = 0$$

avec les conditions (8) relatives aux intégrales doubles, il est impossible de n'être pas frappé d'un fait remarquable.

Dans les formules (9) on a alternativement le signe $+$ et le signe $-$; dans les formules (8) on n'a que le signe $+$.

Qu'arrive-t-il si l'on passe aux intégrales d'ordre supérieur ?

On trouvera des conditions tout à fait analogues aux conditions (8) et (9) et l'on rencontrera encore le fait que je viens de signaler. Pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre pair, tous les termes seront précédés du signe $+$; pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre impair, les termes seront alternativement précédés des signes $+$ et $-$.

Soit par exemple l'intégrale triple

$$\int\int\int \sum (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma,$$

l'intégrale étant définie comme plus haut, et les fonctions $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ étant des fonctions analogues aux fonctions (X_i, X_k) et qui changent de signe quand on permute deux des indices α, β, γ. Les conditions d'intégrabilité s'écriront alors

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} - \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\alpha)}{dx_\beta} - \frac{d(X_\delta, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} = 0$$

avec alternance des signes $+$ et $-$.

Soit au contraire l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int \sum (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma\, dx_\delta.$$

Les conditions d'intégrabilité s'écriront

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\varepsilon} + \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha)}{dx_\beta} + \frac{d(X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} + \frac{d(X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} = 0$$

avec le signe + partout.

III. — Théorème fondamental.

Reprenons le mode de représentation du paragraphe I. Soient donc λ, μ, ν les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et une surface ou portion de surface S. Posons ensuite

$$(1) \qquad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

les φ étant des fonctions rationnelles.

Envisageons une fonction des deux variables complexes

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it,$$

que j'appellerai

$$F(\xi, \eta)$$

ou bien encore

$$P + iQ,$$

en séparant les parties réelle et imaginaire. On aura alors

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dQ}{dy}, & \dfrac{dP}{dz} = \dfrac{dQ}{dt}, \\ \dfrac{dP}{dy} = -\dfrac{dQ}{dx}, & \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{dQ}{dz}. \end{array} \right.$$

Il s'agit maintenant de définir ce qu'on doit entendre par l'intégrale double

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

prise le long de la surface d'intégration définie par la surface S et par les équations fondamentales (1).

Il importe d'abord de définir le sens de l'intégration. Pour cela imaginons un observateur O, ayant les pieds sur la surface S et la tête dirigée soit vers l'extérieur de cette surface, soit vers l'intérieur. C'est la position de cet observateur O qui définira le sens d'intégration. Nous dirons que ce sens est positif si l'observateur a la tête vers l'extérieur et négatif dans le cas contraire.

Si la surface S n'est pas fermée, il n'y a plus à proprement parler d'extérieur

et d'intérieur; mais nous pouvons toujours convenir de regarder l'un des côtés comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur. (Si la surface S n'avait qu'un seul côté, l'intégrale serait nulle.)

Envisageons maintenant l'expression

$$\int\int (P + iQ)(dx + i\,dy)(dz + i\,dt).$$

Cette expression n'a absolument aucune signification par elle-même et ne pourra avoir que celle que nous conviendrons de lui donner. Effectuons néanmoins le produit sous le signe $\int\int$ d'après les règles ordinaires du calcul ([1]); ce ne sera là qu'une opération purement mécanique et destinée à nous servir de règle mnémonique. Il viendra

$$\int\int [(P + iQ)\,dx\,dz + (iP - Q)\,dx\,dt + (iP - Q)\,dy\,dz - (P + iQ)\,dy\,dt].$$

Imaginons maintenant qu'on puisse trouver deux variables auxiliaires u et v telles qu'en tous les points de la surface S les trois coordonnées λ, μ, ν soient des fonctions holomorphes de u et de v.

Alors l'intégrale cherchée sera l'intégrale double ordinaire

$$\int\int \left[(P + iQ)\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q)\frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} + (iP - Q)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - (P + iQ)\frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)}\right] du\,dv$$

étendue à tous les systèmes de valeurs de u et de v qui correspondent aux différents points de la surface S.

Si l'on ne pouvait trouver deux variables u et v satisfaisant à ces conditions, on décomposerait la surface S en plusieurs régions et (à la condition que ces régions soient assez petites) on pourrait toujours trouver dans chacune d'elles, deux variables u et v telles que λ, μ, ν soient fonctions holomorphes de u et de v, en tous les points de la région.

L'ordre des deux variables u et v n'est pas indifférent. Il est clair en effet que l'intégrale change de signe quand on permute ces deux variables. Voici donc la convention que nous ferons : imaginons que u et v représentent les coordonnées d'un point dans un plan. Imaginons que le point λ, μ, ν décrive sur la surface S un contour fermé très petit C autour des pieds de l'observateur O et que cet observateur voie ce point décrire ce contour C dans le sens contraire à celui des

(1) Sans changer l'ordre des facteurs.

aiguilles d'une montre. Le point correspondant (u, v) décrira dans son plan un autre contour fermé C'. Il faudra que ce second contour C' soit décrit comme le premier dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (en supposant que les axes des u et des v positifs soient disposés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y positifs).

Notre intégrale double est ainsi complètement définie et elle est analogue à celles que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent. On a d'ailleurs

$$(X, Y) = (Z, T) = 0,$$
$$(X, Z) = (T, Y) = P + iQ,$$
$$(X, T) = (Y, Z) = iP - Q.$$

Les quatre conditions d'intégrabilité s'écrivent alors

$$\frac{d(iP - Q)}{dx} - \frac{d(P + iQ)}{dy} = 0,$$
$$-\frac{d(P + iQ)}{dx} - \frac{d(iP - Q)}{dy} = 0,$$
$$\frac{d(P + iQ)}{dt} - \frac{d(iP - Q)}{dz} = 0,$$
$$\frac{d(iP - Q)}{dt} + \frac{d(P + iQ)}{dz} = 0.$$

Elles seront donc remplies en vertu des relations (2).

Il est aisé de tirer de là diverses conséquences.

Imaginons d'abord deux portions de surfaces S et S' limitées par un même contour C et que ces deux portions de surfaces soient situées toutes deux dans l'espace (λ, μ, ν). Nous supposerons d'ailleurs que les deux surfaces d'intégration sont définies l'une par S, l'autre par S', mais toutes deux par les mêmes équations fondamentales

$$(1) \qquad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

Si la surface S peut, par une déformation continue, arriver à se confondre avec S', et si dans cette déformation continue il n'arrive à aucun moment que la fonction $F = P + iQ$ devienne infinie ou discontinue en un point de la surface d'intégration, à ces conditions, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Considérons maintenant les *surfaces singulières*, c'est-à-dire l'ensemble des points où la fonction F devient infinie ou discontinue. Soient

$$\psi_1(x, y, z, t) = \psi_2(x, y, z, t) = 0$$

les équations de ces surfaces.

Remplaçons dans ψ_1 et ψ_2, x, y, z, t par φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4, les deux équations des surfaces singulières se réduiront à deux relations

$$f_1(\lambda, \mu, \nu) = f_2(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

entre λ, μ et ν. Ces deux équations définiront certaines courbes appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et que j'appellerai *courbes singulières*, parce qu'elles sont le lieu des points qui appartiennent à l'espace (λ, μ, ν) et où la fonction sous le signe $\int\int$ devient infinie ou discontinue.

Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent de la façon suivante :

Les deux portions de surface S et S′ étant limitées au même contour C diviseront l'espace (λ, μ, ν) en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure. Si dans cette région intérieure, il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S′.

Si la surface S est fermée, elle divisera l'espace (λ, μ, ν) en deux régions; si à l'intérieur de S il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera nulle.

Si la surface S′ appartenant comme S à l'espace (λ, μ, ν) est fermée comme S et tout entière intérieure à S, et si dans l'espace compris entre S et S′, il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S est égale à l'intégrale prise le long de S′.

Si deux surfaces S et S′, toutes deux fermées et appartenant toutes deux à l'espace (λ, μ, ν) contiennent à leur intérieur les mêmes courbes singulières et les mêmes portions de courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S′.

Il faut toutefois avoir soin de prendre les deux intégrales dans le même sens. Nous avons défini le sens d'intégration à l'aide de l'observateur O. Nous supposerons donc que cet observateur a la même position par rapport aux deux surfaces S et S′. S'il a la tête vers l'extérieur de la surface S, il devra avoir aussi la tête vers l'extérieur de la surface S′ et inversement.

Il peut arriver que deux surfaces fermées S et S′ tout en n'appartenant pas au même espace (λ, μ, ν) contiennent néanmoins à leur intérieur une même courbe singulière.

Soient en effet

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad t = f_2(x, y, z)$$

les équations d'une courbe singulière C.

Cette courbe C appartiendra à la fois à l'espace (λ, μ, ν) défini par les équations fondamentales

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu, \quad t = f_2(\lambda, \mu, \nu),$$

et à l'espace (λ', μ', ν') défini par les équations

$$x = \lambda', \quad y = \mu', \quad z = \nu', \quad t = f_1(\lambda', \mu', \nu') + f_2(\lambda', \mu', \nu').$$

Il pourra se faire alors qu'une surface fermée S appartenant à l'espace (λ, μ, ν) contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre; et qu'une autre surface fermée S′ appartenant à l'espace (λ', μ', ν') contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre.

L'intégrale prise le long de S est alors égale à l'intégrale prise le long de S′. Il faudrait toutefois, pour s'assurer que l'intégration a bien lieu dans le même sens, une discussion délicate que je réserverai pour le paragraphe suivant. Je me contenterai donc pour le moment de dire que les deux intégrales sont égales, ou égales et de signe contraire.

On peut résumer tout ce qui précède en disant que *l'intégrale prise le long d'une surface fermée S ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de cette surface.*

IV. — Résidus des fonctions rationnelles

Soit une fonction rationnelle

$$F(\xi, \eta).$$

Écrivons-la en mettant en évidence le numérateur et le dénominateur et en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles. Supposons pour fixer les idées que ce dénominateur admette deux semblables facteurs.

Soit donc

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta) R(\xi, \eta)},$$

P, Q et R étant trois polynomes entiers dont les deux derniers sont irréductibles.

Considérons un espace (λ, μ, ν) défini par les quatre équations

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et dans cet espace une surface fermée S.

Il s'agit de calculer l'intégrale double

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

prise le long de S, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur.

Cette intégrale dépend comme nous l'avons vu des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de la surface S.

Les courbes singulières de l'espace (λ, μ, ν) sont de deux sortes :

Les unes ont pour équations

$$Q[\varphi_1(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad \varphi_3(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_4(\lambda, \mu, \nu)] = 0,$$

les autres ont pour équations

$$R[\varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi_3 + i\varphi_4] = 0.$$

D'ailleurs, celles de ces courbes qui seront contenues tout entières à l'intérieur de la surface fermée S devront évidemment être des courbes fermées.

Supposons que la surface S contienne à son intérieur plusieurs courbes singulières fermées, par exemple deux que j'appellerai C et C'. Nous pourrons toujours construire dans l'espace (λ, μ, ν) deux surfaces fermées Σ et Σ' situées toutes deux à l'intérieur de S et contenant à leur intérieur, la première C et C seulement, la seconde C' et C' seulement; l'intégrale prise le long de S sera alors la somme de l'intégrale prise le long de Σ et de l'intégrale prise le long de Σ', l'observateur O qui définit le sens d'intégration demeurant toujours dirigé vers l'extérieur.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où la surface S ne contient à son intérieur qu'une seule courbe singulière C.

Toutes les surfaces S renfermant la courbe C conduiront à la même intégrale. Il n'est pas nécessaire pour cela que ces diverses surfaces S appartiennent au même espace (λ, μ, ν).

Construisons donc un espace (λ', μ', ν') particulier contenant la courbe C et, dans cet espace, une surface fermée Σ renfermant cette courbe. Nous choisirons cet espace et cette surface de telle sorte que l'intégration soit facile et l'intégrale cherchée, c'est-à-dire l'intégrale prise le long de S, sera égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ.

Nous pourrons toujours mettre les équations de la courbe C sous la forme

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega); \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega),$$

les ψ étant des fonctions périodiques du paramètre ω, puisque cette courbe est fermée. Nous supposerons que la période est égale à 2π.

Cela posé nous introduirons deux autres paramètres ρ et φ et nous écrirons

$$\lambda' = \cos\omega(1 + \rho\cos\varphi), \qquad \mu' = \sin\omega(1 + \rho\cos\varphi), \qquad \nu' = \rho\sin\varphi,$$
$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega) + \rho\cos\varphi,$$
$$t = \psi_4(\omega) + \rho\sin\varphi.$$

Ainsi x, y, z et t sont définis en fonctions de ω, ρ et φ et par conséquent en fonctions de λ', μ', ν'. Mais il faut faire ici une remarque :

x, y, z et t sont des fonctions uniformes de ω, ρ et φ, mais non de λ', μ', ν'. Toutefois si l'on convient que ρ devra toujours être compris entre 0 et 1, à un système de valeurs λ', μ', ν', correspondra un seul système de valeurs de ρ, $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et un seul système de valeurs de x, y, z, t; grâce à cette restriction x, y, z et t deviennent donc des fonctions uniformes de λ', μ', ν'.

A un point de l'espace (λ', μ', ν') satisfaisant à la condition $\rho < 1$, c'est-à-dire situé à l'intérieur d'un certain tore, correspond donc un point et un seul de l'hyperespace.

Dans ce mode de représentation, la courbe C est représentée par le cercle $(\rho = 0)$

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \qquad \nu' = 0.$$

Nous prendrons pour la surface Σ le tore dont l'équation est

$$\rho = \rho_0, \qquad 0 < \rho_0 < 1.$$

Ce tore enveloppe manifestement la courbe C. Nous allons voir que le calcul de l'intégrale

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

le long de cette surface Σ est particulièrement simple.

Décomposons en effet l'intégration en deux parties; intégrons d'abord par rapport à η, en regardant ξ comme un paramètre arbitraire. Nous avons :

$$z = \psi_3(\omega) + \rho_0\cos\varphi, \qquad t = \psi_4(\omega) + \rho_0\sin\varphi.$$

Si ξ est regardé un instant comme une constante, ω sera aussi une constante; il en est de même de ρ_0, φ étant la seule variable. On a alors :

$$\eta = \psi_3 + i\psi_4 + \rho_0 e^{i\varphi},$$

ce qui montre que le point η décrit dans le plan des η un cercle de rayon ρ_0

ayant pour centre le point $\psi_3 + i\psi_4$. L'intégrale simple

$$I = \int F(\xi, \eta)\, d\eta$$

est alors égale à $2i\pi$ multipliée par le résidu de la fonction $F(\xi, \eta)$ (regardée comme fonction de η seulement) par rapport au point $\psi_3 + i\psi_4$.

Imaginons pour fixer les idées que le long de la courbe C ce soit le premier facteur $Q(\xi, \eta)$ du dénominateur qui s'annule, de telle sorte que

$$Q(\psi_1 + i\psi_2, \psi_3 + i\psi_4) = 0.$$

Le résidu en question est alors facile à calculer et l'on trouve pour l'intégrale simple :

$$I = \frac{2i\pi P(\xi, \eta)}{\frac{dQ}{d\eta} R(\xi, \eta)}$$

où

$$\xi = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega), \qquad \eta = \psi_3(\omega) + i\psi_4(\omega)$$

et où par conséquent

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à ξ en faisant varier ω de 0 à 2π, c'est-à-dire en suivant toute la courbe C. On est donc ramené à chercher l'intégrale simple

$$J = \int \frac{2i\pi P\, d\xi}{R \frac{dQ}{d\eta}}$$

le long de la courbe C, η étant supposé lié à ξ par la relation algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Cette intégrale est donc une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $Q = 0$.

Il suffit d'un peu d'attention pour vérifier que si l'on veut obtenir l'intégrale le long de Σ, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur, il faut, en prenant l'intégrale J, suivre la courbe C dans le sens des ω croissants.

L'intégrale prise le long de S sera donc aussi égale à J ou à $-J$; car elle est égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ. Il reste à déterminer le signe.

Imaginons que l'on fasse varier d'une manière continue les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et qu'en même temps on fasse varier également d'une manière continue la surface S, mais de telle sorte que la courbe C reste toujours dans l'espace (λ, μ, ν) et à l'intérieur de S.

L'intégrale ne variera pas, tant que la surface S ne contiendra pas d'autre courbe singulière que C.

Cela posé envisageons les douze dérivées partielles de x, y, z, t par rapport à λ, μ, ν :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{d\varphi_2}{d\lambda}, \qquad \dots$$

et d'autre part les quatre dérivées de x, y, z, t par rapport à ω, en supposant que le point x, y, z, t décrive la courbe C :

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{d\psi_1}{d\omega}, \qquad \frac{dy}{d\omega} = \frac{d\psi_2}{d\omega}, \qquad \dots$$

Envisageons ensuite le déterminant

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\lambda} & \dfrac{dx}{d\mu} & \dfrac{dx}{d\nu} \\ \dfrac{dx}{d\omega} & \dfrac{dy}{d\lambda} & \dfrac{dy}{d\mu} & \dfrac{dy}{d\nu} \\ -\dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\lambda} & \dfrac{dz}{d\mu} & \dfrac{dz}{d\nu} \\ \dfrac{dz}{d\omega} & \dfrac{dt}{d\lambda} & \dfrac{dt}{d\mu} & \dfrac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Je dis que si Δ s'annule en un point quelconque de C, il y aura à l'intérieur de S une autre courbe singulière que C (en négligeant certains cas exceptionnels qu'il serait d'ailleurs inutile d'envisager ici)

$$Q(\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4) = 0.$$

Pour qu'une courbe gauche possède un point double, il suffit en général que le calcul des cosinus directeurs de la tangente conduise à une indétermination. Cherchons donc à déterminer la tangente à C; l'équation des courbes singulières

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

peut se résoudre par rapport à η, d'où :

$$\eta = f(\xi),$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A + Bi,$$

A et B étant les parties réelle et imaginaire de la dérivée de $f(\xi)$.

Cela donne :

$$(1)\qquad \begin{cases} dz = A\,dx - B\,dy, \\ dt = B\,dx + A\,dy. \end{cases}$$

Nous devons chercher la tangente à C et pour cela, il faut déterminer les rapports des quatre différentielles dx, dy, dz, dt. Pour cela nous avons l'équation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} dx & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ dy & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ dz & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ dt & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0$$

qui jointe aux équations (1) suffit en général pour déterminer dx, dy, dz, dt. Mais comme dx, dy, dz, dt sont des différentielles se rapportant à C, elles doivent être proportionnelles à

$$\frac{dx}{d\omega},\quad \frac{dy}{d\omega},\quad \frac{dz}{d\omega},\quad \frac{dt}{d\omega}$$

de sorte qu'on a toujours :

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

On a toujours d'ailleurs :

$$\frac{dz}{d\omega} = A\frac{dx}{d\omega} - B\frac{dy}{d\omega},$$

$$\frac{dt}{d\omega} = A\frac{dy}{d\omega} + B\frac{dx}{d\omega},$$

ce qui montre que les différentielles

$$-dx = \varepsilon\frac{dy}{d\omega},\qquad dy = \varepsilon\frac{dx}{d\omega},\qquad -dz = \varepsilon\frac{dt}{d\omega},\qquad dt = \varepsilon\frac{dz}{d\omega}$$

(où ε est une quantité infiniment petite quelconque) satisfont toujours aux équations (1).

Si de plus on a $\Delta = 0$, elles satisferont également à l'équation (2). Mais alors ces équations (1) et (2) ne suffiront plus pour déterminer les quatre différentielles. La courbe C aura donc un point double.

Donc si en un point de la courbe C, Δ s'annule, ce point est un point double; ou bien encore nous pouvons dire que la surface S contient outre la courbe C une autre courbe singulière qui vient couper C. Une discussion plus approfondie montrerait qu'il y a des cas d'exception, mais que ces cas ne se présenteront pas si Δ s'annule en changeant de signe.

En conséquence, si la surface S ne contient pas d'autre courbe singulière que C, le déterminant Δ conservera le même signe tout le long de C. Imaginons maintenant que l'on fasse varier S et l'espace (λ, μ, ν) d'une façon continue comme nous l'avons dit plus haut. Tant que Δ ne changera pas de signe, l'intégrale ne variera pas.

Donc le signe de l'intégrale dépend du signe de Δ.

Voyons quel est ce signe pour l'intégrale prise le long de Σ.

On a alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\rho} & \dfrac{dx}{d\varphi} \\ \dfrac{dx}{d\omega} & \dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dy}{d\rho} & \dfrac{dy}{d\varphi} \\ -\dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\rho} & \dfrac{dz}{d\varphi} \\ \dfrac{dz}{d\omega} & \dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dt}{d\rho} & \dfrac{dt}{d\varphi} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)}}.$$

Il vient ensuite

$$\frac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)} = -\rho(1 + \rho\cos\varphi) < 0;$$

Δ est donc de même signe que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\omega} & -\dfrac{dy}{d\omega} & 0 & 0 \\ \dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\omega} & 0 & 0 \\ \dfrac{dz}{d\omega} & -\dfrac{dt}{d\omega} & \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\omega} & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire positif.

En résumé :

L'intégrale double prise le long de S est égale à l'intégrale simple abélienne

$$J = \int \frac{2i\pi}{R} \frac{P\,d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}$$

prise le long de la courbe C, et l'on doit parcourir cette courbe dans le sens des ω croissants si Δ est positif et des ω décroissants si Δ est négatif.

Ainsi *les périodes de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne

$$J = \int \frac{2i\pi}{R} \frac{P\,d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $Q = 0$ *et aussi que celles de l'intégrale simple abélienne*

$$J' = \int \frac{2i\pi}{Q} \frac{P\,d\xi}{\frac{dR}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $R = 0$.

Nous savons qu'une intégrale abélienne possède deux sortes de périodes, les périodes cycliques et les périodes polaires. Les intégrales de première et de deuxième espèce ne présentent que des périodes cycliques.

Étudions d'abord les périodes cycliques. Si la courbe $Q = 0$ est de genre q, l'intégrale J admettra $2q$ périodes cycliques. Si la courbe $R = 0$ est de genre r, l'intégrale J' admettra $2r$ périodes cycliques. L'intégrale double aura donc en tout $2q + 2r$ périodes cycliques.

Quelle est la condition pour que cette intégrale n'ait que des périodes cycliques. Il faut que les intégrales J et J' soient de première ou de deuxième espèce. Pour cela il faut et il suffit que la courbe $P = 0$ passe par tous les points doubles des deux courbes $R = 0$, $Q = 0$, ainsi que par les points d'intersection de ces deux courbes, à l'exception toutefois des points où ces deux courbes se touchent.

Passons maintenant aux périodes polaires. Les pôles de l'intégrale J sont les

points d'intersection des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = 0$$

et les points doubles de la courbe $Q = 0$.

Pour les premiers, le résidu est facile à calculer. On trouve que la période est égale à

$$-4\pi^2 \frac{P}{\dfrac{dQ}{d\eta}\dfrac{dR}{d\xi} - \dfrac{dQ}{d\xi}\dfrac{dR}{d\eta}}$$

où ξ, η sont remplacés par les coordonnées du point d'intersection considéré.

Si l'on considère ce même point d'intersection comme un pôle de l'intégrale J', on est conduit au même résultat, au signe près.

Pour les points doubles de $Q = 0$, on trouve :

$$-4\pi^2 \frac{P}{R\sqrt{\left(\dfrac{d^2 Q}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2 Q}{d\xi^2}\dfrac{d^2 Q}{d\eta^2}}}$$

où ξ et η sont remplacés par les coordonnées du point double.

En envisageant l'intégrale J' et les points doubles de $R = 0$, on serait conduit à des périodes de la forme

$$-4\pi^2 \frac{P}{Q\sqrt{\left(\dfrac{d^2 R}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2 R}{d\xi^2}\dfrac{d^2 R}{d\eta^2}}}.$$

En résumé si les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ sont respectivement d'ordre m et n avec h et k points doubles, on aura :

$$q = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h, \qquad r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k$$

et l'intégrale double admettra les périodes suivantes :

1° les

$$2q + 2r = (m-1)(m-2) + (n-1)(n-2) - 2(h+k)$$

périodes cycliques;

2° les mn périodes relatives aux mn points d'intersection des deux courbes;

3° les h périodes relatives aux h points doubles de $Q = 0$;

4° les k périodes relatives aux k points doubles de $R = 0$.

Il y aura donc en tout

$$m^2 + mn + n^2 - 3(m+n) + 4 - h - k$$

périodes.

Si l'on considère les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ comme n'en formant qu'une seule qui a pour équation

$$QR = 0,$$

elle sera de degré $p = m + n$ et aura

$$d = mn + h + k$$

points doubles.

Le nombre des périodes auquel on est conduit est alors

$$p^2 - 3p + 4 - d.$$

Si l'on avait eu au dénominateur un polynome indécomposable Q, que ce polynome eût été de degré p et que la courbe

$$Q = 0$$

eût eu d points doubles, on aurait trouvé pour le nombre des périodes, en appliquant les formules précédentes,

$$p^2 - 3p + 2 - d.$$

Voici donc ce que nous pourrons dire en général :

Soient p le degré du dénominateur, ν le nombre de ses facteurs irréductibles, d le nombre des points doubles, le nombre des périodes sera :

$$p^2 - 3p + 2\nu - d.$$

Ce nombre peut se réduire dans certains cas particuliers.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que du cas où tous les facteurs du dénominateur sont distincts. Il nous reste à examiner ceux où deux ou plusieurs de ces facteurs se confondent, ce qui arrivera par exemple si le dénominateur est un carré parfait.

Il faudrait donc étudier les périodes de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^\alpha R^\beta S^\gamma}$$

où Q, R et S sont des polynomes entiers irréductibles, et où α, β, γ sont des exposants entiers.

Il nous suffira, pour faire comprendre la marche à suivre, de considérer le cas particulier de l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}.$$

Les courbes singulières ont alors pour équations

$$Q = 0.$$

Pour calculer l'intégrale, il faut employer le procédé de la différentiation sous le signe $\int\int$.

Considérons l'intégrale double [prise le long de S]

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q-\alpha}.$$

Nous avons vu qu'elle est égale à l'intégrale simple abélienne, prise le long de C,

$$J = 2i\pi \int \frac{P\,d\xi}{\dfrac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique

$$Q = \alpha.$$

C'est une fonction de α dont la dérivée par rapport à α est égale à

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(Q-\alpha)^2}.$$

Différentions de même l'intégrale simple J par rapport à α; nous trouvons :

$$\frac{d}{d\alpha}\left|\frac{P}{\dfrac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\dfrac{dQ}{d\eta}}\right|\frac{d\eta}{d\alpha}.$$

On a

$$\frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\dfrac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{\dfrac{dP}{d\eta}\dfrac{dQ}{d\eta} - P\dfrac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\dfrac{dQ}{d\eta}\right)^2}.$$

De plus η nous est donné en fonction de ξ et de α par l'égalité

$$Q = \alpha.$$

En la différentiant par rapport à α on trouve

$$\frac{dQ}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} = 1.$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 2i\pi \int \frac{\dfrac{dP}{d\eta}\dfrac{dQ}{d\eta} - P\dfrac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\dfrac{dQ}{d\eta}\right)^3}\,d\xi.$$

D'où l'on conclut que *les périodes de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne

$$2\pi i \int \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2 Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3} d\xi$$

relatives à la courbe algébrique $Q = 0$.

Un cas particulier intéressant est celui des *périodes polaires*. Soit, par exemple, à calculer celle des périodes polaires de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\, d\xi\, d\eta}{RQ}$$

qui se rapporte au point d'intersection

$$\xi = a, \qquad \eta = b$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = 0.$$

On pourrait faire le calcul à l'aide de la formule précédente, mais il est plus simple d'opérer comme il suit :

Considérons les périodes polaires de l'intégrale

$$\int\int \frac{P\, d\xi\, d\eta}{R(Q-\alpha)}$$

et en particulier celle qui se rapporte au point d'intersection

$$\xi = a', \qquad \eta = b'$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = \alpha.$$

Je suppose, bien entendu, que a' et b' se réduisent à a et b quand α s'annule. Cette période est égale à

$$-4\pi^2 \frac{P(a', b')}{\Delta(a', b')},$$

Δ désignant le déterminant fonctionnel de R et de Q.

Nous n'avons plus qu'à différentier cette expression par rapport à α.

Appelons φ la fonction

$$-4\pi^2 \frac{P}{\Delta}.$$

Appelons $D(\xi, \eta)$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}.$$

Nous trouverons que la période de l'intégrale double

$$\int\int \frac{\mathrm{P}\, d\xi\, d\eta}{\mathrm{RQ}^2}$$

est égale à

$$= \frac{\mathrm{D}(a, b)}{\Delta(a, b)}.$$

On voit aisément comment on opérerait si l'exposant de Q était plus grand que 2.

En particulier, l'intégrale double

$$\int\int \frac{\mathrm{P}\, d\xi\, d\eta}{(\xi - a)^n (\eta - b)^p}$$

n'a qu'une seule période qui a pour expression

$$\frac{4\pi^2 \mathrm{P}'(a, b)}{(n-1)!\,(p-1)!}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{P}'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2}\mathrm{P}}{d^{n-1}\xi\, d^{p-1}\eta}.$$

De même l'intégrale

$$\int\int \frac{\mathrm{P}\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^n (\gamma\xi + \delta\eta)^p}$$

a une seule période dont l'expression est

$$\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^{n+p}(n-1)!\,(p-1)!}{4\pi^2 \mathrm{P}'(0, 0)}.$$

Pour définir ici la fonction $\mathrm{P}'(\xi, \eta)$ qui n'a plus la même signification que plus haut, nous supposerons qu'on ait changé de variables en faisant

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta,$$
$$\eta' = \gamma\xi + \delta\eta$$

et nous poserons

$$\mathrm{P}'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2}\mathrm{P}}{d^{n-1}\xi'\, d^{p-1}\eta'}.$$

V. — Méthode de M. Stieltjes.

M. Stieltjes a découvert il y a quelques années une remarquable généralisation de la série de Lagrange. Considérant l'intégrale double

$$\int\int \frac{\mathrm{P}\, d\xi\, d\eta}{\mathrm{QR}}$$

qui a fait l'objet du paragraphe précédent, et l'intégrant le long d'une surface

particulière, il découvrait l'une de ses périodes, qui a pour expression

$$(1)\qquad \frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{dQ}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}},$$

ξ et η étant remplacées par les coordonnées d'un des points d'intersection des deux courbes

$$Q = 0, \qquad R = 0.$$

On n'a plus qu'à faire dans cette formule

$$(2)\qquad \begin{cases} Q = \xi - hf(\xi, \eta), \\ R = \eta - k\varphi(\xi, \eta), \end{cases}$$

$$P = F(\xi, \eta)\left[1 - h\frac{df}{d\xi} - k\frac{d\varphi}{d\eta} + hk\left(\frac{df}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{df}{d\eta}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\right]$$

(h et k étant deux quantités très petites; f, φ et F trois polynomes quelconques en ξ, η) pour retomber sur une généralisation de la formule de Lagrange.

M. Stieltjes ne publia pas toutefois sa découverte et se borna à la communiquer à quelques amis; mais de graves objections lui furent faites et le déterminèrent à ne pas publier ses résultats.

Était-il certain que la fonction sous le signe $\int\int$ ne devenait pas infinie en quelques points de la surface d'intégration?

Comment se faisait-il, puisque rien ne distingue Q de R, qu'on changeât le signe de l'expression (1) en permutant Q et R?

La discussion du paragraphe précédent nous met aujourd'hui en mesure de répondre à toutes ces objections.

Commençons par introduire les quatre relations fondamentales qui définissent l'espace (λ, μ, ν); nous écrirons :

$$x = \frac{\rho(k^2-1)}{k^2+1}, \qquad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2+1}, \qquad z = \frac{2\mu\rho}{k^2+1}, \qquad t = \frac{2\nu\rho}{k^2+1};$$

où l'on a posé pour abréger

$$k^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Les deux équations

$$\xi = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta = 0$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) le cercle

$$(3)\qquad \lambda = 0, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et l'axe des λ

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Si h et k sont assez petits, les deux équations

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad R = 0$$

ou ce qui revient au même

$$\xi = hf \quad \text{et} \quad \eta = k\varphi$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) une courbe fermée très peu différente du cercle (3), et une autre courbe fermée se rapprochant beaucoup de l'axe des λ dans tous les points situés à distance finie.

Il importe de remarquer que ces deux courbes sont *entrelacées* l'une dans l'autre. Je veux dire par là qu'il serait impossible de construire une portion de surface simplement connexe limitée à l'une des deux courbes fermées et qui ne coupe pas l'autre courbe fermée.

La surface d'intégration considérée par M. Stieltjes est définie comme il suit : on fait décrire à ξ, dans son plan, un cercle ayant pour centre l'origine, pendant que η décrit de son côté dans son plan un autre cercle ayant aussi pour centre l'origine.

Les équations de la surface d'intégration sont donc

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2, \qquad z^2 + t^2 = \rho_2^2.$$

Si nous revenons à notre mode de représentation, il faut que nous supposions

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2.$$

La surface d'intégration sera alors représentée dans l'espace (λ, μ, ν) par la surface

$$(\lambda^2 + 1)^2 \rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Cette surface est un tore; le cercle

$$\xi = 0$$

et par conséquent, si h est très petit, la courbe fermée

$$\xi = hf$$

se trouvent entièrement à l'intérieur de ce tore.

Au contraire l'axe des λ

$$\eta = 0$$

et par conséquent, si k est très petit, la courbe fermée

$$\eta = k\varphi$$

se trouvent entièrement à l'extérieur de ce tore.

On voit tout de suite que la première objection faite à M. Stieltjes est levée, puisque le tore ne coupe en aucun point les courbes singulières.

Nous définirons le sens d'intégration comme nous l'avons fait jusqu'ici, par un observateur placé sur le tore; je supposerai par exemple que cet observateur est dirigé vers l'extérieur.

La seule courbe singulière située à l'intérieur de la surface d'intégration est la courbe

$$\xi = hf.$$

L'intégrale cherchée se ramène donc à une intégrale abélienne simple relative à cette courbe. Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître, en appliquant les règles du paragraphe précédent, que cette période est une période polaire et qu'elle est égale à

$$\frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{dQ}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}}.$$

Il nous est facile de voir maintenant comment tombe d'elle-même la seconde objection qui avait été opposée à M. Stieltjes. Il n'est pas vrai que rien ne distingue Q de R. La courbe $Q = 0$ ou $\xi = hf$ est à l'intérieur du tore qui nous sert de surface d'intégration; la courbe $R = 0$ ou $\eta = k\varphi$ est au contraire à l'extérieur. Si donc nous considérons l'observateur qui définit le sens de l'intégration, nous verrons qu'il est dirigé vers l'extérieur du tore, c'est-à-dire du même côté que la courbe $R = 0$, et du côté opposé à la courbe $Q = 0$. Ces deux courbes jouent donc des rôles différents.

La seconde partie de l'analyse de M. Stieltjes ne soulevait pas d'objection analogue à celles que nous venons de discuter. Néanmoins comme elle n'a pas encore été publiée et qu'elle est fort courte, je vais l'exposer ici en quelques mots.

Si nous donnons à P, Q et R leurs valeurs (2), il est aisé de voir que notre intégrale sera égale à

$$4\pi^2 F(\xi_0, \eta_0),$$

ξ_0 et η_0 étant les valeurs de ξ et de η très voisines de 0 qui satisfont aux deux équations

$$\xi = hf, \qquad \eta = k\varphi.$$

D'autre part si h et k sont assez petits pour qu'on ait en tous les points de notre tore

$$\left|\frac{hf}{\xi}\right| < 1, \qquad \left|\frac{k\varphi}{\eta}\right| < 1.$$

l'intégrale pourra se développer en série comme il suit :

$$\sum h^n k^p \int\int \frac{\mathrm{F} f^n \varphi^p \, d\xi \, d\eta}{\xi^{n+1} \eta^{p+1}} - \sum h^n k^p \int\int \frac{\mathrm{F} \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p \, d\xi \, d\eta}{\xi^n \eta^{p+1}}$$
$$- \sum h^n k^p \int\int \frac{\mathrm{F} \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1} \, d\xi \, d\eta}{\xi^{n+1} \eta^p} + \sum h^n k^p \int\int \frac{\mathrm{F} \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1} \, d\xi \, d\eta}{\xi^n \eta^p}.$$

Ce qui donne, d'après les principes du paragraphe précédent,

$$\mathrm{F}(\xi_0, \eta_0) = \sum h^n k^p \left\{ \frac{\mathrm{D}_{n,p}(\mathrm{F} f^n \varphi^p)}{n!\,p!} - \frac{\mathrm{D}_{n-1,p}\left(\mathrm{F} \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p\right)}{(n-1)!\,p!} - \frac{\mathrm{D}_{n,p-1}\left(\mathrm{F} \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1}\right)}{n!\,(p-1)!} \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{D}_{n-1,p-1}\left(\mathrm{F} \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1}\right)}{(n-1)!\,(p-1)!} \right\}.$$

Dans le second membre, ξ et η sont supposés remplacés par o et o. Quant à la notation $\mathrm{D}_{n,p}$, on a écrit pour abréger

$$\mathrm{D}_{n,p}(u) = \frac{d^{n+p} u}{d\xi^n \, d\eta^p}.$$

En réduisant, il reste pour la partie entre crochets

$$\frac{1}{n!\,p!} \left\{ \mathrm{D}_{n,p}(\mathrm{F} f^n \varphi^p) - \mathrm{D}_{n-1,p}\left(\mathrm{F} \frac{df^n}{d\xi} \varphi^p\right) - \mathrm{D}_{n,p-1}\left(\mathrm{F} f^n \frac{d\varphi^p}{d\eta}\right) + \mathrm{D}_{n-1,p-1}\left(\mathrm{F} \frac{\partial(f^n, \varphi^p)}{\partial(\xi, \eta)}\right) \right\}$$

ou bien

$$\frac{1}{n!\,p!} \mathrm{D}_{n-1,p-1} \left[\mathrm{D}_{1,1}(\mathrm{F} f^n \varphi^p) - \mathrm{D}_{0,1}\left(\mathrm{F} \frac{df^n}{d\xi} \varphi^p\right) - \mathrm{D}_{1,0}\left(\mathrm{F} f^n \frac{d\varphi^p}{d\eta}\right) + \mathrm{F} \frac{\partial(f^n, \varphi^p)}{\partial(\xi, \eta)} \right]$$

ou enfin en réduisant encore

$$\frac{1}{n!\,p!} \mathrm{D}_{n-1,p-1} \left[\frac{d^2 \mathrm{F}}{d\xi \, d\eta} f^n \varphi^p + \frac{d\mathrm{F}}{d\xi} \frac{d(f^n)}{d\eta} \varphi^p + \frac{d\mathrm{F}}{d\eta} \frac{d(\varphi^p)}{d\xi} f^n \right].$$

On est ainsi conduit à une généralisation de la formule de Lagrange.

VI. — Seconde application.

Il n'est pas douteux qu'on ne puisse tirer des principes qui précèdent une foule d'applications différentes. Je me bornerai à exposer ici la suivante.

Il est aisé de démontrer qu'*une fonction entière d'une variable, dont le module reste inférieur à une quantité donnée, se réduit à une constante.*

Ce résultat s'étend immédiatement aux fonctions de deux variables. On peut d'ailleurs l'énoncer comme il suit :

Une fonction entière de deux variables ξ et η qui tend vers une limite finie et déterminée quand ξ et η tendent vers l'infini, et quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, se réduit à une constante.

La théorie actuelle nous permet de faire un pas de plus.

Il n'est pas nécessaire, pour que la fonction se réduise à une constante, qu'elle tende vers une limite finie et déterminée quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini.

Supposons, pour préciser davantage, que l'on pose

$$\xi = (\alpha + i\beta)\rho, \qquad \eta = (\gamma + i\delta)\rho$$

avec la condition

(1) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Faisons ensuite croître ρ indéfiniment, α, β, γ, δ restant constants.

Les théories anciennes nous permettent d'affirmer ce qui suit :

Si, quels que soient α, β, γ, δ, la fonction entière, $F(\xi, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée, cette fonction est une constante. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que cette limite soit la même pour toutes les valeurs des quatre quantités α, β, γ, δ ; il suffit qu'elle soit toujours finie.

Grâce à la théorie actuelle, nous pouvons affirmer quelque chose de plus. La fonction entière F sera une constante, non seulement pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs possibles de α, β, γ, δ, mais encore pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs de α, β, γ, δ qui satisfont non seulement à la relation (1), mais à une autre relation convenablement choisie.

Reprenons les quatre relations fondamentales du paragraphe précédent :

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \qquad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \qquad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1},$$

Nous avons vu que les équations

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = 0$$

étaient respectivement représentées dans l'espace (λ, μ, ν) par le cercle

$$\lambda = 0, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et par la droite

$$\mu = \nu = 0.$$

Nous avons vu en outre que l'équation

$$\text{mod}^2\,\eta_1 = \rho_2^2$$

était représentée par le tore

$$(\lambda^2 + 1)^2 \rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Ces tores sont de révolution autour de l'axe des λ et l'on peut les définir géométriquement en disant qu'ils sont le lieu des points M tels que le rapport de la plus grande et de la plus petite distance de M au cercle $\xi = 0$ soit constant.

Venons maintenant à l'équation

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0,$$

où α et β sont des coefficients imaginaires quelconques. Elle représentera aussi un cercle. De plus ce cercle devra se trouver tout entier sur le tore

$$|\eta_1|^2 = \frac{|\alpha|^2 \rho^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}.$$

Ce ne peut d'ailleurs être ni un des cercles méridiens qui ont pour équation

$$\eta_1 = \text{const.},$$

ni un des cercles parallèles qui ont pour équation

$$\xi = \text{const.}$$

Mais on sait que si l'on coupe le tore par un plan bitangent, l'intersection se décompose en deux cercles. Le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0$$

sera donc l'un de ces deux cercles.

Si les axes sont placés comme ils le sont d'ordinaire, ce sera celui des deux cercles qui est situé à gauche d'un observateur placé suivant l'axe des λ et regardant la partie des deux cercles qui est dirigée vers sa tête.

En faisant varier les deux coefficients α et β on obtiendra donc une famille de cercles que j'appellerai les cercles C.

Ces cercles seront toujours réels et leur rayon ne pourra s'annuler.

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que deux quelconques des cercles C sont entrelacés, dans le sens donné à ce mot au paragraphe précédent.

En effet les cercles

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0, \qquad \gamma\xi + \delta\eta_1 = 0$$

sont évidemment entrelacés si

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

Faisons ensuite varier d'une manière continue les quatre coefficients α, β, γ, δ et voyons si les deux cercles peuvent cesser d'être entrelacés. Ils ne pourraient cesser de l'être que s'ils arrivaient d'abord à se couper. Or s'ils se coupaient, on aurait un point d'intersection :

$$\xi = \eta = 0,$$

ce qui est impossible, puisque les formules (2) conduisent à la relation

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2.$$

Pour faire compendre l'importance de cet entrelacement, considérons l'équation plus générale

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma,$$

Cette équation représentera encore une famille de cercles, les cercles C', dont les cercles C ne sont que des cas particuliers.

Deux cercles C'

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma,$$
$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$$

peuvent être ou n'être pas entrelacés. Ils le seront si

$$(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 < \rho^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.$$

Ils ne le seront pas dans le cas contraire.

L'intégrale double

$$\int\int \frac{F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta - \gamma)(\alpha'\xi + \beta'\eta - \gamma')},$$

prise le long d'une surface qui enveloppe le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

en laissant en dehors le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'.$$

sera égale tantôt à o, tantôt à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} F(\xi_0, \eta_0).$$

où ξ_0 et η_0 satisfont aux équations simultanées

$$\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 = \gamma, \quad \alpha'\xi_0 + \beta'\eta_0 = \gamma'.$$

Elle sera égale à o si les deux cercles ne sont pas entrelacés et à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

s'ils sont entrelacés.

Dans le cas des cercles C, comme il y a toujours entrelacement, on aura :

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha'\xi + \beta'\eta)} = \frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} F(0, 0).$$

De même l'intégrale :

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m(\alpha'\xi + \beta'\eta)^p}$$

s'exprimera très simplement à l'aide des dérivées d'ordre $m+p$ de F, ou plutôt des valeurs de ces dérivées pour $\xi = \eta = 0$. L'expression sera linéaire et les coefficients dépendront de α, β, α', β'. (*Voir* la fin du paragraphe IV.)

Cela posé, voyons comment chaque point de l'espace (λ, μ, ν) représente une manière pour ξ et η de tendre vers l'infini.

Imaginons que λ, μ, ν conservant la même valeur, ρ croisse indéfiniment. x, y, z et t croîtront indéfiniment et de façon que leurs rapports demeurent constants. Lors donc que x, y, z, t croissent au delà de toute limite, mais de telle façon que leurs rapports tendent vers des limites finies et déterminées, cette manière de tendre vers l'infini sera représentée par un point de l'espace (λ, μ, ν).

Une surface S appartenant à cet espace représentera donc un ensemble de manières de tendre vers l'infini.

Imaginons qu'une surface S soit telle que le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

soit tout entier à son intérieur et le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = 0$$

tout entier à l'extérieur.

Supposons que, quand ξ et η tendent vers l'infini de l'une des manières représentées par les divers points de cette surface S, la fonction entière F tende vers une limite finie et déterminée.

A cette condition, F se réduira à une constante. En effet l'intégrale

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m(\alpha'\xi + \beta'\eta)^p},$$

prise le long de S, tendra vers o quand ρ croîtra indéfiniment (à moins que $m = p = 1$). Elle est donc nulle.

Donc toutes les dérivées de F s'annulent pour $\xi = \eta = 0$.

Donc F est une constante.

En résumé, si l'on sait démontrer que F tend vers une limite finie quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, F est une constante ; voilà ce qu'on savait déjà.

Supposons maintenant qu'on sache démontrer seulement que F tend vers une limite finie quand ξ et η tendent vers l'infini d'une certaine manière. L'espace (λ, μ, ν), dont les points représentent les différentes façons de tendre vers l'infini, sera alors partagé en diverses régions. Pour les unes, on saura démontrer que F tend vers une limite finie ; pour les autres on ne saura rien.

Si par exemple il y a une région de l'espace qui contienne l'un des cercles C tout entier et en tous les points de laquelle la limite F soit finie, on sera certain que F est une constante.

Ou bien encore supposons que l'espace se divise en trois régions R_1, R_2 et R_3, de telle façon que l'on ne puisse passer de R_1 à R_3 sans traverser R_2. Imaginons que R_1 contienne un des cercles C tout entier; que R_3 contienne un autre cercle C tout entier et qu'en tous les points de R_2 la limite de F soit finie. Nous serons encore certains dans ce cas que F est une constante.

VII. — Périodes variables.

J'arrive à un autre ordre de considérations où l'on verra la principale différence qui éloigne la théorie actuelle de celle des intégrales simples.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction sous le signe $\int\int$ ne devenait infinie en aucun des points de la surface d'intégration.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire comme elle l'était dans le cas des intégrales simples. Il arrive en effet, comme nous allons le voir, que l'intégrale reste finie bien que la fonction sous le signe $\int\int$ devienne infinie.

Soit S la surface d'intégration appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et dans ce même espace, une courbe singulière C en tous les points de laquelle la fonction $F(\xi, \eta)$ devienne infinie. Supposons que cette courbe C coupe la surface S de telle sorte que l'une des portions de C soit à l'intérieur de S et l'autre à l'extérieur.

Prenons maintenant l'intégrale :

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

le long de la surface S. La fonction F sera infinie aux points où C coupe S, mais en général elle sera infinie de premier ordre seulement. L'intégrale restera alors finie.

Nous savons en effet qu'une intégrale multiple d'ordre n reste finie quand la fonction sous les n signes $\int$ devient infinie en un point isolé, pourvu toutefois qu'elle soit infinie d'ordre inférieur à n.

Pour évaluer cette intégrale double, on peut opérer absolument de la même façon que dans le paragraphe IV. Posons alors

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}.$$

Nous supposerons que P ne devient pas infini à l'intérieur de S, et que Q ne devient infini que le long de la courbe C. Cela suppose que S ne contient pas d'autre courbe singulière que C ; mais cette hypothèse est toujours permise, car s'il en était autrement, on remplacerait la surface S par plusieurs autres ne contenant chacune qu'une courbe singulière.

L'intégrale double sera égale alors à l'intégrale simple

$$\int \frac{2i\pi P\, d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}.$$

Cette intégrale, au lieu d'être prise tout le long de C, sera prise seulement le long d'une partie de cette courbe, puisqu'une partie seulement de cette courbe est intérieure à S.

Si P est rationnel et si Q est un polynome entier, cette intégrale simple est encore une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Mais ce n'est plus une période de cette intégrale, c'est une intégrale prise entre deux points quelconques de la courbe $Q = 0$.

Quant au sens dans lequel on doit suivre la courbe C, on le déterminerait par la règle du paragraphe IV.

Nous pouvons donner aux intégrales doubles de cette forme le nom de périodes, puisqu'elles sont prises le long de surfaces fermées. Mais elles diffèrent beaucoup des périodes que nous avons envisagées jusqu'ici.

Si, en effet, nous déformons d'une façon continue la surface d'intégration S, l'arc de C qui sera à l'intérieur de S variera aussi d'une façon continue. Il en sera donc de même de la période.

Ces périodes ne sont donc pas des constantes. Ce sont des *périodes variables*. Il importe d'ailleurs de ne pas les confondre avec les intégrales auxquelles M. Picard avait donné ce nom dans ses Notes du 29 janvier 1883 et du 1er février 1886.

Je rappelle que dans l'introduction nous sommes convenus de ne pas le leur conserver afin d'éviter toute confusion.

VIII. — Applications aux fonctions Θ.

Je vais reprendre les notations dont j'ai fait usage dans mon Mémoire *sur les fonctions abéliennes* (*American Journal of Mathematics*, vol. VIII, n° 4).

J'envisagerai une fonction *abélienne* de deux variables ξ et η et j'appellerai les quatre périodes fondamentales

(1)
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4\quad \text{pour } \xi,$$
$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad b_4\quad \text{pour } \eta.$$

J'envisagerai une fonction *intermédiaire* Φ jouissant des propriétés suivantes :

Elle est entière et de plus on a pour une quelconque des quatre périodes

$$\Phi(\xi + a_i, \eta + b_i) = \Phi(\xi, \eta)\, e^{\alpha_i \xi + \beta_i \eta + \gamma_i}.$$

Je poserai ensuite :

$$M_{ik} = \alpha_i a_k + \beta_i b_k - \alpha_k a_i - \beta_k b_i;$$

M_{ik} sera égal à un entier multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$.

Si les périodes (1) sont des périodes normales, on aura :

$$a_1 b_3 + a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2 = 0.$$

Si les périodes (1) ne sont pas normales, on aura une relation analogue

(2)
$$\Sigma N_{ik}\, a_i b_k = 0$$

où

$$N_{ii} = 0, \qquad N_{ik} = -N_{ki}.$$

Les N seront des entiers dont le déterminant est égal à 1.

En d'autres termes le premier membre de l'équation (2) est une forme bilinéaire de discriminant 1.

On aura d'ailleurs :

$$M_{ik} = 2m\pi\sqrt{-1}\, N_{ik},$$

m étant l'*ordre* de la fonction intermédiaire Φ.

On sait que les fonctions Θ ne sont que des cas particuliers des fonctions intermédiaires qui s'y ramènent d'ailleurs aisément.

Nous allons maintenant définir notre espace λ, μ, ν.

Distinguons les parties réelles et imaginaires des périodes, en faisant

$$a_i = a'_i + a''_i\sqrt{-1}, \qquad b_i = b'_i + b''_i\sqrt{-1}.$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned}
x &= a'_1\lambda + a'_2\mu + a'_3\nu,\\
y &= a''_1\lambda + a''_2\mu + a''_3\nu,\\
z &= b'_1\lambda + b'_2\mu + b'_3\nu,\\
t &= b''_1\lambda + b''_2\mu + b''_3\nu.
\end{aligned}$$

Nous étendrons nos intégrations à la surface totale du cube dont les six faces ont pour équation

$$\lambda \text{ ou } \mu \text{ ou } \nu = 0 \text{ ou } 1.$$

Les courbes singulières que nous considérerons auront toutes pour équation

$$\Phi = 0.$$

A l'intérieur de notre cube, il pourra se trouver plusieurs branches de la courbe singulière $\Phi = 0$, mais parmi ces branches, nous devrons distinguer les branches fermées et les branches ouvertes limitées à chacune de leurs deux extrémités par l'une des faces du cube. Les points qui doivent surtout attirer notre attention sont les extrémités des branches ouvertes, c'est-à-dire les points où la courbe $\Phi = 0$ coupe les faces du cube.

Mais nous distinguerons ces points en deux catégories. Supposons que dans le voisinage d'un de ces points, les équations de $\Phi = 0$ puissent se mettre sous la forme

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega)$$

ainsi qu'il est dit au paragraphe IV.

Nous formerons le déterminant Δ du paragraphe IV qui s'écrira ici :

$$\Delta = \begin{vmatrix}
-\dfrac{dy}{d\omega} & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\
\dfrac{dx}{d\omega} & a''_1 & a''_2 & a''_3 \\
-\dfrac{dt}{d\omega} & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\
\dfrac{dz}{d\omega} & b''_1 & b''_2 & b''_3
\end{vmatrix}.$$

Nous avons vu que si ce déterminant est positif, il faut, dans les intégrations, suivre la courbe $\Phi = 0$ dans le sens des ω croissants, et qu'il faut la suivre au contraire dans le sens des ω décroissants si Δ est négatif.

Comme ω reste arbitraire dans une large mesure, on peut toujours choisir cette variable de telle sorte que Δ soit positif et que par conséquent on ait toujours à suivre la courbe dans le sens des ω croissants.

Cela posé si nous considérons un des points d'intersection P de la courbe $\Phi = 0$ avec une des faces du cube, et que dans le voisinage de ce point, on suive cette courbe dans le sens des ω croissants, il pourra se présenter deux cas. Ou bien on passera de l'extérieur du cube à l'intérieur, ou inversement.

Nous distinguerons donc deux sortes de points P; le point P sera *positif* si l'on passe de l'extérieur du cube à l'intérieur et *négatif* dans le cas contraire.

Pour reconnaître le signe d'un de ces points, imaginons que ce point appartienne à la face $\lambda = 0$, et que dans le voisinage de ce point, on ait pour l'équation de $\Phi = 0$

$$\xi = f(\eta).$$

Il viendra alors :

$$d\xi = (\alpha + i\beta)\, d\eta$$

où

$$\alpha + i\beta = \frac{df}{d\eta} = -\frac{\dfrac{d\Phi}{d\eta}}{\dfrac{d\Phi}{d\xi}}$$

en remplaçant $d\xi$ et $d\eta$ par leurs valeurs et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient :

$$(3)\quad \begin{aligned} &(a'_1 - \alpha b'_1 + \beta b''_1)\, d\lambda + (a'_2 - \alpha b'_2 + \beta b''_2)\, d\mu + (a'_3 - \alpha b'_3 + \beta b''_3)\, d\nu = 0, \\ &(a''_1 - \alpha b''_1 - \beta b'_1)\, d\lambda + (a''_2 - \alpha b''_2 - \beta b'_2)\, d\mu + (a''_3 - \alpha b''_3 - \beta b'_3)\, d\nu = 0. \end{aligned}$$

Ce sera en étudiant les coefficients des équations (3) qu'on reconnaîtra si le point P est positif ou négatif.

Si l'on fait varier ces coefficients d'une maniére continue, le passage des points P positifs aux points P négatifs se fera au moment où $d\lambda$ est nul, c'est-à-dire où

$$(4)\quad (a'_2 - \alpha b'_2 + \beta b''_2)(a''_3 - \alpha b''_3 - \beta b'_3) - (a'_3 - \alpha b'_3 + \beta b''_3)(a''_2 - \alpha b''_2 - \beta b'_2) = 0.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'équation (4).

Nous n'avons encore rien supposé au sujet de la fonction Φ qui égalée à o définira la courbe singulière ; nous choisirons plus tard pour Φ une fonction intermédiaire, mais dans ce qui a été dit jusqu'ici, rien ne préjuge ce choix.

Faisons en particulier

$$\Phi = \xi - \xi_0.$$

Alors on aura

$$\alpha = \beta = 0$$

et le premier membre de (4) se réduira à

$$a'_2 a''_3 - a'_3 a''_2.$$

C'est la partie imaginaire du produit

$$\bar{a}_2 a_3$$

en désignant par $\bar{a}_2$ la quantité imaginaire conjuguée de a_2.

Prenons le cas particulier où

$$a_2 = 1, \qquad a_3 = i.$$

Alors le premier membre de (4) se réduit à 1; il est par conséquent positif. Nous pouvons supposer en même temps $a_1 = 0$. Les équations (3) se réduisent alors à

$$d\mu = d\nu = 0.$$

On en conclut que

$$dx = dy = 0,$$

$$dz = b_1 \, d\lambda, \qquad dt = b'_1 \, d\lambda.$$

Le déterminant Δ se réduit à

$$-\frac{d\lambda}{d\omega}(b_1^2 + b_1'^2);$$

il est donc négatif.

Donc quand le premier membre de (4) est positif, le point P est négatif et inversement.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les points P situés sur la face du cube qui a pour équation $\lambda = 0$. On raisonnerait de même pour les cinq autres faces et l'on arriverait aux conclusions suivantes :

Posons

$$\alpha + i\beta = -\frac{\dfrac{d\Phi}{d\eta}}{\dfrac{d\Phi}{d\xi}} = h.$$

Posons ensuite :

$$c_i = a_i - h b_i,$$

et soit $\bar{c}_i$ la quantité imaginaire conjuguée de c_i.

Soit enfin $I(u)$ la partie imaginaire de u.

Les points P seront positifs :

pour la face	$\lambda = 0$	si	$I(c_2 c_3) > 0.$
»	$\lambda = 1$	si	$I(c_2 \bar{c}_3) < 0.$
»	$\mu = 0$	si	$I(c_3 \bar{c}_1) > 0.$
»	$\mu = 1$	si	$I(c_3 c_1) < 0.$
»	$\nu = 0$	si	$I(c_1 c_2) > 0.$
»	$\nu = 1$	si	$I(c_1 \bar{c}_2) < 0.$

Nous devons remarquer que si nous avons sur la face $\lambda = 0$ un point P dont les coordonnées soient $(0, \mu, \nu)$, nous aurons sur la face opposée $\lambda = 1$ un point P′ dont les coordonnées seront $(1, \mu, \nu)$. De plus les points P et P′ seront de signe contraire.

De même à tout point P situé sur l'une des faces $\mu = 0$, $\nu = 0$, correspondra un autre point P′ de signe contraire situé sur la face opposée.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int\int \frac{\frac{d\Phi}{d\eta} d\xi \, d\eta}{\Phi}$$

et étendons-la à toute la surface de notre cube.

Soient N_1 et N_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\lambda = 0$. Soient de même N'_1 et N'_2, N''_1 et N''_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\mu = 0$ et sur la face $\nu = 0$.

L'intégrale double se ramène alors à l'intégrale simple

$$\int 2i\pi \, d\xi,$$

prise le long des diverses courbes $\Phi = 0$. Celle-ci est évidemment égale à

$$2i\pi(\Sigma\xi_1 - \Sigma\xi_2).$$

$\Sigma\xi_1$ représente la somme des ξ relatifs aux divers points P positifs, $\Sigma\xi_2$ la somme des ξ relatifs aux divers points P négatifs.

Or à chacun des N_1 points P positifs de la face $\lambda = 0$, correspondent N_1 points P négatifs appartenant à la face $\lambda = 1$. La différence des ξ est égale à a_1.

L'intégrale est donc égale à

$$(5) \qquad 2i\pi[(N_1 - N_2)a_1 - (N'_1 - N'_2)a_2 - (N''_1 - N''_2)a_3].$$

D'autre part considérons deux points correspondants des deux faces opposées

$\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Soient ψ_1 et ψ_0 les valeurs de $\frac{d\Phi}{\Phi\, d\eta}$ en ces deux points, on aura :

$$\psi_1 - \psi_0 = \beta_1,$$

de sorte que l'intégrale double étendue aux deux faces $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ se ramène à l'intégrale double

$$\beta_1 \int\int d\xi\, d\eta$$

étendue à la face $\lambda = 0$ toute seule.

Cette intégrale est alors égale à

$$\beta_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

On trouverait des expressions analogues pour les autres faces de telle sorte que l'intégrale totale est égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est donc égal à l'expression (5).

D'une façon plus générale, posons :

$$\xi = a_i \lambda + a_k \mu,$$
$$\eta = b_i \lambda + b_k \mu,$$

et envisageons alors l'équation

$$\Phi(a_i \lambda + a_k \mu, b_i \lambda + b_k \mu) = 0.$$

On pourra satisfaire à cette équation d'un certain nombre de manières par des valeurs de λ et de μ réelles et comprises entre 0 et 1. Parmi ces solutions qui correspondent à divers points P, distinguons celles pour lesquelles la partie imaginaire de $c_i \bar{c}_k$ est positive, de celles pour lesquelles cette partie imaginaire est négative. Soit ensuite P_{ik} l'excès du nombre des solutions de la première sorte sur le nombre des solutions de la deuxième sorte. D'après cette définition, on aura :

$$P_{ik} = -P_{ki}, \qquad P_{ii} = 0,$$
$$P_{23} = N_1 - N'_1, \qquad P_{31} = N'_1 - N_2, \qquad P_{12} = N_1 - N'_2.$$

Remarquons de plus que la partie imaginaire de $c_i \bar{c}_k$ peut se mettre sous une autre forme :

$$I(c_i \bar{c}_k) = \left|\frac{d\Phi}{d\xi_k}\right|^{-2} I\left[\frac{d\Phi}{d\lambda} \frac{\overline{d\Phi}}{d\mu}\right].$$

Elle est donc de même signe que la partie imaginaire de

$$\frac{d\Phi}{d\lambda}\frac{d\Phi}{d\mu}.$$

De plus nous pouvons écrire :

$$2i\pi(a_1P_{23}+a_2P_{31}+a_3P_{12}) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

On aurait de même par symétrie :

$$2i\pi(a_2P_{34}+a_3P_{42}+a_4P_{23}) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$2i\pi(a_3P_{41}+a_4P_{13}+a_1P_{34}) = \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 \\ b_3 & b_4 & b_1 \end{vmatrix}$$

et une quatrième équation analogue.

On peut réunir ces quatre équations en une seule, en écrivant symboliquement :

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \bar\omega_1 & \bar\omega_2 & \bar\omega_3 & \bar\omega_4 \end{vmatrix}.$$

Dans cette identité x_1, x_2, x_3, x_4 sont des quantités quelconques. Quant aux ω et aux $\bar\omega$ ce sont des quantités qui ont un sens symbolique. Nous convenons de remplacer dans le développement du second membre

$$\omega_i\bar\omega_k - \bar\omega_k\omega_i$$

par

$$P_{ik}.$$

Comme rien ne distingue ξ de η nous pouvons écrire de même :

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \bar\omega_1 & \bar\omega_2 & \bar\omega_3 & \bar\omega_4 \end{vmatrix}.$$

Nous écrirons plus simplement encore les équations symboliques (6) et (7) de la façon suivante en écrivant les déterminants sous une forme abrégée :

$$(6')\qquad (x\beta ab) = 2i\pi(xa\omega\bar\omega),$$

$$(7')\qquad (x\alpha ba) = 2i\pi(xb\omega\bar\omega).$$

Posons :

$$P_{ik} = h(\alpha_i a_k - \alpha_k a_i) + k(\beta_i b_k - \beta_k b_i)$$

et cherchons à déterminer h et k par les équations (6) et (7). Il vient :

$$(xa\omega\varpi) = h(xa\alpha a) + k(xa\beta b) = -k(x\beta ab),$$
$$(xb\omega\omega) = h(xb\alpha a) + k(xb\beta b) = -h(x\alpha ba),$$

de sorte que les équations (6) et (7) donnent :

$$h = k = \frac{-1}{2i\pi},$$

d'où

$$P_{ik} = \frac{M_{ik}}{2i\pi} = m N_{ik}.$$

Nous avons donc une solution des équations (6) et (7). Je dis qu'il n'y en a pas d'autres, du moins en nombres entiers.

En effet s'il y en avait deux, on pourrait trouver des nombres entiers P'_{ik} satisfaisant aux huit équations

$$a_i P'_{kl} + a_k P'_{li} + a_l P'_{ik} = 0,$$
$$b_i P'_{kl} + b_k P'_{li} + b_l P'_{ik} = 0.$$

En d'autres termes si l'on pose symboliquement :

$$P'_{ik} = \omega'_i \varpi'_k - \omega'_k \varpi'_i$$

et que l'on envisage la forme bilinéaire :

$$(xy\omega'\varpi'),$$

cette forme bilinéaire s'annulera identiquement quand on y fera, soit :

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \quad y_3 = a_3, \quad y_4 = a_4,$$

soit :

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \quad y_3 = b_3, \quad y_4 = b_4.$$

Faisons subir à x et à y en même temps qu'à a et à b un même changement linéaire de variables en faisant :

$$x_i = \Sigma q_{ik} x'_k, \quad y_i = \Sigma q_{ik} y'_k, \quad a_i = \Sigma q_{ik} a'_k, \quad b_i = \Sigma q_{ik} b'_k.$$

Nous choisirons ce changement de variables (où les q sont des entiers) de façon à réduire la forme bilinéaire $(xy\omega'\varpi')$ qui s'écrira alors :

$$A(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) + B(x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3).$$

On devrait donc avoir identiquement :

$$A(x'_1 a'_2 - x'_2 a'_1) + B(x'_3 a'_4 - x'_4 a'_3) = 0,$$
$$A(x'_1 b'_2 - x'_2 b'_1) + B(x'_3 b'_4 - x'_4 b'_3) = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que si A et B sont nuls (mais alors la forme bilinéaire

est identiquement nulle et par conséquent tous les P_{ik} sont nuls) (C. Q. F. D.) ou encore si un seul des coefficients A et B s'annule, A par exemple, mais alors il faut encore que

$$a_3 = a'_1, \quad b'_3 = b_1 = 0.$$

La fonction abélienne n'aurait plus alors que deux périodes; la seconde hypothèse est donc inadmissible.

On doit donc conclure de cette discussion que l'unique solution des équations (6) et (7) c'est :

$$P_{ik} = m N_{ik}.$$

Dans le cas particulier où la fonction Φ se réduit à une fonction Θ d'ordre m, et où l'on a :

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2i\pi, & a_2 = 0, & a_4 = b_3, & \\ b_1 = 0, & b_2 = 2i\pi, & \ldots\ldots, & \\ \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = m, & \alpha_4 = 0, \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0, & \beta_4 = m, \end{array}$$

tous les N_{ik} sont nuls, excepté N_{31} et N_{42} qui sont égaux à 1.

Tous les P_{ik} sont donc nuls excepté P_{31} et P_{42} qui sont égaux à m.

Si nous reprenons les notations N_1, N_2, N'_1, N'_2 etc, de telle sorte que

$$P_{23} = N_1 - N_2, \qquad P_{31} = N'_1 - N'_2, \qquad \ldots$$

nous aurons

$$N_1 = N_2$$

et

$$N_2 - N_1 = m.$$

On pourrait trouver plus intéressant de connaître le nombre $N'_1 + N'_2$, c'est-à-dire le nombre total des P, au lieu d'avoir seulement l'excès du nombre des points P positifs sur celui du nombre des P négatifs.

Nous avons toutefois un renseignement sur ce nombre $N'_1 + N'_2$. Il est plus grand que m et de même parité que m, car il est clair que

$$N'_2 + N'_1 > N'_2 - N'_1; \qquad N'_2 + N'_1 \equiv N'_2 - N'_1 \pmod 2.$$

On pourrait arriver à tous les résultats qui précèdent par l'emploi des différentielles totales, cela serait même plus simple ; mais je n'ai voulu donner ici qu'une application de la théorie des intégrales doubles.

Paris, 24 décembre 1886.

SUR

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 125, p. 995-997 (13 décembre 1897).

Je considère l'intégrale double

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{\sqrt{F - z}},$$

où P et F sont deux polynomes entiers en x et y, et où z est un paramètre arbitraire.

Considérons, d'autre part, l'intégrale simple

$$j = \int \frac{P\,dx}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Dans cette intégrale simple, je suppose que y est lié à x par la relation algébrique

$$F = t,$$

où t est un autre paramètre arbitraire. Ainsi j est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique $F = t$.

Soit ω une des périodes de j; cette période sera une fonction de t, et l'on sait que cette fonction ω satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en t.

Soit

$$(1) \qquad \Sigma \Pi_k \frac{d^k \omega}{dt^k} = 0$$

cette équation; Π_k est un polynome entier en t.

L'ordre de l'équation (1) sera égal au nombre des périodes, c'est-à-dire à $2p$, en appelant p le genre de la courbe $F = t$.

Soient

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_q$$

les points singuliers de l'équation (1), c'est-à-dire les racines distinctes du polynome Π_{2p}.

Alors les périodes Ω de l'intégrale J seront représentées par la formule

$$\Omega = 2\int_{t_k}^{z} \frac{\omega\, dt}{\sqrt{t-z}}.$$

Il y a donc, en général, $2pq$ périodes Ω, puisque l'on peut prendre pour ω l'une des $2p$ périodes de j et pour t_k l'un des q points singuliers de (1).

Nous devons dire également comment cette formule devrait être transformée si ω devenait infini pour $t = t_k$.

Soient alors

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{2p}$$

$2p$ intégrales de l'équation (1) qui deviennent

$$\lambda_1 v_1, \quad \lambda_2 v_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{2p} v_{2p}$$

quand t tourne autour de t_k.

Soit, dans le voisinage de l'origine O,

$$\omega = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{2p} v_{2p},$$

les α étant des coefficients constants.

On aura alors

$$\Omega = 2\int \left(\frac{\alpha_1 v_1}{1-\lambda_1} + \frac{\alpha_2 v_2}{1-\lambda_2} + \ldots + \frac{\alpha_{2p} v_{2p}}{1-\lambda_{2p}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t-z}} - \int \frac{\omega\, dt}{\sqrt{t-z}},$$

la première intégrale étant prise le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point t_k, et la seconde le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point z.

Il est clair que Ω est une fonction de z qui va satisfaire à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en z. Soit

$$(2) \qquad \Sigma Q_k \frac{d^k \Omega}{dz^k} = 0$$

cette équation; les Q_k sont des polynomes entiers en z.

L'équation (2) se déduit de l'équation (1) par une transformation bien connue qui se rattache à la théorie des dérivées d'ordre fractionnaire.

Les points singuliers de l'équation (2) sont les mêmes que ceux de l'équation (1); mais le point sur lequel je voudrais surtout insister, c'est la manière de déduire le groupe de l'équation (2) de celui de l'équation (1).

Pour fixer les idées je supposerai

$$2p = 2, \qquad q = 3.$$

L'équation (1) est alors du second ordre et l'équation (2) est, en général, du sixième ordre.

Soient alors

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{vmatrix}$$

les substitutions fondamentales du groupe de (1); les subtitutions correspondantes du groupe de (2) seront :

$$\begin{vmatrix} -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c' & 1-d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & -d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a' & -b' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & 1-d' & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c'' & -d'' \end{vmatrix}.$$

Le groupe de (1) a tous ses coefficients entiers; on voit qu'il en sera de même du groupe de (2), ainsi qu'il était aisé de le prévoir.

SUR

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

Journal de Mathématiques, 6e série, t. 2, p. 135-189 (1906).

I. — Introduction.

La détermination du nombre des périodes cycliques d'une intégrale double exige une grande attention, comme toutes les questions d'*Analysis situs*, dès que le nombre des dimensions dépasse 3. M. Picard a abordé la question dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables, que je citerai souvent.

Je m'en suis occupé moi-même dans un Mémoire intitulé : *Sur les cycles des surfaces algébriques*, et inséré au *Journal de Liouville* en 1902 [1]. C'est à ce Mémoire que je renverrai quand je parlerai sans autre explication du *Mémoire cité*.

L'application des règles posées dans ce Mémoire présente quelquefois quelques difficultés; la question du nombre des cycles ne se pose pas d'une façon aussi simple que dans le cas des courbes algébriques, puisqu'il y a plusieurs manières d'envisager les points à l'infini et que le nombre des cycles ne reste pas le même quelle que soit la convention adoptée. D'autre part, il peut arriver que ce nombre ne soit pas le même pour deux surfaces, bien que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. C'est ce qu'a montré M. Picard.

Si l'on ne fait pas attention à ces circonstances, il peut arriver qu'on soit conduit à d'apparentes contradictions et que le nombre des cycles d'une surface, tel que le donnent les règles, ne demeure pas le même quand on change d'axes de coordonnées.

C'est ce qui m'a déterminé à revenir encore une fois sur la question et d'ail-

(1) *Voir* aux NOTES.

leurs sans l'épuiser. J'ai modifié la convention relative aux points à l'infini, de façon que tout devienne projectif et que les résultats se présentent sous une forme plus simple.

J'ai obtenu ainsi une formule générale et je l'ai appliquée aux surfaces du troisième degré.

Ces surfaces présentent, au point de vue qui nous occupe, des propriétés qui semblent paradoxales, sur lesquelles M. Picard a déjà attiré l'attention. C'est ce qui m'a engagé à les étudier en détail.

Il faudrait, pour aller plus loin, étudier les cas où la surface présente d'autres singularités que les singularités ordinaires qui caractérisent les surfaces auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées par une transformation birationnelle; c'est-à-dire les cas où la variété à quatre dimensions correspondante présente un point singulier. Mais je n'ai pas abordé ce problème. Je me suis contenté de dire quelques mots au sujet du point conique ordinaire, et sans épuiser la question.

II. — Intégrales doubles relatives à une surface.

Soit

$$(1)\qquad F(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique quelconque, et soit

$$(2)\qquad J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y}$$

une intégrale double relative à cette surface; P étant une fonction rationnelle de x, y, z. Nous supposerons cette intégrale prise le long d'un domaine à deux dimensions que j'appellerai K et qui sera généralement un cycle fermé.

Soit maintenant

$$(3)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

un plan variable quelconque, et soit C l'intersection de ce plan variable avec la surface (1). Nous pourrons supposer que le domaine d'intégration K est engendré de la façon suivante : le plan (3) variera d'une manière continue; en même temps, nous envisagerons, sur la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique C, un cycle fermé k; quand le plan (3) variera d'une manière continue, ce cycle k variera également d'une manière continue, et ce sont les positions successives du cycle à une dimension k qui engendreront le cycle à deux dimensions K. Que devient dans ces conditions notre intégrale double?

Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} X = \beta F'_z - \gamma F'_y, \\ Y = \gamma F'_x - \alpha F'_z, \\ Z = \alpha F'_y - \beta F'_x. \end{cases}$$

Posons encore

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

λ, μ et ν étant des constantes quelconques ; supposons que les coefficients variables α, β, γ de l'équation (3) soient des fonctions d'une certaine variable t et prenons u et t pour nouvelles variables indépendantes. Il s'agit de calculer le déterminant fonctionnel des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles u et t.

Pour cela, nous avons les équations suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} du = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz, \\ -dt\, \Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz, \\ dF = F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz. \end{cases}$$

Si donc nous posons

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

nous trouverons

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{D}{\Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, t, F)}{\partial(u, t, z)} \frac{\partial(u, t, z)}{\partial(x, y, z)} = F'_z \frac{\partial(u, t)}{\partial(x, y)},$$

d'où enfin

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, t)} = -\frac{F'_z\, \Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt}}{D},$$

de sorte que notre intégrale double devient

$$J = -\int\int \frac{P\, \Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt}\, du\, dt}{D}$$

ou bien

$$(6)\qquad J = -\int (A\, d\alpha + B\, d\beta + C\, d\gamma),$$

avec

$$(7)\qquad A = \int \frac{P x\, du}{D}, \qquad B = \int \frac{P y\, du}{D}, \qquad C = \int \frac{P z\, du}{D}.$$

On peut annuler deux des trois coefficients arbitraires λ, μ, ν, en faisant l'autre égal à 1 ; on trouve ainsi, par exemple,

$$(7\ bis)\qquad \mathrm{A} = \int \frac{\mathrm{P}x\,dx}{\mathrm{X}} = \int \frac{\mathrm{P}x\,dy}{\mathrm{Y}} = \int \frac{\mathrm{P}x\,dz}{\mathrm{Z}}.$$

Les intégrales (7) et (7 *bis*) sont des intégrales abéliennes *simples* relatives à la courbe algébrique C ; et si, comme nous l'avons supposé, le chemin d'intégration k est un cycle fermé, ce sont des périodes de ces intégrales abéliennes.

Nous devons nous attendre à ce que

$$\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \mathrm{C}\,d\gamma$$

soit une différentelle exacte, et c'est en effet ce qui arrive. Vérifions que

$$(8)\qquad \frac{d\mathrm{A}}{d\beta} = \frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}.$$

Quand nous allons parcourir le cycle k, le point u va décrire dans son plan une certaine courbe fermée ; nous pourrons toujours supposer que cette courbe ne varie pas quand on donne à β, par exemple, un accroissement très petit.

En effet, par hypothèse, notre cycle k est fermé et varie d'une manière continue. Si donc k est la courbe fermée décrite par u dans son plan, si k'' est ce que devient cette même courbe quand β se change en $\beta + d\beta$, ces deux courbes fermées k' et k'' différeront infiniment peu. On aura toujours pu choisir k' de façon que cette courbe passe à distance finie de tous les points singuliers. Il n'y aura pas alors de point singulier entre k' et k''. L'intégrale le long de k'' est donc égale à l'intégrale le long de k' ; on peut remplacer la courbe k'' par la courbe k', c'est-à-dire supposer que la courbe k' n'a pas varié. Cela nous permet de calculer $\frac{d\mathrm{A}}{d\beta}$ par différentiation sous le signe $\int$ en regardant le chemin d'intégration comme invariable. On trouve ainsi

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\beta} = \int \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\mathrm{P}x}{\mathrm{D}}\right) du,$$

en remarquant que

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{d\beta} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{d\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta},$$

en représentant par $\frac{\partial}{\partial\beta}$ avec des ∂ ronds la dérivée prise par rapport à β en tant que cette variable figure explicitement dans $\frac{\mathrm{P}x}{\mathrm{D}}$, mais en regardant x, y, z comme des constantes.

Nous observerons que, dans le numérateur $\mathrm{P}x$, la lettre β ne figure pas expli-

citement, mais qu'elle figure dans D et que l'on a

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = y(\lambda F'_z - \nu F'_x).$$

Maintenant, pour calculer $\frac{dx}{d\beta}, \frac{dy}{d\beta}, \frac{dz}{d\beta}$, il faut dans les équations (5) faire $du = 0$, puisque notre chemin d'intégration est invariable; $dF = 0$, puisque l'équation (1) a toujours lieu; $d\alpha = d\gamma = 0$, puisque pour chercher la dérivée partielle par rapport à β il faut regarder les deux autres variables α et γ comme des constantes, On trouve ainsi

$$(5\,bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \Sigma \lambda\, dx, \\ -y\, d\beta &= \Sigma \alpha\, dx, \\ 0 &= \Sigma F'_x\, dx. \end{aligned} \right.$$

Nous y adjoignons l'identité

$$(9) \qquad d\left(\frac{Px}{D}\right) = x\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) + \frac{P}{D}dx - \frac{Px}{D^2}\frac{\partial D}{\partial \beta}d\beta,$$

en posant

$$Q = \frac{P}{D}.$$

Les équations (5 *bis*) nous donnent d'abord

$$D\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) = y\, d\beta \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \end{vmatrix} = y\Delta\, d\beta,$$

et d'autre part

$$D\frac{dx}{d\beta} = y(\mu F'_z - \nu F'_y).$$

Si donc dans l'équation (9) nous remplaçons $\Sigma \frac{dQ}{dx} dx$, dx et $\frac{\partial D}{\partial \beta}$ par leurs valeurs, nous trouverons

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{Px}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{P}{D^2}\left[y(\mu F'_z - \nu F'_y) - x(\lambda F'_z - \nu F'_x)\right].$$

On trouverait de même

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{Py}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{P}{D^2}\left[-x(\lambda F'_z - \nu F'_x) + y(\mu F'_z - \nu F'_y)\right].$$

et l'identité des deux expressions suffit pour démontrer l'égalité (8).

Donc $A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma$ est une différentielle exacte C. Q. F. D.

Afin de ne pas exclure le cas où le plan (3) passe par l'origine, il convient de

rendre l'équation de ce plan homogène en l'écrivant

$$(3\ bis)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon.$$

Il vient alors

$$dJ = A_1 d\frac{\alpha}{\varepsilon} + B_1 d\frac{\beta}{\varepsilon} + C_1 d\frac{\gamma}{\varepsilon},$$

A_1, B_1, C_1 étant ce que deviennent A, B, C quand on y remplace α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$; dans ces conditions, le déterminant D se change en

$$D_1 = \frac{D}{\varepsilon}.$$

Il vient ainsi

$$A_1 = \int \frac{Px\,du}{D_1} = \varepsilon \int \frac{Px\,du}{D} = A\varepsilon,$$

d'où

$$A_1 d\frac{\alpha}{\varepsilon} = A\,d\alpha - \frac{A\alpha\,d\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où enfin

$$(6\ bis)\qquad dJ = A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon,$$

où

$$E = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\varepsilon} = \int \frac{P(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,du}{D\varepsilon},$$

ou en vertu de l'équation (3 *bis*) :

$$(10)\qquad E = \int \frac{P\,du}{D}.$$

Considérons alors J comme fonction de α, β, γ, ε; nous partirons de certaines valeurs initiales de ces variables, par exemple les valeurs 1, 0, 0, 1 (c'est-à-dire le plan $x = 1$), et nous les ferons varier d'une manière continue et par un chemin quelconque jusqu'à leurs valeurs finales α, β, γ, ε; le cycle à une dimension k variera aussi d'une manière continue et engendrera une variété à deux dimensions K qui ne sera pas fermée, mais qui aura une frontière formée du cycle initial (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan initial $x = 1$) et du cycle final (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan final $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$). C'est le long de cette variété K que sera prise l'intégrale double J.

L'intégrale J est une fonction multiforme des variables $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$; parce que les cycles k s'échangent entre eux lorsque ces variables tournent autour d'un point singulier, et parce que l'intégrale J prend deux valeurs différentes, quand

les variables vont de leurs valeurs initiales à leurs valeurs finales par deux chemins différents, si entre ces deux chemins il y a un point singulier.

Quels sont ces points singuliers ; ce sont ceux qui correspondent au cas où le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1).

Considérons d'abord le cycle k et les valeurs correspondantes des intégrales A, B, C, E comme des fonctions des variables α, β, γ, ε; quand les variables ayant tourné autour d'un point singulier reviendront à leurs valeurs initiales, le cycle k se transformera en un autre cycle de la même surface de Riemann. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les cycles fondamentaux de cette surface de Riemann (que je suppose de genre p). Après une rotation autour du point singulier, ils se transformeront en d'autres cycles de la même surface, qui devront être eux-mêmes des combinaisons des cycles fondamentaux $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$.

Soient alors $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les valeurs de l'intégrale A correspondant à ces $2p$ cycles ; ce sont les périodes fondamentales de l'intégrale abélienne indéfinie A. Elles se transformeront en $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{2p}$ et les A'_i ne seront autre chose que des combinaisons linéaires des A_i, à coefficients constants et entiers.

Donc A, considéré comme fonction de l'une des variables α, β, γ, ε, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; plus généralement, entre $2p+1$ dérivées partielles de A par rapport aux quatre variables (parmi lesquelles la fonction A elle-même pourra être comprise), il y a toujours une relation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε.

Il en sera de même en ce qui concerne B, C et E. Mais il y a quelque chose de plus. Quand les variables tournent autour d'un point singulier, B, C et E subissent *la même* transformation linéaire que A. Il en résulte que nous aurons encore une relation de même forme, non seulement entre $2p+1$ dérivées de A, mais entre $2p+1$ dérivées quelconques, appartenant les unes à A, les autres à B, C ou E, les fonctions A, B, C et E elles-mêmes n'étant pas exclues.

Mais A, B, C, E sont les dérivées du premier ordre de J ; et les dérivées de ces quatre fonctions sont aussi des dérivées partielles de J, de sorte que nous arrivons finalement au résultat suivant :

Entre $2p+1$ dérivées partielles quelconques de J (*la fonction* J *étant exclue*) *il y a toujours une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de* α, β, γ, ε.

Prenons un nombre suffisant de semblables relations, en assez grand nombre

pour que toutes les autres n'en soient plus que des conséquences ; nous aurons un système de relations que j'appellerai le système (S). Il suffira, par exemple, pour cela de prendre les quatre équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \sum Q_i \dfrac{d^i J}{dx^i} = 0, & \dfrac{dJ}{d\beta} = \sum R_i^1 \dfrac{d^i J}{dx^i}, \\ \dfrac{dJ}{d\gamma} = \sum R_i^2 \dfrac{d^i J}{dx^i}, & \dfrac{dJ}{d\varepsilon} = \sum R_i^3 \dfrac{d^i J}{dx^i}; \end{cases}$$

Q_i, R_i^1, R_i^2, R_i^3 sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε ; dans la première équation (S) l'indice i peut prendre les valeurs 1, 2, ..., $2p$. Qu'arrive-t-il maintenant de J quand les variables tournent autour d'un point singulier ? Considérons par exemple les $2p$ déterminations de A :

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{2p}$$

définies plus haut et soient

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p}$$

les déterminations correspondantes de J. Supposons que, quand on tourne autour du point singulier, A_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} A_k,$$

les λ_{ik} étant des coefficients constants et entiers comme on l'a expliqué plus haut ; alors J_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} J_k + H_i,$$

H_i étant une constante.

Une combinaison quelconque $\sum \lambda_k J_k$, où les λ_k sont entiers, se changera donc en $\sum \mu_k J_k + H$ où les μ_k sont des entiers et où H est une constante. Cela posé considérons q points singuliers M_1, M_2, ..., M_q. Imaginons que, quand on tourne autour de M_1, une certaine combinaison

$$\sum \lambda_{1k} J_k$$

se change en $\sum \mu_{1k} J_k + H_1$; et que plus généralement, quand on tourne autour de M_i, une certaine combinaison $\sum \lambda_{ik} J_k$ se change en

$$\sum \mu_{ik} J_k + H_i.$$

Les λ_{ik} et les μ_{ik} sont des coefficients entiers, les H_i sont des constantes.

Soit d'ailleurs K_i un contour à deux dimensions défini de la façon suivante :

Soit C_i un contour à une dimension ; pour les valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ des quatre variables, il est choisi dans le plan $(x = 1)$ de façon que la période correspondante de l'intégrale A soit $\sum \lambda_{ik} A_k$. Supposons ensuite que les variables α, β, γ, ε tournent autour du point singulier M_i en partant des valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ pour revenir aux mêmes valeurs finales, et que le cycle C_i varie avec elles d'une manière continue ; il engendrera le cycle à deux dimensions K_i.

Nous pouvons supposer que $J_1, J_2, \ldots, J_{2p}$ (qui ne sont définies jusqu'ici qu'à une constante près) s'annulent pour les valeurs initiales. Alors H_i sera l'intégrale double prise le long du contour K_i.

Soient maintenant

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_q,$$

q coefficients entiers, choisis de telle sorte que

$$(11) \qquad \sum \nu_i(\lambda_{i1} - \mu_{i1}) = \sum \nu_i(\lambda_{i2} - \mu_{i2}) = \ldots = \sum \nu_i(\lambda_{i2p} - \mu_{i2p}) = 0.$$

Alors, l'expression

$$\sum \nu_i H_i$$

représentera une des *périodes de l'intégrale double ;* ce sera la valeur de cette intégrale double, prise le long du cycle *fermé* à deux dimensions

$$\sum \nu_i K_i.$$

Je dis, en effet, que ce cycle est fermé. En effet le cycle K_i n'est pas fermé, mais il admet pour frontière, d'une part, le cycle C_i dans sa position initiale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \lambda_{il} h_l ;$$

d'autre part, ce même cycle dans sa position finale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \mu_{il} h_l,$$

de sorte que sa frontière complète sera

$$\sum (\lambda_{il} - \mu_{il}) h_l.$$

Donc la frontière complète du cycle $\sum \nu_i \mathrm{K}_i$ sera

$$\sum\sum \nu_i(\lambda_{il} - \mu_{il}) h_l$$

et elle se réduira à rien en vertu des relations (11).

Supposons, d'autre part, que nous changions l'origine, je veux dire qu'au lieu de faire varier α, β, γ, ε depuis les valeurs initiales (1, 0, 0, 1) jusqu'aux mêmes valeurs finales nous fassions varier α, β, γ, ε depuis d'autres valeurs initiales (α_0, β_0, γ_0, ε_0) auxquelles nous les ferons finalement revenir. La définition des cycles K_i se trouvera modifiée; nous n'aurons plus le droit de considérer J_k comme nul à l'origine et l'intégrale double prise le long du cycle K_i ne sera plus H_i, mais

$$\sum (\mu_{ik} - \lambda_{ik}) \mathrm{J}_k + \mathrm{H}_i.$$

Elle dépendra donc du choix de l'origine (α_0, β_0, γ_0, ε_0). Considérons, au contraire, l'intégrale double prise le long du cycle $\sum \nu_i \mathrm{K}_i$; elle sera

$$\sum\sum \nu_i (\mu_{ik} - \lambda_{ik}) \mathrm{J}_k + \sum \nu_i \mathrm{H}_i,$$

expression qui se réduira à $\sum \nu_i \mathrm{H}_i$ en vertu des relations (11). Elle sera donc indépendante du choix de l'origine.

III. — Lacets rectilignes.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle convenable, une surface quelconque peut être ramenée à une surface *normale*, c'est-à-dire à une surface n'ayant d'autres singularités que des courbes formées par l'intersection de deux nappes sans point singulier, ou des points triples formés par l'intersection de trois nappes sans point singulier. Néanmoins la courbe double pourra présenter des *pinch-points* [1], c'est-à-dire des points où les deux nappes se touchent, de telle façon que l'intersection de la surface par un plan quelconque passant par ce point présente non plus un point double à tangentes séparées, mais un point de rebroussement ordinaire.

---

[1] [ou *points-pinces*.]

Dans ce qui va suivre, nous supposerons donc en général que la surface

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

est normale; cependant, dans certains cas, nous serons amenés à considérer des surfaces qui, outre les singularités des surfaces normales, présentent des points coniques isolés; nous supposerons qu'en ces points coniques le cône des tangentes est un cône du deuxième degré ne se décomposant pas en deux plans.

Nous avons envisagé dans le paragraphe précédent les quatre variables homogènes α, β, γ, ε et nous avons considéré en particulier le cas où ces variables prenaient des valeurs correspondant à un *point singulier;* et nous entendions par là des valeurs telles que le genre de la section de la surface (1) avec le plan

$$(3\,bis) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon,$$

que ce genre, dis-je, s'abaisse d'une ou plusienrs unités.

C'est ce qui arrivera :

1° Si le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1);

2° Si la surface (1) admet des points coniques, et si le plan (3 *bis*) passe par un de ces points coniques.

Je ne reviendrai pas sur la discussion par laquelle M. Picard a démontré que ces deux cas sont les seuls. Pour une surface normale, on n'a à considérer que le premier, et alors les points singuliers seront définis par l'équation

$$(2) \qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = 0$$

qui est l'équation de la surface (1) en coordonnées tangentielles homogènes ou, si l'on aime mieux, l'équation de la dualistique de la surface (1).

On est ainsi amené à se préoccuper des singularités *tangentielles* de la surface (1). Mais, par un raisonnement tout à fait pareil à celui de M. Picard, on verrait que l'on peut toujours supposer que la surface (2), dualistique de (1), est une surface normale.

Nous supposerons donc en général dans ce qui va suivre que les deux surfaces sont toutes deux normales, de sorte que les seules singularités tangentielles de la surface (1) seront :

1° Des plans tangents doubles en nombre simplement infini;

2° Des plans tangents triples en nombre fini;

3° Des plans tangents d'*inflexion* correspondant aux points-pinces.

Considérons d'abord un point singulier M_i correspondant à un plan tangent simple ordinaire. Soient k_1, k_2, ..., k_{2p} les $2p$ cycles fondamentaux de la courbe algébrique, intersection de (1) et de (3 *bis*); supposons que le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ parte d'une position initiale quelconque que j'appellerai O, et qui correspondra par exemple à $(0, 1, 0, 0)$, c'est-à-dire au plan $y = 0$, que ce point analytique tourne autour du point singulier M_i et revienne en O; que seront devenus les $2p$ cycles fondamentaux?

Il résulte d'un raisonnement de M. Picard (*Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 96) que, si l'on a choisi convenablement les $2p$ cycles fondamentaux

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \dots, \quad k_{2p},$$

ils se changeront en

$$k_1, \quad k_2 + k_1, \quad k_3, \quad \dots, \quad k_{2p}.$$

Il va sans dire que le choix des cycles fondamentaux qui permet d'énoncer le résultat sous cette forme simple n'est pas le même pour les différents points singuliers M_i.

Lorsque le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ vient en M_i, le plan (3 *bis*) devient tangent à la surface (1), coupe cette surface suivant une courbe qui n'est plus que de genre $p - 1$ et qui par conséquent n'a plus que $2p - 2$ cycles fondamentaux; ces cycles sont

$$k_3, \quad k_4, \quad \dots, \quad k_{2p}.$$

Considérons alors le cycle

$$k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_{2p} k_{2p},$$

les λ étant des coefficients entiers; quand le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$, partant de O, reviendra en O après avoir tourné autour de M_i, en décrivant le chemin fermé C, le cycle à une dimension k engendrera un cycle à deux dimensions K; reprenons l'intégrale J du paragraphe précédent et prenons cette intégrale double le long de K. Le chemin C peut être remplacé par un *lacet*, c'est-à-dire par un chemin allant d'abord de O en N_i, point infiniment voisin de M_i le long de la ligne L_i, allant ensuite de N_i en N_i en décrivant autour de M_i le contour infiniment petit C'_i et revenant enfin de N_i en O par la ligne L_i.

Je remarque d'abord que l'intégrale J correspondant au contour infiniment petit C'_i est infiniment petite. En effet, cette intégrale peut s'écrire, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} + \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} + \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y}.$$

Les trois dénominateurs F, F, F ne sont pas nuls à la fois, si le point singulier n'est pas un point conique; de sorte que nous pouvons toujours supposer que la fonction sous le signe $\int\int$ reste finie; et le contour d'intégration est infiniment petit.

Nous excluons ainsi le cas où le point singulier serait un point conique et aussi celui où P *deviendrait précisément infini au point singulier* M_i.

Mais le premier cas ne se présentera pas si la surface (1) est normale, et si l'autre se présentait, c'est-à-dire si le plan tangent $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ correspondant au point M_i touchait la surface (1) en un point où P serait infini, il suffirait de remplacer ce plan par un plan tangent infiniment voisin pour que la difficulté ne se présentât plus.

Il reste donc

$$(3) \qquad J = \int\int_{L_i, k} - \int\int_{L_i, k'},$$

la première intégrale étant prise en parcourant la ligne L_i dans le sens direct, et la seconde en parcourant cette même ligne dans le sens inverse, mais après que le cycle k_2 se serait changé dans le cycle $k_2 + k_1$, et le cycle k dans le cycle k',

$$k' = k + \lambda_2 k_1.$$

On a donc simplement

$$J = -\lambda_2 \int\int_{L_i, k_1},$$

l'intégrale étant prise depuis O jusqu'à M_i en suivant la ligne L_i et en remplaçant le cycle à une dimension k par le cycle k_1. Nous aurons donc

$$(4) \qquad J = -\lambda_2 \, j(L_i),$$

où

$$j(L_i) = \int_O^{M_i} (A\,dx + B\,dy + C\,dz + E\,dt),$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne L_i; les intégrales A, B, C, E ont le même sens que dans le paragraphe précédent; elles sont supposées prises le long du cycle k_1; le cycle k_1 est choisi parce que c'est celui qui s'évanouit au point singulier M_i; c'est, pour prendre le langage du Mémoire cité (*Journal de Liouville*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 191), le cycle *évanouissant* relatif à M_i.

Les périodes de l'intégrale double J sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers des intégrales $j(L_i)$. D'autre part, quand la ligne L_i allant

de O en M_i se déforme d'une manière continue en même temps que se déplace le point M_i et de telle façon qu'elle ne passe jamais par aucun point singulier, son extrémité M_i exceptée; dans ces conditions, dis-je, l'expression $j(L_i)$ est une constante.

Si le point M_i correspond à un plan tangent double ou triple, il y aura deux ou trois cycles évanouissants correspondant aux deux ou trois points de contact de ce plan avec la surface; l'intégrale $j(L_i)$ sera donc susceptible de deux ou trois valeurs entre lesquelles il faudra distinguer. Il en sera de même si le point M_i correspond à un plan tangent d'inflexion; seulement les deux cycles évanouissants correspondront alors à un même point de contact. A part cela, aucune différence avec ce qui se passe pour un plan tangent ordinaire.

Supposons maintenant que l'on prenne $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, de telle sorte que le plan (3 *bis*) se réduise au plan $y = \varepsilon$; on étudie ainsi les sections successives de la surface par des plans parallèles à $y = 0$; c'est le procédé qu'a employé M. Picard dans son Ouvrage et j'ai suivi son exemple dans le Mémoire cité.

Marquons dans le plan des y l'origine O correspondant au plan initial $y = 0$, et les points singuliers M_1, M_2, ..., M_q correspondant aux plans $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_q$ qui touchent la surface (1). Joignons OM_1, OM_2, ..., OM_q par des droites. Je considère une ligne L_i dont tous les points satisfont aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$; dans ce cas ε est seul variable et, comme notre plan (3 *bis*) a précisément pour équation $y = \varepsilon$, nous pouvons représenter la ligne L_i sur le plan des y. Je dis que l'intégrale $j(L_i)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers des intégrales

$$j(OM_1), \quad j(OM_2), \quad \ldots, \quad j(OM_q)$$

correspondant aux droites OM_i.

En effet, prolongeons les droites OM_1, OM_2, ..., OM_q jusqu'à l'infini; nous pourrons considérer les prolongements $M_i\infty$ des droites OM_i, comme des coupures.

Cela posé, la ligne L_i, tracée dans le plan des y, ira du point O au point M_i en traversant un certain nombre de coupures; supposons pour fixer les idées qu'elle traverse successivement les coupures $M_1\infty$ et $M_2\infty$; il faut en outre préciser le sens dans lequel elle les traverse; je supposerai, par exemple, que ce soit dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens qu'un mobile qui décrirait un cercle de rayon très grand dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Alors un mobile qui décrirait le *lacet* tout entier, c'est-à-dire L_i, puis

le contour infiniment petit C'_i, puis de nouveau L_i en sens contraire, coupera successivement les coupures $M_1\infty$, $M_2\infty$, $M_i\infty$ dans le sens direct, puis $M_2\infty$ et $M_1\infty$ dans le sens rétrograde. Le lacet primitif pourra donc être remplacé par cinq lacets rectilignes consécutifs, enveloppant respectivement les points singuliers M_1, M_2, M_i, M_2, M_1 et décrits les trois premiers dans le sens direct, les deux autres dans le sens rétrograde. Les intégrales correspondant à ces cinq lacets seront respectivement égales à

$$j(OM_1),\quad j(OM_2),\quad j(OM_i),\quad j(OM_2),\quad j(OM_1)$$

multipliées par des coefficients entiers convenables. La détermination de ces coefficients, dont quelques-uns d'ailleurs peuvent être nuls, dépend de la façon dont se transforment les cycles fondamentaux k_1, k_2, ..., k_{2p} quand on tourne autour des points singuliers.

Nous verrons plus loin comment on peut faire une réduction analogue, dans le cas où la ligne L_i n'est pas telle que tous ses points satisfassent aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. Mais, pour le moment, nous remarquerons que, dans le Mémoire cité du *Journal de Liouville*, j'ai démontré au paragraphe 3 que, sous certaines hypothèses, toutes les périodes de l'intégrale double J sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des expressions $j(OM_i)$; les points M_i correspondent en effet aux points A_i du Mémoire cité et les chemins rectilignes OM_i aux coupures OA_i.

Les combinaisons linéaires qui correspondent aux périodes de l'intégrale double sont les suivantes. Soit k'_i le cycle évanouissant, correspondant à OM_i; toute combinaison

$$\sum \nu_i\, j(OM_i),$$

où les ν_i sont des entiers tels que

$$\sum \nu_i k'_i = 0, \tag{5}$$

correspondra à une période.

Dans ce même Mémoire, à la fin du même paragraphe, j'ai montré que quelques-unes de ces combinaisons sont nulles; ce sont celles qui sont engendrées de la façon suivante : je suppose qu'on décrive successivement les différents lacets

$$OM_1,\quad OM_2,\quad \ldots,\quad OM_q$$

dans le sens direct et dans l'ordre où ces différents segments rectilignes se succèdent autour de O; de telle façon que le contour total se compose d'une ligne

fermée qui enveloppe tous les points singuliers M_i sans couper aucun des segments OM_i. On part d'ailleurs du point initial avec un cycle à une dimension quelconque k, et l'on revient, par conséquent, au point final avec ce même cycle. La combinaison correspondant à ce chemin sera nulle.

Mais il est nécessaire de revenir sur ce point; car, dans le Mémoire cité, j'ai supposé, entre autres hypothèses, qu'aucun des points singuliers A_i n'est rejeté à l'infini. Or, si l'on considère une surface

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

qui soit la plus générale de son degré; puis la section de cette surface par le plan (3 *bis*) $y = \varepsilon$ qui est la courbe plane C,

$$F(x, \varepsilon, z) = 0.$$

On peut dire que pour $\varepsilon = \infty$ cette courbe présente des singularités, et l'on pourrait, par conséquent, se demander si les résultats ne s'en trouvent pas modifiés.

Or le contour que nous venons de définir peut être remplacé par le suivant : la variable y décrit dans son plan un cercle de rayon très grand; en même temps la surface de Riemann correspondant à la courbe plane C se déforme d'une manière continue; nous avons sur cette surface un cycle fermé qui varie également d'une manière continue et revient à sa position initiale en même temps que la variable y; les variables x et z sont assujetties à rester sur ce cycle.

Supposons d'abord que P soit un polynome entier de degré $m - 3$ en x, y, z, de telle façon que l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dx}{F'_z} \tag{6}$$

soit une intégrale abélienne de première espèce.

Posons

$$x = uy, \qquad z = vy.$$

Nous voyons que P deviendra un polynome d'ordre $m - 3$ et F'_z un polynome d'ordre $m - 1$ en y, de telle sorte que $\frac{P}{F'_z}$ pourra se développer suivant les puissances décroissantes de y et que le premier terme sera un terme en $\frac{1}{y^2}$. Le coefficient de ce terme sera d'ailleurs

$$\frac{P_0(u, 1, v)}{F'_{0z}(u, 1, v)}$$

en désignant par $P_0(x, y, z)$, $F_0(x, y, z)$, $F'_{0z}(x, y, z)$ les termes du degré

le plus élevé en y de $P(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$. J'écrirai simplement $\frac{P_0}{F'_0}$ en supprimant l'indice v.

Nous avons d'autre part

$$dx\,dy = y\,du\,dy,$$

d'où

$$\int\int\frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int du\,dy\left(\frac{1}{y}\frac{P_0}{F'_0} + \ldots\right).$$

Le premier terme est seul sensible; il reste donc

$$(7)\qquad \int\int\frac{dy}{y}\frac{P_0\,du}{F'_0} = 2i\pi\int\frac{P_0\,du}{F'_0}.$$

$\int\frac{P_0\,du}{F'_0}$ est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$(8)\qquad F_0(u, 1, v) = 0.$$

Ainsi, notre période, qui est égale à l'expression (7), n'est pas nulle dans le cas qui nous occupe, mais elle a le caractère d'une période polaire et non d'une période cyclique.

Il en sera encore de même si P est de la forme $\frac{Q}{x-a}$, Q étant un polynome d'ordre $m-2$, c'est-à-dire si l'intégrale (6) a la forme d'une intégrale abélienne de troisième espèce ayant tous ses infinis à distance finie. Nous laisserons de côté, pour le moment, les cas où cette intégrale abélienne (6) aurait des infinis à distance infinie.

IV. — Théorie générale

J'ai cité plusieurs fois le travail que j'ai fait insérer dans le *Journal de Liouville*, comme 4[e] Complément à l'*Analysis situs*; je crois devoir non seulement en rappeler ici les résultats, mais les présenter sous une forme nouvelle, les différences portant non seulement sur le mode d'exposition, mais sur une convention fondamentale que je crois préférable de modifier. Quand on s'occupe des propriétés d'une surface algébrique au point de vue de l'*Analysis situs*, on s'aperçoit promptement que la question peut avoir un sens très différent selon la convention que l'on adoptera au sujet des points à l'infini. A l'égard d'une surface $F(x, y, z) = 0$, nous pouvons envisager plusieurs sortes de points à l'infini; nous avons d'abord ceux où x, y et z sont infinis à la fois, et ceux où deux seulement de ces trois coordonnées sont infinies. Je néglige ceux où deux

coordonnées sont finies et une infinie; ils n'existeraient en effet que, si la surface étant de degré m, par exemple, le polynome F ne contenait pas de terme en z^m, et ce cas, évidemment, ne se présentera pas en général.

On peut ne pas considérer comme distincts deux points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 toutes les fois que les six coordonnées de ces deux points sont infinies, et alors même que l'on n'aurait pas $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$; on regarderait, au contraire, ces deux points comme distincts si, par exemple, x_1, y_1, x_2, y_2 étaient infinis, z_1 et z_2 finis et z_1 différent de z_2. C'est le premier point de vue.

Au second point de vue, on regardera deux points à l'infini comme distincts toutes les fois que l'on n'aura pas

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Si, au contraire, z_1 et z_2 sont finis, le rapport $\frac{x_1}{y_1}$ sera égal au rapport $\frac{x_2}{y_2}$ puisqu'on l'obtiendra en égalant à zéro l'ensemble des termes de F qui sont de degré m en x et y; d'autre part, les rapports $\frac{z_1}{y_1}$ et $\frac{z_2}{y_2}$ seront égaux entre eux et égaux à zéro, et les deux points devront être regardés comme non distincts, contrairement au premier point de vue, alors même que z_1 ne serait pas égal à z_2.

Dans le Mémoire cité, je m'étais placé au premier point de vue, et c'est également ce que M. Picard avait fait le plus souvent. Ce premier point de vue peut être le plus avantageux dans certains cas, mais il a l'inconvénient de n'être pas *projectif*, ce qui m'empêcherait d'appliquer les principes des deux paragraphes précédents et j'adopterai le second.

Si nous considérons y comme une constante, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

définira une courbe algébrique et par conséquent une surface de Riemann que j'appelle S(y). J'observe d'abord que deux surfaces de Riemann S(y_1) et S(y_2) ont un certain nombre de points communs.

Soit, en effet, $F_m(x, 0, z)$ l'ensemble des termes de F qui sont d'ordre m en x et en z; l'équation $F_m(x, 0, z) = 0$ définira m valeurs du rapport $\frac{x}{z}$, qui correspondront aux directions asymptotiques de la courbe algébrique

$$F(x, y_1, z) = 0,$$

directions qui seront d'ailleurs les mêmes que celles de la courbe

$F(x, y_2, z) = 0$; à ces m directions asymptotiques correspondront m points à l'infini sur la surface $S(y_1)$ et de même m points à l'infini sur la surface $S(y_2)$. D'après la convention que nous venons de faire, *les m points à l'infini de* $S(y_1)$ *ne différeront pas de ceux de* $S(y_2)$.

Pour $y = \infty$, nous avons la surface de Riemann $S(\infty)$ dont les différents points correspondent aux différents systèmes de valeurs des rapports de x, y et z satisfaisant à l'équation

$$F_m(x, y, z) = 0,$$

où F_m est l'ensemble des termes de F de degré m en x, y et z; ou, en d'autres termes, aux différents points à l'infini de la surface $F = 0$. Parmi les points de la surface $S(\infty)$, nous distinguerons ceux qui sont donnés par

$$F_m(x, 0, z) = 0,$$

et qui lui sont communs avec les autres surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$, ...

Pour certaines valeurs de y, le genre de la surface $S(y)$ s'abaisse, ce sont celles qui correspondent à un plan $y = \text{const.}$ tangent à la surface $F = 0$. Soient

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_h$$

ces valeurs singulières de y.

Il faut maintenant que je définisse ce que j'appelle la *projection* d'une surface $S(y_1)$ sur une autre surface $S(y_2)$ *quand je suppose que y_1 et y_2 ont même argument*. A chaque point de $S(y_1)$ je ferai correspondre un point de $S(y_2)$ et inversement, et cela d'une façon biunivoque, et je dirai que l'un de ces points est la projection de l'autre. Je m'arrangerai de façon que deux points infiniment voisins aient pour projections deux points infiniment voisins et, par conséquent, qu'une courbe continue se projette suivant une courbe continue et une courbe fermée suivant une courbe fermée. De plus, je m'arrangerai de façon que les m points à l'infini qui sont communs aux deux surfaces soient leur propre projection. Il est clair que toutes ces conditions peuvent être remplies.

Imposons-nous maintenant une condition de plus. Soient y_1, y_2, y'_1, y'_2 quatre valeurs de y; y_1 et y_2 d'une part, y'_1 et y'_2 d'autre part ont même argument; d'ailleurs y_1 diffère très peu de y'_1 et y_2 de y'_2. Je considérerai alors deux points M_1 et M'_1 des deux surfaces $S(y_1)$ et $S(y'_1)$ et leurs projections M_2 et M'_2 sur $S(y_2)$ et $S(y'_2)$, et *je supposerai que, si M_1 et M'_1 sont infiniment voisins, il en est de même de M_2 et M'_2.*

Cette condition ne peut pas toujours être remplie. Traçons dans le plan

des y le quadrilatère rectiligne $y_1 y'_1 y'_2 y_2$, dont deux côtés $y_1 y'_1$ et $y'_2 y_2$ sont infiniment petits. Si à l'intérieur de ce quadrilatère se trouve l'un des points singuliers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$, la condition ne pourra être remplie. Nous joindrons donc dans le plan des y l'origine O aux différents points singuliers ε_i; les droites ainsi tracées partageront le plan en secteurs et la condition devra être remplie à l'intérieur de chacun des secteurs. Si maintenant y_1 et y'_1, et, par conséquent, y_2 et y'_2 n'appartiennent pas à un même secteur, la condition pourra ne pas être remplie; elle le sera si $|y_1|$ et $|y_2|$ (et par conséquent $|y'_1|$ et $|y'_2|$) sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que $|\varepsilon_i|$ (ε_i étant le point singulier qui se trouve entre les deux rayons infiniment voisins Oy_2y_1 et Oy'_2x_1); elle ne le sera pas dans le cas contraire.

Cela posé, envisageons un cycle fermé à deux dimensions quelconques de la variété V à quatre dimensions dont les différents points réels correspondent aux différents points réels et imaginaires, *regardés comme distincts*, de la surface $F=0$. (Pour expliquer ce qu'on entend par regardés comme distincts, je rappellerai la convention que nous venons de faire au sujet des points à l'infini et, d'autre part, que si la surface a une courbe double, aux deux nappes qui se coupent en un point de cette courbe, doivent correspondre deux points distincts de V.) Soit K ce cycle fermé à deux dimensions.

Considérons un point de ce cycle, et marquons sur le plan des y la valeur correspondante de y; à chaque point de K correspondra donc ainsi un point du plan des y, et inversement à certains points de ce plan pourront correspondre un ou plusieurs points du plan de K. Nous sommes ainsi conduits à partager le plan des y en régions diverses, les régions R_0 aux points desquelles ne correspond aucun point y, les régions R_1 aux points desquelles correspond un seul point y, les régions R_2 aux points desquelles correspondent deux points y, etc.

Cela suppose toutefois que le cycle K ne passe par aucun des m points à l'infini communs à toutes les surfaces $S(y)$, sans quoi la valeur correspondante de y serait indéterminée. S'il en était autrement, on déformerait légèrement le cycle K de façon qu'il cesse de passer par ces points.

Ce n'est pas tout, ce cycle K est tel que, dans le voisinage de chacun de ces points, les parties réelles et imaginaires de x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v; si nous considérons donc deux domaines à deux dimensions faisant partie de ce cycle, et de telle façon que dans le premier tout s'exprime en fonction de u et v, et dans le second en fonction

de deux autres paramètres u' et v' : si ces deux domaines ont une partie commune, le signe du déterminant fonctionnel de u et v par rapport à u' et v' sera constant dans toute cette partie commune.

Si nous supposons, comme il convient, que le cycle K *est bilatère*, nous pourrons supposer sans restreindre la généralité que ces paramètres u, v, u', v' ont été choisis dans chaque domaine de telle façon que ce déterminant fonctionnel soit toujours positif.

Soit alors Δ le déterminant fonctionnel de u et v par rapport à y_1 et y_2, en désignant pour un instant par y_1 et y_2 les parties réelle et imaginaire de y. Le signe de ce déterminant ne changera pas, d'après la convention que nous venons de faire, quand on passera de u et v à deux autres paramètres u' et v'. Soit alors un point de l'une des régions R_n dont nous venons de parler; à ce point correspondront n points du cycle K; je suppose qu'il y en ait p pour lesquels Δ soit positif et $n-p$ pour lesquels Δ soit négatif. Eh bien, *l'excès* $2p-n$ *sera constant pour tous les points du plan des* y *et pour toutes les régions* R_0, R_1, ...

D'où l'on peut conclure que le nombre n relatif aux diverses régions R_n est constamment de même parité. S'il y a des régions R_0, l'excès $2p-n$ est constamment nul.

Nous examinerons d'abord le cas où le point $y=0$ et le point $y=\infty$ appartiennent l'un et l'autre à une région R_0. Coupons notre cycle K par la variété

$$\arg y = \text{const.}$$

Cette variété sera représentée sur le plan des y par une demi-droite allant de l'origine à l'infini. Nous remarquerons que cette demi-droite, partant de l'intérieur d'une région R_0, traverse des régions R_n ($n>0$) et aboutit finalement à l'intérieur d'une région R_0. Si donc nous envisageons les points qui appartiennent à la fois à cette variété et au cycle K, le module de y variera pour ces points entre un certain minimum et un certain maximum. *Il en résulte que l'intersection de cette variété et de* K *sera un cycle fermé à une dimension* que j'appelle (K, ω), ω étant l'argument constant de y.

Tous les points de (K, ω) appartiennent à une surface de Riemann S(y), où $y=\rho e^{i\omega}$ a un argument constant ω; nous pouvons donc les *projeter* sur l'une quelconque d'entre elles S($\rho_0 e^{i\omega}$) et, par exemple, sur S(0); j'appellerai (K, ω, 0) la projection du cycle (K, ω) sur S(0). Comparons maintenant (K, ω, 0) à (K, ω', 0); si ω diffère très peu de ω', il résulte des conventions

faites plus haut que (K, ω, o) différera très peu de (K, ω', o), *à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'*. Si nous adoptons la notion de l'*homologie*, nous aurons donc, sur la surface $S(o)$, l'homologie

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o)$$

et elle subsistera quand même ω et ω' différeront d'une quantité finie (puisque cette homologie signifie précisément que l'on peut passer d'un cycle à l'autre par déformation continue); elle subsistera, dis-je, à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'; ou, en d'autres termes, toutes les fois que les demi-droites correspondant aux arguments ω et ω' appartiennent à un même secteur (si l'on suppose le plan divisé en secteurs par les droites $O\varepsilon_k$ et leurs prolongements).

Comparons maintenant les cycles (K, ω, o), (K, ω', o) en admettant qu'il y ait un point ε_k dont l'argument soit compris entre ω et ω'. Projetons les deux cycles (K, ω) et (K, ω') non plus sur $S(o)$, mais sur les deux surfaces de Riemann $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ qui diffèrent très peu l'une de l'autre; soient Π et Π' ces deux projections; ce sont deux cycles appartenant respectivement aux deux surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$. Soit Π'', un cycle de la première surface qui diffère infiniment peu du cycle Π' lequel appartient à la deuxième surface, infiniment peu différente de la première. Quand ρ_0 décroîtra d'une manière continue de ∞ à o, Π' et Π'' et par conséquent Π'' et $\Pi - \Pi''$ varieront d'une manière continue. Pour $\rho_0 = o$, nous aurons

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o) = \Pi - \Pi''.$$

Faisons maintenant $\rho_0 = |\varepsilon_k|$; je dis que pour cette valeur de ρ_0 les cycles Π, Π' et Π'' différeront infiniment peu l'un de l'autre. En effet, dans le cycle (K, ω), nous distinguerons deux parties, que nous appellerons H et H_1; la première comprendra les points tels que $|y| < |\varepsilon_k|$, et la seconde les points tels que $|y| > |\varepsilon_k|$. De même dans le cycle (L, ω') nous distinguerons deux parties H' et H'_1. Alors H différera infiniment peu de H' et H_1 de H'_1. Projetons H et H' sur les surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$, $S(\rho_0 e^{i\omega'})$, où $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$, δ étant infiniment petit et positif; les projections seront infiniment peu différentes. Si nous considérons en effet deux points très peu différents de H et H' pour lesquels y a respectivement pour valeur $\rho_0 e^{i\omega}$, $\rho_0 e^{i\omega'}$, $(\rho < |\varepsilon_k|)$ et leurs projections pour lesquelles y a pour module $|\varepsilon_k| - \delta$, le quadrilatère rectiligne formé par ces quatre valeurs de y ne contient pas ε_k à son intérieur.

Donc les projections de ces deux points différeront très peu d'après les conventions faites plus haut; les projections de H et de H′ sur les surfaces $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$ et par conséquent sur les surfaces infiniment voisines $\rho_0 = |\varepsilon_k|$ différeront donc très peu. On le démontrerait de même pour les projections de H_1 et de H'_1.

Donc, pour $\rho_0 = |\varepsilon_k|$, H et H′ diffèrent très peu; le cycle $H - H''$ est infiniment petit, c'est un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si ω *et* ω' *n'appartiennent pas à un même secteur, mais à deux secteurs contigus séparés par la droite* $O\varepsilon_k$, *les cycles*

$$(K, \omega, 0), \quad (K, \omega', 0)$$

ne sont plus homologues en général, mais leur différence est homologue à un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Pour aller plus loin, précisons davantage la notion de *projection*. Nous joignons l'origine O par des segments de droite $O\varepsilon_k$ aux différents points singuliers ε_k et nous regardons ces segments comme des coupures. Tant que y ne franchira pas ces coupures, la surface $S(y)$ restera *homéomorphe* à elle-même; nous pouvons donc établir entre les points des deux surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$ quelconques une correspondance biunivoque telle que, lorsqu'un point M variera d'une manière continue sur une surface $S(y_1)$ et qu'en même temps y variera d'une façon continue mais *sans franchir les coupures*, le point M′ de $S(y)$ qui correspond à M variera d'une façon continue. Seulement, si l'on a deux points y_1 et y_2 infiniment voisins l'un de l'autre, mais de part et d'autre d'une coupure, et deux points M_1 et M_2 se correspondant sur $S(y_1)$ et $S(y_2)$, ces deux points ne seront pas, en général, infiniment voisins. C'est cette correspondance qui servira à définir la *projection* en se restreignant alors aux cas où y_1 et y_2 ont même argument.

Considérons maintenant une coupure $O\varepsilon_k$ et le point singulier correspondant ε_k. Soient y_1 et y_2, y'_1 et y'_2 deux couples de points; je suppose que y_1 et y_2 soient infiniment voisins et de part et d'autre de la coupure et qu'il en soit de même pour le second couple. Soient M_1 un point de $S(y_1)$ et M_2 un point de $S(y_2)$, infiniment voisin de M. D'après ce que nous venons de voir, M_1 et M_2 ne peuvent être correspondants. Soit maintenant M'_1 le point de $S(y'_1)$ correspondant de M_1, et M'_2 le point de $S(y'_2)$ correspondant de M_2. Les deux points

M_1 et M_2 seront infiniment voisins, il est toujours possible de le supposer. En revanche il y a une chose que nous ne pourrions supposer sans nous lancer dans de grosses difficultés. Soit η un point de la coupure; considérons la surface de Riemann correspondante, nous l'appellerons $S(\eta)$ si y a atteint η par l'une des lèvres de la coupure, et $S(\eta')$ si y a atteint η par l'autre lèvre. Les deux surfaces $S(\eta)$ et $S(\eta')$ sont identiques; mais le point de cette surface qui correspond à un point donné d'une autre surface $S(y)$ ne sera pas le même selon qu'il sera regardé comme appartenant à $S(\eta)$ ou à $S(\eta')$. Il en résulte qu'il y a une correspondance entre les points de $S(\eta)$ et ceux de $S(\eta')$; on peut se demander si cette correspondance est réciproque; mais on voit bientôt qu'il n'est pas permis en général de supposer cette réciprocité.

Différents cas sont à distinguer suivant la nature du point singulier ε_k; le plus simple est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ est tangent à la surface $F = 0$ et la coupe suivant une courbe présentant un point double ordinaire à tangentes séparées. Que pouvons-nous dire alors de la correspondance entre les points de $S(\eta)$ et de $S(\eta')$; soit p le genre de la surface $S(\eta)$; soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ un système de cycles fondamentaux de $S(\eta)$; soient $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{2p}$ les cycles correspondants de $S(\eta')$; on verrait qu'on peut choisir les cycles fondamentaux de telle façon que l'on ait

$$\Omega'_1 = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega'_2 = \Omega_2, \quad \Omega'_3 = \Omega_3, \quad \ldots.$$

Alors Ω_2 est un cycle *évanouissant* relatif au point singulier ε_k.

Pour nous rendre compte de la correspondance entre les points de $S(\eta)$ et de $S(\eta')$, nous pouvons supposer que dans un espace E à six dimensions, par exemple, on construise la variété V à quatre dimensions, et qu'on se soit arrangé pour que cette variété n'ait pas de point double et que tous ses points soient à distance finie. Les points de V qui correspondent à une valeur donnée de y formeront alors une surface *fermée* à deux dimensions de l'espace E qui n'aura en général aucun point singulier et qui sera notre $S(y)$. Cependant la surface $S(\varepsilon_k)$ admettra un point conique P. Si η est très voisin de ε_k, la surface $S(\eta)$, identique à $S(\eta')$, présentera donc un *étranglement* dans le voisinage du point P. Nous pourrons tracer sur $S(\eta)$ une petite ligne fermée qui embrasse la partie la plus étroite de cet étranglement (tel le cercle de gorge sur un hyperboloïde de révolution à une nappe). Ce sera notre cycle évanouissant Ω_2; nous pourrons tracer dans le voisinage du point P une série de cycles fermés analogues sur $S(\eta)$ tels que seraient les différents parallèles sur un hyperboloïde de révolution; nous pouvons ensuite définir un point quelconque

de $S(\eta)$, *au moins dans la partie étranglée voisine du point* P, par deux coordonnées ρ et ω, choisies de telle sorte que ρ soit constant tout le long de chacun de ces cycles fermés, et que ω augmente de 2π quand on fait le tour d'un de ces cycles. Nous pourrons alors admettre la loi de correspondance suivante : dans la partie non voisine du point P, ou toutes les fois que ρ ne sera pas compris entre ρ_0 et ρ_1, chaque point de $S(\eta)$ sera son propre correspondant. Si ρ est compris entre ρ_0 et ρ_1, nous ferons correspondre au point ρ, ω de $S(\eta)$ le point $\rho, \omega + \varphi(\rho)$ de $S(\eta')$; et $\varphi(\rho)$ sera une fonction continue de ρ constamment croissante, égale à o pour $\rho = \rho_0$ et à 2π pour $\rho = \rho_1$. En d'autres termes nous ferons subir à la partie étranglée comprise entre les cclyes $\rho = \rho_0$ et $\rho = \rho_1$ une torsion progressivement croissante d'un cycle à l'autre, de telle façon que cette torsion, nulle pour $\rho = \rho_0$, atteigne un tour complet pour $\rho = \rho_1$, ce qui permet le raccordement avec la partie non étranglée, supposée non déformée.

A mesure que η s'éloignera de ε_k, l'étranglement sera de moins en moins prononcé et nous serons conduits à étendre la déformation à une partie de plus en plus étendue de la surface ; cette loi de correspondance restera néanmoins arbitraire dans une très large mesure.

Ces conventions faites, projetons maintenant le cycle (K, ω) sur la surface $S(\eta)$ en supposant que ω soit l'argument de ε_k; nous obtiendrons deux projections différentes, selon que l'on supposera que cet argument ω a été atteint par l'une ou par l'autre lèvre de la coupure, c'est-à-dire selon que l'on projettera sur $S(\eta)$ ou sur $S(\eta')$. Soient (K, ω, η), (K, ω, η') ces deux projections. Soit M un point de (K, ω); N sa projection sur $S(\eta)$, N' sa projection sur $S(\eta')$. N et N' seront identiques si l'y du point M est plus petit en valeur absolue que ε_k. Dans le cas contraire, ces deux points seront *correspondants* conformément à la loi de correspondance adoptée plus haut. La différence des deux cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ sera alors un cycle de $S(\eta)$ homologue à zéro, au cycle évanouissant Ω_2, ou à un de ses multiples.

L'ensemble des cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ quand on fait varier η depuis zéro jusqu'à ε_k engendrera une variété $\Delta(\varepsilon_k)$ à deux dimensions. Le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ est toujours homologue à un multiple de Ω_2 : supposons, par exemple, à Ω_2 : il se réduit au point P pour $\eta = \varepsilon_k$; mais, pour $\eta = o$, il ne se réduit pas à un point, mais à un cycle de la surface $S(o)$ qui est encore homologue à Ω_2 et que nous pourrons appeler

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0).$$

La variété $\Delta(\varepsilon_k)$, que nous pourons appeler un *doigt* à cause de sa forme, n'est donc pas fermée, mais a pour frontière le cycle

$$(K, \omega, o) - (K, \omega, o').$$

Mais, jusqu'ici, nous avons supposé que Ω_2 n'est pas homologue à zéro, c'est-à-dire que le cycle infiniment petit que l'on peut tracer sur $S(\eta)$ quand η est très voisin de ε_k ne partage pas cette surface en deux régions distinctes. Mais le cas contraire peut aussi se présenter; il arrive alors que la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose en deux surfaces distinctes, c'est-à-dire que la courbe intersection de $F = o$ et de $y = \varepsilon_k$ est décomposable.

Dans ce cas, le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ décomposera la surface $S(\eta)$ en deux régions que nous appellerons $S_1(\eta)$ et $S_2(\eta)$. Considérons la variété à trois dimensions engendrée par $S_1(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k; elle sera limitée d'une part par le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, par $S_1(o)$ qui est une partie de $S(o)$ et par $S_1(\varepsilon_k)$; de sorte que

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim S_1(\varepsilon_k) - S_1(o).$$

Mais $S_1(\varepsilon_k)$ *n'est autre chose que la surface de Riemann relative à l'une des composantes de la courbe d'intersection de* $F = o$ *et* $y = \varepsilon_k$; ce qui nous fait comprendre la signification du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ dans ce cas particulier.

Revenons au cas général et reportons-nous à un paragraphe précédent, nous verrons que nous y avons défini une intégrale

$$j(L_i);$$

eh bien! cette intégrale n'est autre chose que l'intégrale prise le long du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ lorsque la ligne L_i parcourue par le point α, β, γ, ε est telle que α et γ soient constamment nuls, β égal à 1, et que ε varie avec un argument constant de zéro à ε_k.

Un autre cas est celui où le point singulier ε_k correspond à un point conique ordinaire de la surface $F = o$. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + 2\Omega_2, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

et non plus en $\Omega_1 + \Omega_2$, Ω_2, ..., Ω_{2p}. Ce que nous avons dit de la loi de correspondance subsiste; seulement la fonction $\varphi(\rho)$, qui croît constamment depuis $\rho = \rho_0$ jusqu'à $\rho = \rho_1$, au lieu de croître de zéro à 2π, croîtra de zéro à 4π. La définition du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ restera la même.

Il peut arriver ensuite que le plan $y = \varepsilon_k$ soit tangent à $F = o$ en deux points

différents. Alors la surface $S(\eta)$ très voisine de $S(\varepsilon_k)$ présente deux étranglements au lieu d'un, il y a deux cycles *évanouissants* au lieu d'un, d'où résulte la circonstance suivante :

Appelons *doigt simple* et désignons par $\Delta(\varepsilon_k, \Omega)$ la variété engendrée par un cycle de $S(\eta)$ qui reste homologue à Ω quand on fait varier η de zéro à ε_k. Notre doigt défini plus haut et que nous continuerons à appeler simplement $\Delta(\varepsilon_k)$ serait dans cette notation

$$\Delta[\varepsilon_k, (K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')].$$

Dans les cas examinés plus haut, il n'y avait qu'un cycle évanouissant Ω_2, le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ était toujours homologue à un multiple de Ω_2, soit à $n\Omega_2$, de sorte qu'on avait toujours

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(o),$$

$\sigma(o)$ désignant une partie de $S(o)$.

Ici, au contraire, nous aurons deux cycles évanouissants Ω_2, Ω'_2 et deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega'_2)$ et l'on aura, quel que soit le cycle k,

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + n'\Delta(\varepsilon_k, \Omega'_2) + \sigma(o),$$

n et n' étant entiers, de sorte que $\Delta(\varepsilon_k)$ s'exprimera linéairement en fonction non plus d'un, mais de deux doigts simples.

Il peut arriver que l'un des cycles Ω_2 et Ω'_2 qui correspondent aux deux étranglements soit homologue à zéro sur sa surface; soit, par exemple, Ω'_2; dans ce cas la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose et le doigt simple $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ est alors homologue à l'une des composantes de cette surface de Riemann, plus une région de $S(o)$. C'est ce que nous avons vu plus haut.

Nous examinerons un dernier cas, c'est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ coupe $F = o$ suivant une courbe présentant un point de rebroussement. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 - \Omega_2, \quad -\Omega_1, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p},$$

de sorte qu'il y a deux cycles évanouissants

$$\Omega_1, \quad \Omega_2$$

et par conséquent deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ dont le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers.

V. Formation des cycles.

Cela posé, reprenons le cycle K, menons les projetantes de ses différents points et prolongeons-les jusqu'à la surface S(o). Ces projetantes engendreront une variété W à trois dimensions. Quelles sont les frontières de cette variété? Ce sera d'abord le cycle K dont chaque point est l'extrémité de l'une des projetantes; ce sera ensuite une portion $S_2(o)$ de la surface $S(o)$; car l'autre extrémité de chaque projetante se trouve sur cette surface. Mais ce n'est pas tout; deux projetantes issues de deux points infiniment voisins pourront ne pas rester infiniment voisines; si, par exemple, ω et ω' sont deux arguments infiniment voisins, l'un plus grand, l'autre plus petit que celui de ε_k, les projetantes issues des deux cycles à une dimension (K, ω) et (K, ω') se sépareront et s'étaleront sur le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, de sorte que ces doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ complètent la frontière de W. Je puis donc écrire

$$K \sim S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k).$$

$\Delta(\varepsilon_k)$ a pour frontière $(K, \omega, o) - (K, \omega, o')$; $S_2(o)$ aura pour frontières

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')]$$

de telle façon que la variété totale $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$ soit, comme il convient, une variété fermée.

Soit J l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z}$$

étendue à K. Elle sera égale à l'intégrale étendue à $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$. Étendue à $S_2(o)$ elle est nulle, puisque, le long de cette surface, y est constant et que

$$dx\,dy = 0.$$

L'intégrale étendue à $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire des intégrales étendues aux différents doigts simples correspondants, intégrales que nous avons appelées $j(L_i)$.

L'intégrale J est donc une combinaison linéaire des intégrales $j(L_i)$, la ligne L_i étant telle que $z = y = 0$, $\beta = 1$. C'est ce que nous avions annoncé dans un paragraphe antérieur.

J'ai dit que la surface $S_2(o)$ a pour frontière

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')],$$

de sorte que

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')] \sim o$$

sur la surface $S(o)$. Supposons que les doigts simples correspondant à $\Delta(\varepsilon_k)$ soient $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ et soient Ω_1^0 et Ω_2^0 les cycles correspondants de $S(o)$.

Soit

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n_1 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_1) + n_2 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(o),$$

on aura sur $S(o)$

$$(K, \omega, o) - (K, \omega, o') \sim n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0,$$

d'où

$$\sum (n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0) \sim o$$

sur $S(o)$.

Ainsi pour un cycle K *de l'espèce considérée, mais quelconque, on aura toujours*

(1) $$K \sim S_2(o) - \sum n_i \Delta(\varepsilon_k, \Omega_i),$$

$S_2(o)$ *étant une partie de* $S(o)$, n_i *un entier et* Ω_i *un des cycles évanouissants relatifs à* ε_k; *d'ailleurs les entiers* n_i *et les cycles* Ω_i *ne devront pas être quelconques, car on devra avoir sur* $S(o)$

(2) $$\sum n_i \Omega_i^0 \sim o,$$

Ω_i^0 *étant le cycle de* $S(o)$ *qui correspond à* Ω_i.

Mais nous nous sommes jusqu'ici restreints au cas où le point $y = o$, de même que le point $y = \infty$, correspondait à une région R_0 par rapport à K, c'est-à-dire où, pour aucun point du cycle C, on n'a ni $y = o$, ni $y = \infty$. Les cycles qui satisfont à cette condition pourront s'appeler de la *première sorte* et l'on voit que tout cycle de la première sorte peut être ramené à la forme (1).

Passons aux cycles de la *seconde sorte*, ce seront ceux où l'excès $2p - n$ dont il a été question au paragraphe IV du nombre des points pour lesquels le déterminant Δ est positif sur celui des points où ce déterminant est négatif, où cet excès, dis-je (constant pour tout le plan des y d'après ce que nous avons vu), est constamment nul. Je dis que tout cycle de la seconde sorte peut être ramené à la première.

Supposons en effet qu'un cycle K admette $2h$ points pour lesquels $y = 0$, et que h de ces points soient tels que $\Delta > 0$ et h tels que $\Delta < 0$. Accouplons ces points deux à deux de telle façon qu'à un point tel que $\Delta > 0$ soit associé un point tel que $\Delta < 0$. Soient M_1 et M_2 un pareil couple de points. Entourons M_1 sur le cycle K d'un contour infiniment petit C_1; soit D_1 la portion très petite de K limitée par ce contour. Définissons de même autour de M_2 le contour C_2 et le domaine D_2; nous pourrons supposer que les valeurs de y correspondant aux différents points de C_1 soient les mêmes que celles qui correspondent aux différents points de C_2. Ces valeurs formeront alors dans le plan des y un contour fermé très petit Γ entourant le point $y = 0$; je puis alors imaginer un contour mobile C à une dimension et un domaine mobile D à deux dimensions satisfaisant aux conditions suivantes : 1° le contour C sera la frontière de D; 2° C et D varieront d'une manière continue; 3° initialement C et D se confondront avec C_1 et D_1, et finalement avec C_2 et D_2; 4° les valeurs de y correspondant au contour C seront sur le contour fermé très petit Γ.

Dans ces conditions, C engendrera une variété à deux dimensions U, et D une variété à trois dimensions W. La frontière complète de W se composera de U, D_1 et D_2. Car W est assimilable à un cylindre dont U serait la surface latérale et D_1 et D_2 les deux bases; on aura donc

$$U \sim D_1 + D_2,$$

d'où

$$K \sim K - D_1 - D_2 + U.$$

Aussi nous pouvons remplacer K par $K - D_1 - D_2 + U$: ce cycle a perdu ainsi les deux points M_1 et M_2 et n'a gagné aucun autre point pour lequel $y = 0$, car sur U la variable y reste constamment sur le contour Γ, qui ne passe pas par $y = 0$. En opérant de même sur tous les autres couples de points, nous ferons disparaître tous les points pour lesquels $y = 0$. On ferait disparaître de même tous les points pour lesquels $y = \infty$, de sorte que le cycle se trouverait ramené à la première sorte.

Restent enfin les cycles pour lesquels l'excès $2p - n$ n'est pas nul. Le premier d'entre eux nous est fourni par la surface de Riemann

$$x = x_0,$$

où x_0 est une constante quelconque.

Pour cette surface, en effet, l'excès en question est égal au degré de la surface $F = 0$, que j'appellerai m; car à un point $y = y_0$ du plan des y correspon-

dront m points de la surface dont le z sera donné par l'équation

$$F(x_0, y_0, z) = 0.$$

(Dans certains cas particuliers, le degré de cette équation en z est plus petit que celui de la surface $F = 0$; c'est alors le degré de l'équation en z que nous appellerons m.)

Pour ces m points le déterminant Δ est positif; l'excès $2p - n$ est bien égal à m.

Soit donc K un cycle pour lequel cet excès soit égal à q et H le cycle $x = x_0$.

Alors le cycle $m\text{K} - q\text{H}$ aura pour excès zéro; il sera donc de la deuxième sorte et pourra être ramené à la première.

Donc le cycle $m\text{K}$ sera homologue à q fois le cycle $x = x_0$ plus un cycle de la forme (1).

Ici nous apercevons une des différences les plus importantes entre les résultats qui ressortent de la convention adoptée ici et de celle qui était adoptée dans le Mémoire cité. Considérons l'intersection de la surface $F = 0$ avec le plan

$$P_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$$

et l'intersection de la même surface avec le plan

$$P_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0.$$

A ces deux courbes correspondront deux surfaces de Riemann et, par conséquent, deux cycles à deux dimensions que j'appellerai K_1 et K_2. Je dis qu'on aura

$$K_1 \sim K_2.$$

En effet, considérons les intersections de $F = 0$ avec $P_1 + \lambda P_2 = 0$, où λ est réel et positif, mais varie d'ailleurs de 0 à ∞; les points de ces différentes intersections engendreront une variété W à trois dimensions. Quelle est la frontière de W? Elle se compose des deux cycles K_1 et K_2, de sorte que

$$K_1 \sim K_2.$$

Il ne pourrait y avoir de doute qu'en ce qui concerne les points à l'infini des courbes

$$F = P_1 + \lambda P_2 = 0.$$

ce sont des points de la surface de Riemann $S(\infty)$; à chaque valeur de λ correspondent un nombre fini de ces points, de sorte que, quand λ variera de 0

à l'∞, ces points décriront une ligne à une dimension seulement qui ne saurait constituer une frontière pour W qui en a trois.

Ainsi le cycle K_1, le cycle K_2 sont homologues entre eux, homologués par conséquent aussi au cycle $S(0)$, ou au cycle $S(y)$ quel que soit y, ou au cycle $x = x_0$.

Il n'en serait pas de même avec la convention du Mémoire cité, car pour $P_1 = z$, par exemple, on pourrait faire tendre x et y vers l'infini et en même temps λ vers zéro, de telle sorte que P_2 tend vers l'infini et $-\lambda P_2 = P_1 = z$ tende vers une limite finie quelconque; or avec cette convention les points $x = y = \infty$, $z = z_1$ et $x = y = \infty$, $z = z_2$ seraient regardés comme distincts et engendreraient une variété à deux dimensions que j'appellerai Z quand z_1 et z_2 prendraient toutes les valeurs possibles. Alors la frontière de W se composerait non seulement de K_1 et de K_2, mais encore de Z.

On a donc alors

$$K_2 \sim K_1 + Z.$$

Soient de même X la variété à deux dimensions formée par les points où x est fini, y et z infinis, et Y celle qui est formée par les points où y est fini, x et z infinis; on aura alors

$$K_1 \sim X + Y$$

et

$$K_2 \sim X + Y + Z.$$

et cette homologie sera vraie pour tous les cycles K_2 engendrés par les points satisfaisant à l'équation $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$, *à moins que deux des coefficients* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *ne soient nuls à la fois*, auquel cas le second membre devrait être remplacé par $X + Y$ si $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, par $X + Z$ si $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$, par $Y + Z$ si $\beta_2 = \gamma_2 = 0$.

Je n'entrerai pas dans plus de détails et ne rechercherai pas s'il y a une homologie entre X, Y, Z, me contentant de faire remarquer que le cycle $x = x_0$ n'est pas homologue à $S(0)$.

Au contraire, avec la convention nouvelle, tous les cycles engendrés par les points satisfaisant à une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

sont homologues entre eux et, en particulier, il en est ainsi de $S(0)$ et du cycle $x = x_0$.

Nous devons toutefois faire observer que, pour certaines valeurs des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le cycle $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ peut se décomposer et que, en

particulier, la surface de Riemann $S(y)$ peut se décomposer pour certaines valeurs de y.

Supposons donc que la surface $S(y)$, indécomposable pour la valeur la plus générale de y, se décompose en $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$ pour $y = \varepsilon_k$. Il est clair qu'on aura alors

$$S(y) \sim S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k),$$

mais qu'il n'y aura en général aucune homologie entre $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$; nous avons vu d'ailleurs qu'il arrive alors que $S_1(\varepsilon_k)$ est homologue au doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, plus une portion de $S(0)$.

VI. — Homologies entre les cycles.

Ainsi tous nos cycles peuvent se ramener à $S(0)$ ou à un cycle de la forme (1). Tous les cycles que l'on peut former ainsi sont-ils distincts? Toute combinaison de $S(0)$ et de cycles de la forme (1) est elle-même une combinaison de la forme (1) et, par conséquent, en tous ses points y est nul ou appartient à l'une des coupures. Est-il possible qu'une pareille combinaison soit homologue à zéro? C'est-à-dire existe-t-il une variété à trois dimensions W dont une pareille combinaison forme la frontière complète?

Soit W une pareille variété, soit y_0 une valeur de y n'appartenant pas à l'une des coupures; soit $W(y_0)$ l'ensemble des points de W pour lesquels $y = y_0$; alors $W(y_0)$ formera une ligne ou variété à une dimension. Cette ligne $W(y_0)$ peut-elle aboutir à un point d'arrêt? Non, car ce point d'arrêt appartiendrait à la frontière de W, ce qui est impossible, puisque, pour tous les points de cette frontière, y est nul ou se trouve sur l'une des coupures et ne peut, par conséquent, être égal à y_0. A moins que ce point d'arrêt ne soit l'un des m points communs à toutes les surfaces de Riemann $S(y)$ et qui sont donnés, comme nous l'avons vu plus haut, par l'équation

$$F_m(x, 0, z) = 0.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ces m points.

Ainsi, $W(y_0)$ se composera de cycles fermés et de lignes allant de l'un des points Q à un autre.

La ligne $W(y_0)$ appartient à la surface $S(y_0)$; considérons sur la surface $S(y_1)$ les points qui correspondent à ceux de $W(y_0)$ en vertu de la loi de cor-

respondance adoptée plus haut; soit $W(y_0, y_1)$ l'ensemble de ces points. Je dis que la ligne $W(y_0, y_1)$ restera toujours homologue à elle-même sur la surface $S(y_1)$ quand y_1 restant constant on fera varier y_0. Si en effet y_0 varie d'une façon continue, $W(y_0)$ et par conséquent $W(y_0, y_1)$ varieront d'une façon continue, sans quoi le $W(y_0)$ pour lequel une discontinuité se produirait devrait appartenir à la frontière de W.

Il résulte de là par exemple que, s'il y avait des valeurs de y pour lesquelles W n'admette aucun point, $W(y_0, y_1)$ devrait être *constamment* homologue à zéro sur $S(y_1)$ et que, par conséquent, il en sera de même de $W(y_0)$ sur $S(y_0)$.

De quoi va alors se composer la frontière de W? Lorsque y_0 approchera d'un point η de l'une des coupures, la ligne $W(y_0, y_1)$, toujours homologue à elle-même sur $S(y_1)$, tendra vers $W(\eta, y_1)$ et $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta)$, de telle façon que $W(\eta, y_1)$ soit le lieu des points de $S(y_1)$ qui correspondent aux différents points de $W(\eta)$ sur $S(\eta)$. Quand maintenant y_0 approchera du même point par l'autre lèvre de la coupure, la ligne $W(y_0, y_1)$ tendra vers $W(\eta', y_1)$ et la ligne $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta')$. En général, $W(\eta)$ ne sera pas homologue à $W(\eta')$, car les points de $W(\eta, y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta)$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta)$; les points de $W(\eta', y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta')$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta')$. Alors, bien que $W(\eta, y_1)$ soit homologue à $W(\eta', y_1)$ sur $S(y_1)$, il n'en résulte pas que $W(\eta)$ soit homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$.

La frontière de W sera alors engendrée par les cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

quand on fait décrire successivement à η toutes les coupures. Quand on fera varier η depuis o jusqu'à ε_k le long de la coupure $O\varepsilon_k$, le cycle $W(\eta) - W(\eta')$, qui devra s'évanouir pour $\eta = \varepsilon_k$, engendrera un doigt $\Delta(\varepsilon_k)$. La frontière de W est donc bien un cycle de la forme (1).

Combien pouvons-nous obtenir, de cette façon, d'homologies entre les cycles de la forme (1)?

Tout dépend de l'hypothèse faite au sujet de la ligne $W(y_0, y_1)$. Il est clair que, si l'on remplace cette ligne par une autre qui lui soit homologue sur $S(y_1)$, les deux homologies que l'on obtiendra ainsi ne seront pas distinctes.

La ligne $W(y_0, y_1)$ pourra se composer de l'un des $2p$ cycles de la surface

de Riemann $S(y_1)$, ou d'une ligne allant sur cette surface de Q_1 à l'un des $m-1$ autres points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$, ou d'une combinaison de ces lignes: aucune autre hypothèse n'est possible. D'ailleurs, si l'on envisage deux lignes allant de Q_1 à Q_2, il suffira de considérer la première, car la réunion de ces deux lignes formerait un cycle. Cela nous fait donc en tout $2p+m-1$ homologies.

Ces homologies sont-elles toutes distinctes? Si le cycle

$$W(\eta)-W(\eta')$$

est homologue à zéro sur $S(\eta)$ et cela sur toutes les coupures, il est clair que l'homologie correspondant à W se réduit à une identité. En effet, dans ce cas, les doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ qui figurent dans le premier membre de l'homologie $S_1(0)+\sum\Delta(\varepsilon_k)\sim 0$ sont homologues à zéro, plus une portion de $S(0)$; il reste donc $S_1(0)\sim 0$, $S_1(0)$ étant une portion de $S(0)$; mais, comme une variété ne peut être homologue à zéro sans être fermée, cette homologie doit se réduire soit à une identité, soit à $S(0)\sim 0$. Cette dernière hypothèse doit être rejetée puisque $S(0)$ n'est pas homologue à zéro. Si l'on peut former ainsi q homologies se réduisant à des identités, il n'y aura plus que

$$2p+m-q-1$$

homologies distinctes.

Si $W(y_0)$ est un cycle, il faut que $W(\eta)\sim W(\eta')$, c'est-à-dire que le cycle ne soit pas altéré quand y tourne autour du point singulier ε_k et qu'il en soit de même pour tous les autres points singuliers. Il faut, en d'autres termes, que $W(y_0)$ soit ce que nous avons appelé, dans le Mémoire cité, un *cycle invariant*; nous aurons donc d'abord autant d'homologies identiques que de cycles invariants, c'est-à-dire, d'après le Mémoire cité, autant que de cycles à trois dimensions, ou encore autant que de cycles à une dimension.

Y en a-t-il d'autres? Supposons que la ligne $W(y_0)$ aboutisse à un point Q_1, considérons la portion de la variété à quatre dimensions V voisine de Q_1; soit M un point de V infiniment voisin de Q_1; soit Π le plan tangent à la variété V au point Q_1; ce sera une variété plane à quatre dimensions appartenant à l'espace plan à plus de quatre dimensions, dans lequel nous supposons V tracée; la droite MQ_1, si les deux points M et Q_1 sont infiniment voisins, sera dans le plan Π. Portons alors sur la droite MQ_1 une longueur égale à 1 à partir de Q_1 et soit $H(M)$ le point ainsi obtenu; les points $H(M)$ appartiendront à l'hypersphère de rayon 1 et de centre Q_1, ou plutôt à l'intersection de cette

hypersphère et du plan H, intersection que j'appelle J et qui est une variété hypersphérique H à trois dimensions. Si deux points M et M' sont de part et d'autre de Q_1, de telle façon que les deux droites MQ_1 et Q_1M' soient dans le prolongement l'une de l'autre, les deux points H(M) et H(M') seront diamétralement opposés sur J.

Considérons maintenant les points M de W qui sont très voisins de Q_1; les H(M) correspondants engendreront une variété à deux dimensions H(W) située sur J; considérons de même les points M très voisins de Q_1 et tels que $y = y_0$; les H(M) correspondants engendreront une variété à une dimension $H(y_0)$ située sur J. Enfin les points de $W(y_0)$ donneront des H(M) en nombre fini et dont l'ensemble pourra s'appeler $H(W, y_0)$. Si alors un point appartient à $H(y_0)$, il en sera de même du point diamétralement opposé.

Au contraire, si un point appartient à $H(W, y_0)$, il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, puisque par hypothèse la ligne $W(y_0)$ s'arrête au point Q_1 et ne se prolonge pas au delà. Donc, si un point appartient à H(W), il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, sans quoi nous aurions deux points diamétralement opposés sur un même $H(W, y_0)$.

Si la ligne $W(y_0)$ doit nous conduire à une homologie se réduisant à une identité, nous venons de voir que $W(\eta)$ doit être homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$. Je puis sans restreindre la généralité supposer que $W(\eta)$ est non seulement homologue, mais identique à $W(\eta')$. Si, en effet, il en était autrement, soit $C(\eta)$ la portion de $S(\eta)$ limitée par le cycle $W(\eta) - W(\eta')$ homologue à zéro. Soit $P(\varepsilon_k)$ la variété à trois dimensions engendrée par $C(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k en suivant la coupure; elle est limitée par l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

qui la séparent de W, et par $C(O, \varepsilon_k)$, en désignant par $C(O, \varepsilon_k)$ la limite vers laquelle tend $C(\eta)$ quand η tend vers zéro en suivant la coupure $O\varepsilon_k$. Il est clair que $C(O, \varepsilon_k)$ est une portion de $S(o)$.

Envisageons alors la variété à trois dimensions

$$W - \sum P(\varepsilon_k),$$

où la sommation indiquée par le signe $\sum$ est étendue aux différentes coupures.

La variété W avait pour frontière l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

plus une partie de $S(o)$, la variété $\sum P(\varepsilon_k)$ avait pour frontière l'ensemble des cycles $W(\eta) - W(\eta')$ plus $\sum C(O, \varepsilon_k)$ qui est une partie de $S(o)$. Quand nous annexons les deux variétés l'une à l'autre, la partie commune de la frontière disparaît, de sorte que la frontière complète fait partie de $S(o)$. Comme cette frontière complète doit être une variété *fermée* à deux dimensions, ou bien elle se réduira à zéro, de sorte que $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété fermée, ou bien elle sera la surface $S(o)$ tout entière, ce qui est très possible puisque cette surface n'est pas homologue à zéro.

Ainsi, $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété *fermée* à trois dimensions; il est vrai qu'elle présente une circonstance toute particulière, puisque pour certaines valeurs de y, à savoir les valeurs $y = \eta$, les points de cette variété pour lesquels $y = \eta$ forment non plus une ligne, mais une variété à deux dimensions $C(\eta)$. Mais il suffit de déformer infiniment peu notre variété pour faire cesser cette circonstance gênante. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que W est une variété fermée et, par conséquent, que $W(\eta)$ est identique à $W(\eta')$.

Alors H(W) est une variété fermée; supposons d'abord que Q_1 soit l'extrémité d'une des branches de la ligne $W(y_0)$ et n'appartient à aucune autre branche de cette ligne; il suffit évidemment que cela ait lieu pour une valeur de y_0 pour que cela ait lieu pour toutes. Dans ce cas H(W) a un seul point commun avec $H(y_0)$; ce sont deux variétés fermées l'une à deux, l'autre à une dimension tracées sur l'hypersphère H. Si elles n'ont qu'un point commun, c'est qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre homologues à zéro sur H; *or cela est absurde puisque* H *est simplement connexe.*

Prenons un cas plus général; chacune des branches de $W(y_0)$ peut être parcourue dans deux sens opposés; nous distinguerons donc un sens positif et un sens négatif. D'autre part nous attribuerons un signe à l'intersection de H(W) et de $H(y_0)$ [d'après le signe d'un certain déterminant ainsi qu'il a été expliqué dans l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Ier Cahier, p. 33 et suiv.)]. Supposons donc que p branches de $W(y_0)$ aboutissent à Q_1 de façon que Q_1 soit à la *fin* de la branche quand on décrit cette branche dans le sens positif, et n branches quand on décrit la branche dans le sens négatif.

Alors H(W) et $H(y_0)$ admettront p intersections positives et n négatives.

Ou bien alors l'excès $p - n$ ne sera pas nul, ce qui est impossible parce qu'on pourrait avoir $H(W) \sim 0$ sur H et que H est simplement connexe; ou bien cet excès sera nul et alors la ligne $W(y_0)$ pourra être remplacée par une autre ne passant pas par Q_1.

Il est donc impossible qu'il existe une variété W satisfaisant aux conditions énoncées; il n'y a donc pas d'autre homologie identique que celles que l'on déduit des cycles invariants.

En résumé, soit N le nombre des points singuliers ε_1, ε_2, ..., en tenant compte du degré de multiplicité, un de ces points pouvant être double par exemple s'il correspond à deux cycles évanouissants.

Soit $2p$ le nombre des cycles de la surface de Riemann $S(y)$.

Soit m le nombre des points tels que Q_1, Q_2, ...

Soit q le nombre des cycles invariants de $S(y)$, ou, ce qui revient au même, le nombre des cycles à une ou à trois dimensions de $F(0)$.

Nous aurons N doigts, tous nos cycles seront des combinaisons de la forme (1), c'est-à-dire des combinaisons de ces N doigts et de $S(0)$; mais toutes les combinaisons de ces $N + 1$ variétés ne conviennent pas; elles doivent satisfaire à la condition (2); cette condition, puisque $S(0)$ admet $2p$ cycles, équivaut à $2p$ conditions simples. Il reste ainsi $N + 1 - 2p$ cycles.

Mais ces cycles sont liés par des homologies, engendrées par les différentes lignes $W(y_0)$ possibles; il y en a $2p$ provenant des $2p$ cycles fermés qu'on peut tracer sur $S(y_0)$; il y en a $m - 1$ provenant des $m - 1$ lignes qui vont d'un point Q à un autre point Q. Si ces $2p + m - 1$ homologies sont distinctes, ce qui arrive en général, il reste

$$N + 2 - 4p - m$$

cycles à deux dimensions distincts. Mais il y a q homologies identiques, il y a donc finalement

$$N - q + 2 - 4p - m \tag{3}$$

cycles à deux dimensions.

VII. — Application aux surfaces du troisième degré.

Appliquons ces principes à la surface du troisième degré. Dans les paragraphes précédents, un rôle essentiel était joué par les surfaces de Riemann $S(y)$ correspondant aux intersections de la surface $F = 0$ avec le plan $y = \text{const.}$

Si nous prenons les coordonnées homogènes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

ces plans $y = \text{const.}$ passent par une droite fixe située à l'infini et qui a pour équations $y = t = 0$. On pourrait répéter la même analyse en faisant jouer le rôle de cette droite $y = t = 0$ à une droite quelconque D, et le rôle des surfaces $S(y)$ aux surfaces de Riemann correspondant aux intersections de $F = 0$ avec les plans passant par D.

Cela revient à faire un changement de coordonnées tétraédriques en prenant cette droite D pour l'une des arêtes du tétraèdre de référence. Tout étant projectif, il est clair que le résultat doit rester le même quelle que soit la droite D, et l'on en comprendra d'ailleurs mieux les raisons en se reportant à ce qui a été dit aux paragraphes 2 et 3.

L'application de la formule (3) doit conduire au même nombre de cycles à deux dimensions, de quelque façon que soit choisie la droite D.

Mais, si ce résultat est certain *a priori*, il conduit à quelques paradoxes apparents et il est intéressant de voir par quel mécanisme se fait la compensation. M. Picard, en étudiant une surface du troisième degré particulière, sur laquelle nous reviendrons, avait déjà mis en évidence certaines propositions paradoxales, dont il avait donné l'explication.

Dans la formule (3), le nombre q représente le nombre des cycles linéaires. Ce nombre est évidemment indépendant de la droite D. Il est d'ailleurs nul, comme l'a montré M. Picard, pour la surface du troisième degré.

Le nombre N est le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D. Ce nombre est égal à 12 dans le cas le plus général.

Le nombre p est le genre de la courbe, intersection de $F = 0$ par un plan passant par la droite D; il est égal à 1.

Les points Q_1, Q_2, ... sont les intersections de la surface $F = 0$ et de la droite D; le nombre m est le nombre de ces intersections. Il est égal à 3 dans le cas général. On a donc, dans le cas général,

$$q = 0, \quad N = 12, \quad p = 1, \quad m = 3$$

et, pour le nombre de cycles,

$$N + q + 2 - 4p - m = 7.$$

Supposons maintenant que la surface $F = 0$, restant toujours la plus générale, la droite D prenne des positions particulières.

Supposons d'abord que la droite D devienne tangente à la surface; deux des plans tangents menés par D se confondront et N se réduira à 11, mais deux des points d'intersection de D se confondront et m se réduira à 2. Le nombre

$$N = q + 2 - 4p - m$$

ne changera pas.

Supposons maintenant que l'un des plans tangents menés par D coupe la surface suivant une courbe présentant un point de rebroussement; ici encore deux plans tangents se confondront, mais il faut tenir compte du degré de multiplicité. Or nous avons vu que, dans le cas d'un rebroussement, il y a deux cycles évanouissants et que, par conséquent, le plan tangent doit être regardé comme double; le nombre N reste donc égal à 12.

La surface $F = 0$ contient vingt-sept droites que nous appellerons les *droites* Δ. Supposons que D rencontre l'une des droites Δ. Le plan de D et de Δ coupe la surface suivant la droite Δ et une conique; c'est donc un plan tangent double avec deux points de contact distincts.

Le nombre des plans tangents *distincts* se réduit donc à 11, mais ce plan $D\Delta$ doit être regardé comme double; il n'y a, il est vrai, qu'un seul cycle évanouissant, mais la courbe se décompose; cela fait donc deux doigts simples, l'un engendré par le cycle évanouissant, l'autre homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann, donc N reste égal à 12.

Les divers plans menés par Δ coupent la surface suivant des coniques; deux de ces coniques touchent la droite Δ. Soient P_1 et P_2 les plans de ces deux coniques et supposons que Δ soit dans le plan P_1. Alors trois de nos douze plans tangents se confondent, les deux points de contact du plan tangent $D\Delta$, qui étaient distincts et équivalents à deux points doubles à tangentes séparées, se confondent en un seul, équivalent à un point de rebroussement. Nous avons cette fois deux cycles évanouissants, cela nous fait *trois* doigts simples dont deux correspondent à ces deux cycles et un est homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann (composante relative à la droite, ou bien à la conique); donc le plan tangent P_1 doit être regardé comme triple et N reste égal à 12.

Ainsi voilà trois cas où le plan tangent correspond à deux, deux ou trois plans tangents confondus : ce sont ceux où ce plan coupe la surface suivant une cubique à rebroussement, suivant une droite Δ et une conique qui la coupe, suivant une droite Δ et une conique qui la touche; nous venons de voir que ce plan doit être alors regardé comme double, double ou triple. Mais il

peut arriver que, dans l'un de ces trois cas, la droite D passe par le point de contact, c'est ce qui arrive respectivement si D touche la surface en un point où l'indicatrice est parabolique, si D coupe Δ en un point où cette droite rencontre la conique intersection du plan $D\Delta$ et de la surface $F = 0$, si D coupe Δ au point où cette droite *touche* la conique intersection de $D\Delta$ et de la surface. Le plan tangent correspond alors à trois, trois ou quatre plans tangents confondus, et il reste double, double ou triple; le nombre N se réduit donc à 11, mais, comme D touche la surface, le nombre m se réduit à 2, de sorte que la différence $N - m$ et le nombre des cycles

$$N - q - 2 - 3(p - m)$$

ne changent pas.

Si la droite D est une asymptote de l'indicatrice en un point de la surface, le plan tangent correspondant équivaut à trois plans tangents confondus; donc N se réduit à 10, mais, d'autre part, D coupe la surface en trois points confondus, de sorte que m se réduit à 1 et que la différence $N - m$ ne change pas.

Il peut se faire que, parmi les plans tangents menés par D, il y en ait deux ou plusieurs qui présentent séparément l'une des singularités que nous venons d'étudier; rien n'est à changer alors à ce qui précède. Il peut arriver enfin que par la droite D on puisse mener un plan qui coupe la surface suivant trois droites Δ, qui soit par conséquent triplement tangent à la surface. Ce plan correspondra à trois plans tangents confondus. Quel est son degré de multiplicité, c'est-à-dire le nombre de doigts simples auxquels il correspond? Il n'y a qu'un cycle évanouissant, mais la surface de Riemann $S(\varepsilon_k)$ se décompose en trois parties $S_1(\varepsilon_k)$, $S_2(\varepsilon_k)$, $S_3(\varepsilon_k)$ correspondant aux trois droites. Nous aurons donc trois doigts simples, le premier engendré par le cycle évanouissant, le deuxième homologue à $S_1(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$, le troisième homologue à $S_2(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$. Le cycle qui serait homologue à $S_3(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$ n'est pas distinct des précédents, car, toutes les surfaces $S(y)$ étant homologues entre elles, comme nous l'avons vu, on a

$$S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k) + S_3(\varepsilon_k) \sim S(0),$$

de sorte qu'une combinaison de nos trois doigts nous ramène au cycle $S(0)$. En résumé, ce plan triplement tangent, qui équivaut à trois plans tangents confondus, a pour degré de multiplicité 3, de sorte que N reste égal à 12.

Il nous reste à examiner le cas où D est l'une des droites Δ. Alors D rencontre dix autres droites Δ, que j'appellerai A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4, A_5 et B_5.

Les droites A_i et B_i se rencontrent quel que soit i et il n'y a pas d'autre rencontre entre les droites A et B. Par D on peut mener cinq plans tangents qui sont les cinq plans DA_iB_i; que sont devenus les sept autres plans tangents? Soit D′ une droite très voisine de D; par D′ nous pouvons mener douze plans tangents, dont cinq tendront vers les cinq plans DA_iB_i; vers quelles limites tendront les sept autres et les points de contact correspondants? Parmi les plans menés par D, il y en a deux P_1 et P_2, qui coupent la surface suivant la droite D et une conique qui la touche. Eh bien, deux plans tangents tendront vers P_1 et deux vers P_2.

Il reste à voir ce que deviennent les trois plans tangents restants. Soient M'_1, M'_2, M'_3 les trois points d'intersection de D′ avec la surface; quand D′ tendra vers D, ces trois points tendront vers trois points M_1, M_2, M_3 de D; eh bien, les points de contact des trois plans tangents restants tendront vers M_1, M_2, M_3.

Quant aux cycles à deux dimensions correspondants, voici ce qu'ils deviennent. Considérons d'abord un plan tangent qui, à la limite, se réduit au plan A_iB_iD; la surface de Riemann correspondant à l'intersection de ce plan et de la surface se décompose à la limite en trois parties correspondant aux trois droites A_i, B_i, D; le *doigt* correspondant est à la limite homologue à l'une de ces trois parties, par exemple à la surface de Riemann correspondant à la droite A_i et que j'appellerai $S(A_i)$. Voilà donc déjà cinq de nos sept cycles correspondant aux cinq surfaces de Riemann $S(A_1)$, $S(A_2)$, ..., $S(A_5)$. Les sept doigts correspondant aux sept autres plans tangents nous fourniront à la limite, par leurs combinaisons entre eux et avec $S(o)$, un seul cycle nouveau qui sera la surface de Riemann $S(D)$; cette notation $S(A_i)$, $S(D)$ ne peut engendrer aucune confusion avec $S(y)$, puisque A_i et D sont des droites et y une quantité. Il nous reste un dernier cycle qui est $S(o)$, mais

$$S(o) \sim S(D) + S(A_i) + S(B_i),$$

puisque $S(o)$ est homologue à la surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec un plan quelconque, et que, quand ce plan est le plan DA_iB_i, cette surface de Riemann se décompose en $S(D)$, $S(A_i)$, $S(B_i)$.

En conséquence, tous les cycles à deux dimensions de $F = o$ sont homologues à des combinaisons des sept cycles suivants :

$$S(D),\quad S(A_1),\quad S(A_2),\quad S(A_3),\quad S(A_4),\quad S(A_5),\quad S(B_1),$$

qui ne sont autre chose que des surfaces de Riemann correspondant à sept des vingt-sept droites Δ.

Quelques mots maintenant sur les intersections mutuelles de ces cycles; quel est l'excès du nombre des intersections positives sur celui des intersections négatives, en adoptant le point de vue du paragraphe 9 de l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Ier Cahier, p. 33)? Si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$, cet excès sera évidemment 3; si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$ correspondant à deux droites Δ, cet excès sera 1 ou zéro, suivant que ces deux droites se rencontreront ou non. Si nous considérons deux cycles K_1 et K_2, nous représenterons cet excès par $N(K_1, K_2)$; si alors

$$K_1 \sim K'_1, \qquad K_2 \sim K'_2,$$

on aura également

$$N(K_1, K_2) = N(K'_1, K'_2).$$

Si maintenant

$$K_2 \sim n_0 S(D) + \Sigma n_i S(A_i) + n_6 S(B_1),$$

il viendra

$$N(K_1, K_2) = n_0 N[K_1, S(D)] + \Sigma n_i N[K_1, S(A_i)] + n_6 N[K_1, S(B_1)],$$

d'où cette conséquence que la connaissance des sept excès

$$N[K_1, S(D)], \quad N[K_1, S(A_i)], \quad N[K_1, S(B_1)]$$

suffit pour déterminer $N(K_1, K_2)$, K_2 étant un cycle quelconque.

Soit, en particulier, $K_1 = S(\Delta_1)$, $K_2 = S(\Delta_2)$, Δ_1 et Δ_2 étant deux quelconques des vingt-sept droites Δ; nous voyons que la connaissance du nombre des points d'intersection de Δ_1 avec D, les A_i et B_1 suffit pour déterminer le nombre des intersections de Δ_1 avec une droite quelconque Δ_2, c'est-à-dire pour déterminer complètement la droite Δ_1.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier; une des vingt-sept droites sera complètement déterminée quand on saura si elle rencontre une autre des vingt-sept droites choisie au hasard D, et aussi si elle rencontre cinq autres des vingt-sept droites qui rencontrent D sans se rencontrer entre elles.

On sait que les surfaces du troisième degré sont unicursales. Si en effet on prend deux des vingt-sept droites Δ qui ne se rencontrent pas, soient D et D'; qu'on prenne un point M sur D et un point M' sur D' ayant pour abscisse, par exemple, le premier u, le second v, la droite MM' rencontrera la surface en un troisième point M_1 dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de u et de v. De cette circonstance découlent des conséquences paradoxales sur lesquelles M. Picard a déjà appelé l'attention.

Si les valeurs de u et v correspondent à l'une des droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

qui rencontrent à la fois D et D′, la droite MM′ est tout entière sur la surface et les coordonnées du point M_1 deviennent indéterminées.

Si maintenant nous prenons un point M_1 sur la surface, les deux plans $M_1 D$ et $M_1 D'$ se couperont suivant une droite déterminée MM′, les points M et M′ seront donc déterminés et, par conséquent, u et v seront fonctions rationnelles des coordonnées de M_1. Si cependant le point M_1 était sur la droite D, le plan $M_1 D$ ne serait alors autre chose que le plan tangent en M_1 et ce qui précède subsisterait.

Le lieu des points $u = \infty$ est une conique C′ qui coupe D′ en deux points et le lieu des points $v = \infty$ est une conique C qui coupe D en deux points.

Reprenons maintenant la variété V à quatre dimensions engendrée par la surface $F = 0$; et sur cette variété un cycle K fermé à deux dimensions et non homologue à zéro. Soit W l'espace plan à quatre dimensions engendré par les deux variables complexes u, v; on pourrait d'abord être tenté de dire que, la surface étant unicursale, V et W doivent être homéomorphes, qu'à tout cycle fermé K de V correspondra un cycle fermé K′ de W; que, tous les cycles fermés de W étant homologues à zéro, il doit en être de même de tous les cycles fermés de V; ce qui serait contraire aux conclusions qui précèdent. Les découvertes de M. Picard nous ont d'ailleurs depuis longtemps mis en garde contre un pareil raisonnement.

Le cycle K, en effet, peut rencontrer l'une des droites A_i ou l'une des coniques C ou C′. S'il rencontre C, par exemple, le cycle correspondant K′ ne sera plus fermé, mais présentera un pointement à l'infini, ainsi que l'a signalé M. Picard.

Supposons maintenant que le cycle K′ soit fermé et, par conséquent, homologue à zéro dans l'espace W. S'ensuivra-t-il que le cycle fermé correspondant K soit homologue à zéro sur V ? Pas du tout. Il y a dans l'espace W cinq points auxquels correspondent une infinité de points de la variété V; ce sont les points $u = u_i$, $v = v_i$ qui correspondent aux cinq droites A_i; nous avons vu en effet que, pour ces valeurs de u et v, les coordonnées de M_1 sont indéterminées. Supposons alors que le cycle K′ passe par l'un de ces points u_i, v_i; étant homologue à zéro sur W, il limitera un domaine à trois dimensions de cet espace. Mais considérons un point N de R et supposons que ce point se rapproche indéfiniment de u_i, v_i qui est sur la frontière de R. Soit M le point de V qui est le correspondant de N; quand N tendra vers u_i, v_i, le point M tendra vers un point de la droite A_i et ce point pourra occuper une position

quelconque sur cette droite, suivant la façon dont N tendra vers u_i, v_i. Soit R′ un domaine à trois dimensions de V correspondant à R; sa frontière complète se composera non seulement de K, cycle de V correspondant à K′, mais de la surface de Riemann $S(A_i)$; car, quand N se rapproche de la frontière de R, le point correspondant M se rapproche, soit de K si N tend vers un point de K′ autre que u_i, v_i, soit d'un point quelconque de $S(A_i)$ si N tend vers u_i, v_i. Donc K n'est pas homologue à zéro.

Dans la variété W, on doit considérer comme distincts les points $u = \infty$, $v = v_1$ et $u = \infty$, $v = v_2$, de même que les points $u = u_1$, $v = \infty$ et $u = u_2$, $v = \infty$, puisque à ces points correspondent des droites MM′ distinctes. On doit donc adopter, au sujet des points à l'infini, non la convention du Mémoire actuel, mais celle du Mémoire cité. Il en résulte que les deux surfaces de Riemann $u =$ const. et $v =$ const. ne sont pas homologues entre elles. D'où cette conclusion : les cycles K′ de W qui sont tout entiers à distance finie sont homologues à zéro; mais si l'on tient compte de ceux qui s'étendent à l'infini, il y en a *deux* qui non seulement ne sont pas homologues à zéro, mais sont indépendants; ce sont justement ces deux surfaces de Riemann $u =$ const. et $v =$ const.

De plus, parmi les cycles K′ homologues à zéro, il y en a qui ne correspondent pas à des cycles K homologues à zéro : ce sont ceux qui passent par l'un des points u_i, v_i et cinq de ces cycles doivent être considérés comme distincts, puisqu'il y a cinq points u_i, v_i. Nous retrouverons donc bien nos *sept* cycles distincts et la conciliation est complète avec ce qui précède.

Un mot encore sur une circonstance qui peut se présenter pour certaines surfaces du troisième degré particulières; il peut arriver que trois des droites Δ que j'appellerai Δ_1, Δ_2, Δ_3, soient dans un même plan tangent P et passent par un même point M. C'est ce qui arrive en particulier pour la surface de M. Picard

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Si alors la droite D par laquelle doivent être menés les plans tangents se trouve sur le plan P, *quatre* des plans tangents menés par D se confondront avec P, de sorte que nous n'aurons plus que neuf plans tangents distincts au lieu de douze.

Il faut voir à combien de doigts distincts ce plan correspond. Pour nous en rendre compte, prenons la surface de Picard et coupons par exemple par les plans $z =$ const.; la droite D étant alors la droite à l'infini qui est l'intersection

commune de tous ces plans $z = \text{const.}$ La courbe d'intersection est

$$x^3 + y^3 = 1 - z^3,$$

où z est regardé comme un paramètre. Les deux cycles sont des combinaisons de lacets tracés dans le plan des x et enveloppant les trois points singuliers

$$x = \sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon \sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon^2 \sqrt[3]{1 - z^3},$$

ε étant une racine cubique de l'unité. Pour $z = 1$, ces trois points singuliers se confondent avec O, les lacets se réduisent à un point et il en est de même des cycles, les deux cycles sont donc évanouissants.

De plus, pour $z = 1$, la courbe se décompose en trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3; donc, entre les deux doigts provenant des deux cycles évanouissants, nous en aurons deux autres homologues à $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$; je ne parle pas de $S(\Delta_3)$ qui n'est pas distinct des précédents puisque

$$S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + S(\Delta_3) \sim S(o).$$

Ainsi ce plan tangent quadruple donne naissance à quatre doigts distincts. Le nombre N n'est donc pas altéré.

Supposons enfin que la surface présente un point conique H; dans ce cas, six des droites Δ, comptant chacune pour deux, passent en H; je les appellerai Δ_1, Δ_2, ..., Δ_6; il y a quinze autres droites qui sont dans les quinze plans déterminés par les six premières. Le nombre des cycles K se réduit alors à 6; on peut le voir de trois manières :

1° Nos sept cycles $S(D)$, $S(A_i)$, $S(O)$ du cas général se réduisent ici à $S(\Delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et $S(o)$, parce que, si l'on prend pour la droite D la droite Δ_1, les droites A_i ne sont autres que les cinq autres droites Δ_i; or, les droites Δ_i forment l'intersection de la surface avec le cône tangent au point H qui est du second degré. La surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec une quadrique quelconque est homologue à $2\,S(o)$, on a donc l'homologie

$$\Sigma\, S(\Delta_i) \sim 2\, S(o),$$

de sorte qu'il ne reste que six cycles distincts.

2° Si la droite D est quelconque, deux des plans tangents menés par D se confondent avec le plan DH, de sorte que les nombres N, p et m deviennent égaux à 11, 1, 3 et que

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

3° Si la droite D passe par H, un plan quelconque mené par D coupera la surface suivant une conique, et cette conique se décomposera en deux droites, quand ce plan passera par l'une des six droites Δ_i; on a donc $N = 6$, la conique étant unicursale $p = 0$, et D coupant la surface en deux points distincts $m = 2$; on a donc

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

Plus généralement, quand une surface acquerra un point conique, le nombre des cycles à deux dimensions diminuera d'une unité. Soit, en effet, P le point conique, et supposons d'abord que la droite D ne passe pas par ce point, le plan PD devra être regardé comme un plan tangent, qui comptera pour *deux* plans tangents confondus, mais pour *un* seulement au point de vue de l'évaluation du nombre N. Le nombre N se changera donc en $N - 1$ et les autres nombres ne changeront pas.

Supposons maintenant qu'on fasse passer la droite D par P; les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par D sont les intersections de cette surface avec une certaine courbe gauche, et cette courbe coupe la surface au point P, non plus en deux, mais en six points confondus; de plus, ce point P ne comptera plus dans l'évaluation du nombre N puisqu'il n'y a plus de plan PD. Donc N se changera, non plus en $N - 1$, mais en $N - 6$.

D'autre part, le genre p d'une section faite par un plan quelconque mené par D se change en $p - 1$ puisque toutes ces sections admettent un point double. Le nombre m des intersections distinctes de D avec la surface se change en $m - 1$ puisque deux de ces intersections sont confondues en P.

Le nombre $N + 2 - 4p - m$ se change donc en $N + 1 - 4p - m$.

Nous n'avons pas à nous inquiéter des plans tangents menés par D au cône tangent à la surface au point P. En effet, pour les sections faites par ces plans, le point double devient un point de rebroussement, ce qui n'altère pas le genre.

REMARQUES

SUR

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 147, p. 1367-1371 (21 décembre 1908).

On sait que Fredholm résout l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int f(x, s)\varphi(s)\,ds = \psi(x) \tag{1}$$

par la formule

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_{\lambda f}\binom{x}{y}}{D_{\lambda f}}\psi(y)\,dy, \tag{2}$$

où $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$ et $D_{\lambda f}$ sont deux fonctions entières de λ. Le développement de $D_{\lambda f}$ commence par le terme 1, et le terme général est

$$\frac{\lambda^n}{n!}\int f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Le terme général du développement de $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$ est

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

La notation $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ représente le déterminant à n lignes et n colonnes, où l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $f(x_i, y_k)$.

Si $f(x, y)$ devient infini pour $x = y$ les formules précédentes deviennent illusoires, puisque certains éléments de nos déterminants sont infinis. On sait comment Fredholm s'est tiré de cette difficulté. Soient $f_2, f_3, \ldots$ ce que l'on appelle les *noyaux réitérés;* si $f(x, y)$ devient infini comme $(x - y)^{-\alpha}$ et que l'exposant α soit suffisamment petit, il arrivera que tous ces noyaux réitérés seront finis à partir de l'un d'entre eux. Supposons donc que f_n soit fini, ainsi que tous les noyaux réitérés d'indice plus grand. Fredholm ramène l'équation (1)

à une autre équation de même forme, mais où λ est remplacé par $-(-\lambda)^n$ et f par f_n.

Dans l'équation (2), la fonction méromorphe en λ

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_{\lambda f}\binom{x}{y}}{D_{\lambda f}}$$

se trouve remplacée par une autre fonction méromorphe en λ, $\Phi_n(\lambda)$, dont le dénominateur est

$$D_n = D_{-(-\lambda)^n f_n}.$$

Si f est fini, f_n l'est également, et les deux formules sont applicables; les deux fonctions méromorphes Φ et Φ_n sont donc égales, ce qui veut dire que l'on peut revenir de la nouvelle formule à l'ancienne en divisant le numérateur et le dénominateur par un même facteur commun. Il est aisé en effet de vérifier que, si l'on pose

$$D_{\lambda f} = F(\lambda)$$

et si α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on aura

$$D_n = F(\lambda)\,F(\alpha\lambda)\,F(\alpha^2\lambda)\ldots F(\alpha^{n}\lambda).$$

Qu'arrive-t-il maintenant quand f devient infini et que, par exemple, f_2 est fini? Ici encore, nous devons prévoir que le numérateur et le dénominateur de Φ_2 auront un facteur commun, et que $D_2 = D_{-\lambda^2 f_2}$, qui est une fonction entière de λ^2, sera le produit de deux fonctions entières $G(\lambda)$ et $G(-\lambda)$, le second facteur $G(-\lambda)$ divisant également le numérateur.

C'est en effet ce qui arrive; on peut alors se proposer, puisque la fonction méromorphe Φ se présente sous une forme illusoire et que la fonction méromorphe Φ_2 n'est pas irréductible, de former une fonction méromorphe irréductible égale à Φ_2. Dans ce cas, la solution se présente sous une forme très simple.

Nous aurons

$$(3)\qquad \Phi_2 = \frac{N}{D},$$

N et D étant deux fonctions entières de λ qui se formeront de la même manière que $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$ et $D_{\lambda f}$; la seule différence, c'est que les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

seront remplacés par d'autres, formés tout à fait de la même manière, sauf que les éléments $f(x_i, x_i)$ qui deviennent infinis seront remplacés par zéro.

Les considérations suivantes permettront de mieux comprendre la signification de ce résultat. Supposons que la fonction $f(x, y)$ non seulement soit finie, mais admette des dérivées premières finies. Dans ce cas, d'après un résultat de M. Fredholm sur la loi de décroissance des coefficients, la fonction entière $D_{\lambda f}$ sera de genre zéro. Supposons, au contraire, que $f(x, y)$ devienne infinie pour $x = y$ comme $(x - y)^{-\alpha}$ et que α soit plus petit que $\frac{1}{4}$. Supposons même, pour éviter toute complication dans l'énoncé, que l'on ait

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x - y)^{\alpha}},$$

la fonction ψ restant holomorphe dans le domaine considéré. On aura alors

$$f_2(x', y) - f_2(x, y) < A(x' - x)^{1-2\alpha},$$

et, d'après le théorème de M. Fredholm, le coefficient de λ^{2n} dans le développement de $D_{-\lambda^2 f_2}$ décroîtra comme $(n^n)^{2\alpha - 1 - \frac{1}{2}}$; de sorte que, si $\alpha < \frac{1}{4}$, cette fonction $D_{-\lambda^2 f_2}$ sera une fonction entière de genre zéro de λ^2. Nous savons qu'une fonction entière de genre zéro de λ^2 peut toujours être regardée comme le produit de deux fonctions entières de λ,

$$G(\lambda)\, G(-\lambda),$$

qui sont de genre 1. Nous devons donc nous attendre à ce qu'en appelant $D(\lambda)$ le dénominateur de la formule (3), on ait

$$D_{-\lambda^2 f_2} = D(\lambda)\, D(-\lambda),$$

de sorte que

$$G(\lambda) = e^{k\lambda}\, D(\lambda),$$

où k est une constante quelconque. C'est en effet ce qui arrive. Ce qui caractérise la fonction $D(\lambda)$ et la distingue de toutes les autres fonctions $G(\lambda)$, c'est que le coefficient de λ est nul. Quand la fonction $f(x, y)$ reste finie de telle façon que $D_{\lambda f}$ existe, $D_{\lambda f}$ sera aussi une fonction $G(\lambda)$ et l'on aura

$$D_{\lambda f} = e^{k\lambda}\, D(\lambda),$$

k étant le coefficient de λ dans le développement de $D_{\lambda f}$. Dès que la fonction $f(x, y)$ devient infinie, cette formule devient illusoire, parce que le coefficient k devient infini.

Proposons-nous, d'autre part, de développer $\log D_{\lambda f}$ suivant les puissances

de λ; nous trouverons

$$\log D_{\lambda f} = -\sum \frac{\lambda^n \sigma_n}{n},$$

en posant

$$\sigma_n = (-1)^{n-1} \int f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

On peut tirer de là une conclusion. Reprenons la formule

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}}.$$

Multiplions haut et bas par

$$e^{\lambda \sigma_1 + \frac{\lambda^2 \sigma_2}{2} + \ldots + \frac{\lambda^p \sigma_p}{p}}.$$

Nous obtiendrons ainsi la formule

$$(3\ bis) \qquad \Phi(\lambda) = \frac{N_p}{D_p},$$

où N_p et D_p sont des fonctions entières de λ. Ces fonctions se formeront de la même manière que $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$, avec cette différence qu'après avoir développé les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix},$$

il faudra supprimer dans le développement tous les termes qui contiennent en facteur un produit de la forme

$$f(x_1, x_1), \quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_1), \quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) f(x_3, x_1), \quad \ldots$$

jusqu'à

$$f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{p-1}, x_p) f(x_p, x_1).$$

Mais il arrivera ceci; supposons que $f(x, y)$ ne reste plus fini, mais prenne la forme

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x-y)^\alpha},$$

ψ étant fini. Alors les séries $D_{\lambda f}$, $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne seront plus convergentes, mais *les séries* N_p *et* D_p *resteront convergentes*, pourvu que

$$\alpha < \frac{p}{p-1},$$

de sorte que la formule (3 *bis*) restera applicable.

Si l'on suppose $f(x, y)$ fini et pourvu d'une dérivée, les quatre séries $D_{\lambda f}$, $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$, N_p et D_p sont toutes convergentes; mais les deux premières convergent plus rapidement, puisqu'elles représentent des fonctions entières de genre zéro, tandis que les deux dernières représentent des fonctions entières de genre p.

Remarquons encore qu'on peut obtenir la dérivée logarithmique de $D_{\lambda f}$ de la façon suivante :

Soit $\theta(x, \zeta)$ la solution de l'équation

$$\theta(x, \zeta) - \lambda \int f(x, s)\, \theta(s, \zeta)\, ds = f(x, \zeta);$$

on aura

$$\frac{d}{d\lambda} \log D_{\lambda f} = \int \theta(x, x)\, dx.$$

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

LA MÉTHODE DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 125-126 (18 janvier 1909).

La méthode de Fredholm permet de résoudre presque immédiatement certaines questions relatives au développement des fonctions en séries ou à leur représentation par des intégrales définies.

Par exemple, on peut résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left[e^{ixy} + f(x, y)\right] dy = \psi(x),$$

où $\varphi(y)$ est la fonction inconnue, si $f(x, y)$ n'a, quel que soit x, qu'un nombre limité de maxima et de minima, si elle tend uniformément vers zéro pour $y = \pm \infty$, si $\frac{df}{dy}$ est limité et satisfait aux mêmes conditions.

Dans le même ordre d'idées, une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet sera, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π, développable en série procédant suivant les fonctions

$$e^{imx} + \theta_m(x) \quad (m \text{ entier}),$$

pourvu que la série $\Sigma |\theta_m(x)|$ converge absolument et uniformément. Cette condition est suffisante : il serait facile de trouver les conditions nécessaires et suffisantes, que je n'énonce pas.

Par exemple, on pourra développer suivant les fonctions

$$\cos \alpha_m x, \quad \sin \alpha_m x,$$

pourvu que la série

$$\sum (\alpha_m - m)$$

converge absolument.

Proposons-nous encore de résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$\int_0^{2\pi} \varphi(z)[e^{izx} + f(x, z)]\,dz = \psi(x).$$

Nous nous proposons de déterminer la fonction $\varphi(z)$ pour les valeurs de z comprises entre o et 2π; je ne dirai pas en se donnant arbitrairement la fonction $\psi(x)$, cela serait impossible, mais en se donnant les valeurs de $\psi(x)$ pour toutes les valeurs *entières* de x positives ou négatives.

Pour que cela soit possible, il suffit que la série

$$\sum \psi(m)$$

et que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x, z)\,dx$$

convergent absolument et uniformément.

Je profite de l'occasion pour réparer un oubli involontaire qui m'a été signalé par M. Picard.

Dans une Note récente, j'ai signalé une série de résultats relatifs respectivement aux cas où le noyau de l'équation de Fredholm devient infini d'ordre $< \frac{1}{2}, < \frac{2}{3}, < \frac{3}{4}, \dots$; le premier de ces résultats avait déjà été obtenu par une autre voie par M. Hilbert.

SUR

LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM

Sechs Vortrage uber ausgewahlte Gegenstande aus der reinen Mathematik und Mathematischen Physik. Leipzig und Berlin, 1910 (Erster Vortrag), p. [illegible].

L'équation intégrale

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_a^b f(x, y)\varphi(y)\,dy = \psi(x)$$

est, comme l'on sait, résolue par l'expression intégrale de même espèce

$$(1_a) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_a^b \psi(y)\,G(x, y)\,dy,$$

où

$$G(x, y) = \frac{N(x, y; \lambda, f)}{D(\lambda, f)};$$

N et D sont, d'après la théorie de Fredholm, deux transcendantes entières en λ. Afin de pouvoir écrire explicitement leur développement, nous désignons avec Fredholm par $f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix}$ le déterminant à n lignes dont l'élément général est $f(x_i, y_k)$.

Si l'on pose alors

$$a_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n,$$

on a

$$D(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_n.$$

Nous transformerons cette équation en introduisant les noyaux déduits de $f(x, y)$ par *itération*.

Si nous posons

$$f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \dots f(x_\eta, x_\theta) f(x_\theta, x_\alpha) = f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\eta, x_\theta),$$

il est clair que $f\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_n \\ x_1, & \dots, & x_n \end{pmatrix}$ a la forme $\Sigma \pm \Pi f(x_\alpha, \ldots, x_\mu)$, ainsi qu'il résulte du développement du déterminant. Soit alors

$$b_k = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_\alpha, \ldots, x_\mu)\, dx_\alpha \ldots dx_\mu,$$

où k désigne le nombre des variables d'intégration $x_\alpha, \ldots, x_\mu$, nous pouvons aussi écrire

$$b_k = \int_a^b f_k(x, x)\, dx,$$

en regardant

$$f_k(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b f(x, x_\alpha) f(x_\alpha, x_\beta) \ldots f(x_\mu, y)\, dx_\alpha \ldots dx_\mu$$

comme le $k^{\text{ième}}$ *noyau itéré*.

En raison de cette relation, nous avons donc

$$a_n = \sum \Pi b_k.$$

Si nous observons que certains des b_k figurant dans un produit Πb_k peuvent être égaux, que de plus certains des produits Πb_k peuvent eux-mêmes être égaux, ceux qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation des x_i, l'analyse combinatoire de a_n conduira à une expression

$$a_n = \sum_{a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = n} \frac{n!}{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots a!\, b!\, c! \ldots} (-1)^{(\alpha+1)a} b_\alpha^a (-1)^{(\beta+1)b} b_\beta^b (-1)^{(\gamma+1)c} b_\gamma^c \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$D(\lambda) = \sum_{a, b, c} \frac{1}{a!\, b!\, c! \ldots} \left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad D = \prod_1^\infty e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}},$$

d'où l'on tire

$$(2_a) \qquad \log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

$$(2_b) \qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{\alpha-1} b_\alpha.$$

Le numérateur $N(x, y; \lambda)$ de la fonction $G(x, y; \lambda)$ peut être défini de même par l'équation

$$(3) \qquad N(x, y; \lambda) = D(\lambda) \sum \lambda^h f_{h+1}(x, y).$$

Ces équations, qui se trouvent d'ailleurs déjà dans Fredholm, sont utiles comme point de départ à de nombreuses considérations, comme on va le voir sur quelques exemples.

La méthode de Fredholm n'est immédiatement applicable que pour des noyaux $f(x, y)$ qui restent finis. Si le noyau devient infini en certains points, il arrive parfois que l'un des noyaux itérés, $f_n(x, y)$ par exemple, demeure fini. L'équation intégrale relative au noyau itéré se laisse alors traiter par la méthode de Fredholm et Fredholm montre que l'équation initiale (1) se laisse ramener à celle-ci.

La solution en est encore donnée par une formule telle que (1_a), mais on a

$$G = \frac{N_1(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

où

$$D_n(\lambda) = D(\lambda^n f_n)$$

et

$$N_1(x, y; \lambda) = D_n(\lambda).\sum \lambda^h f_{h+1}(x, y).$$

Les fonctions N_1 et D_n de λ sont encore des transcendantes entières; on peut cependant montrer qu'elles possèdent un diviseur commun.

Nous allons voir comment cela résulte de nos formules (2) et (3) et comment on parvient à une expression fractionnaire pour la fonction méromorphe G, dont les deux termes sont sans diviseur commun.

De notre hypothèse sur les noyaux itérés, il suit que les coefficients b_n, b_{n+1}, ... sont finis. Formons alors, eu égard à l'équation (2_a), la suite

$$K(\lambda) = -\lambda^n \frac{b_n}{n} - \lambda^{n+1} \frac{b_{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

cette suite convergera.

Posons maintenant

$$G(x, y; \lambda) = \frac{e^K \sum \lambda^h f_{h+1}}{e^K},$$

nous avons là l'expression cherchée. Pour l'établir, il nous faut montrer que e^K et $e^K.\Sigma\lambda^h f_{h+1}$ sont des fonctions entières.

Formons dans ce but $\frac{dK}{d\lambda}$, on obtient aisément

$$-\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{n-1}\int_a^b \frac{N_1(x, x)}{D_n(\lambda)}\,dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n-k-1}\int_a^b\int \frac{N_1(x, y)}{D_n} f_k(x, y)\,dx\,dy.$$

On en conclut d'abord que $\frac{d\mathrm{K}}{d\lambda}$ est méromorphe en λ, car elle possède au plus des pôles aux zéros de $\mathrm{D}_n(\lambda)$, c'est-à-dire aux points $\lambda = \alpha\lambda_i$ où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et λ_i une *valeur propre* du noyau f_n. On peut alors montrer qu'en ces points de discontinuité possible le résidu de Cauchy de $\frac{d\mathrm{K}}{d\lambda}$ est 1 ou 0 suivant que l'on a $\alpha = 1$ ou $\alpha \neq 1$. Nous ne ferons pas le calcul ici; on utilise pour cela le fait que le résidu de $\frac{\mathrm{N}_1(x, y)}{\mathrm{D}_n}$ pour $\lambda = \lambda_k$ est égal à $\varphi_k(x) . \psi_k(y)$ où φ_k, ψ_k sont respectivement les *fonctions propres* correspondant à $\lambda = \lambda_k$, solutions des deux équations

$$\int_a^b \varphi_k(x) f_p(y, x)\, dx = \lambda_k^p \varphi_k(y),$$

$$\int_a^b \psi_k(z) f_p(z, y)\, dz = \lambda_k^p \psi_k(y).$$

Il suit de là que $e^{\mathrm{K}(\lambda)}$ est une fonction entière qui ne s'annule qu'aux points $\lambda = \lambda_i$.

Si l'on envisage de même le numérateur de G, on voit d'abord que c'est une fonction méromorphe de λ qui ne peut devenir infinie qu'aux points $\lambda = \alpha\lambda_i$. La considération des résidus montre alors que cela n'a pas lieu et par suite que le numérateur $e^{\mathrm{K}} \Sigma \lambda^h f_{h+1}$ est aussi une fonction entière en λ. La réduction annoncée pour la fonction de Fredholm est donc obtenue.

Nous obtiendrons les développements en série des deux termes de la fraction de Fredholm sous cette forme réduite, en revenant à la formation de $\mathrm{K}(\lambda)$; si nous posons, pour le dénominateur,

$$e^{\mathrm{K}(\lambda)} = \sum (-\lambda)^n \frac{a'_n}{n!},$$

nous aurons

$$a'_n = \sum_{a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = n} b_\alpha^a b_\beta^b b_\gamma^c \ldots,$$

à condition de poser

$$b_\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha < n$$

et

$$b_\alpha = \int_a^b f_\alpha(x, x)\, dx \qquad \text{pour } \alpha \geqq n.$$

Le numérateur est formé de manière analogue. On doit donc développer les déterminants selon l'usage courant, puis rejeter les termes de ce développement qui contiennent un facteur $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ avec moins de n variables.

Nos formules (2), (2_a), (3) sont également utiles lorsque, avec le noyau $f(x, y)$, tous les noyaux itérés deviennent infinis, cas où la méthode de Fredholm échoue certainement.

Supposons, par exemple, les nombres b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-1} infinis et b_n, b_{n+1}, $\ldots$ finis. On peut former la série $K(\lambda)$, chercher si elle est convergente et si $e^{K(\lambda)}$ est encore une fonction entière. Dans l'hypothèse où $f(x, y)$ est un noyau *symétrique*, c'est-à-dire où $f(x, y) = f(y, x)$, j'ai pu l'établir. J'utilise dans ce but les relations

$$b_n = \sum \lambda_\nu^{-n}$$

qui doivent avoir lieu pour $n > 2$, car le genre de la fonction $D(\lambda)$, d'après un théorème d'Hadamard, est inférieur à 2.

Le temps me manque pour indiquer ici ma démonstration. Je n'ai pas traité la question pour le numérateur de la fraction de Fredholm.

Quelques mots encore sur l'équation intégrale de *première espèce*.

On peut appliquer directement à certaines de ces équations, quand on les ramène d'abord à des équations intégrales de seconde espèce, la méthode de Fredholm.

Soit, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,[e^{ixy} + \lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

dans laquelle $\psi(x)$ est donné et $\varphi(x)$ inconnu, alors que la partie $f(x, y)$ du noyau est une fonction donnée qui est assujettie à certaines conditions restrictives indiquées plus loin.

Faisons, pour la fonction cherchée $\varphi(y)$, l'hypothèse

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z)\,e^{-izy}\,dz,$$

de laquelle, en vertu d'un théorème de Fourier sur les intégrales, on tire, lorsque $\Phi(x)$ satisfait aux conditions de sa valabilité,

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,e^{ixy}\,dy.$$

L'équation (1) se transforme alors en

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z)\,f(x, y)\,e^{-izy}\,dz\,dy = \psi(x),$$

ou encore

$$2\pi\Phi(x) - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)\,K(x, z)\,dz = \Psi(x),$$

quand on pose

$$(2)\qquad K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,e^{iyz}\,dy;$$

nous sommes ainsi parvenus à une équation intégrale de seconde espèce.

Le noyau (2) permet l'application de la méthode de Fredholm quand, par exemple, $f(x, y)$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ tendent uniformément en x vers zéro lorsque y devient $\pm\infty$ et qu'on a l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| < \frac{M}{1+y^2},$$

où M est une constante indépendante de x et de y.

Pour $\Psi(x)$, il suffit d'admettre que dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ elle n'a qu'un nombre limité de maxima et de minima et qu'elle est absolument intégrable.

On peut appliquer la même méthode à une série

$$\Psi(x) = \sum_m A_m\left(e^{imx} - \lambda\theta_m(x)\right);$$

le problème est ici aussi, quand $\Psi(x)$ et les $\theta_m(x)$ sont donnés, de calculer les coefficients A_m de telle sorte que le développement soit valable. De même que tout à l'heure il s'agissait d'une extension du *théorème intégral de Fourier*, nous avons affaire ici à une extension de la *série de Fourier*.

Si nous posons

$$\varphi(z) = \sum_m A_m e^{imz}; \qquad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi}\varphi(z)\,e^{-imz}\,dz,$$

nous aurons

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)\sum_m e^{-imz}\theta_m(x)\,dz.$$

Nous devons supposer que la série qui joue le rôle de noyau est absolument et uniformément convergente, c'est-à-dire nous devons admettre que

$$(3)\qquad \sum_m \theta_m(x)$$

converge uniformément.

Posons, par exemple,

$$\lambda = 1, \qquad \theta_m(x) = e^{i\mu_m x} - e^{imx},$$

nous obtiendrons un développement de la forme

$$\Psi(x) = \sum_m A_m e^{i\mu_m x}.$$

La condition (3) est remplie quand on suppose la convergence absolue de $\sum_m (\mu_m - m)$.

Considérons encore, enfin, l'équation

$$(4) \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(y)\left[e^{ixy} - \lambda f(x, y)\right] dy = \psi(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

qui se distingue de (1) en ce que l'intégrale est à prendre dans un intervalle fini et non entre $-\infty$ et $+\infty$.

Dans ce cas, $\psi(x)$ ne peut être pris arbitrairement : elle doit, si $f(x, y)$ est holomorphe, être une fonction entière pour que l'équation (4) admette une solution. Mais les valeurs $\psi(m)$ de cette fonction ψ pour tous les entiers m peuvent être choisies arbitrairement.

Si l'on pose en effet

$$\varphi(z) = \sum_{(m)} A_m e^{-imz} \qquad \text{où} \qquad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(y) e^{imy}\, dy,$$

l'équation (4) se transforme, pour $x = m$, en

$$2\pi A_m - \lambda \sum_p A_p \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y)\, dy = \psi(m).$$

Nous obtenons ainsi un système d'une infinité d'équations linéaires avec une infinité d'inconnues, tel que ceux étudiés par Hill, H. v. Koch, Hilbert entre autres. La résolution de ce système, au cas où nous supposons la série

$$(5) \qquad \sum_{p, m} \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y)\, dy$$

absolument et uniformément convergente, est tout à fait analogue à la résolution par Fredholm de l'équation intégrale et conduit aussi à une fonction méromorphe du paramètre λ.

La convergence absolue et uniforme de (5) est d'ailleurs, comme une inté-

gration par parties le montre, assurée au cas où la somme $\sum_m f''(m, z)$ ou l'intégrale $\int_{r}^{\infty} f''(x, z)\, dx$ est absolument et uniformément convergente.

On voit nettement l'analogie et la différence entre les deux cas (1) et (4); suivant que les limites de l'intégrale sont infinies ou finies, ou aussi suivant que le noyau présente aux limites d'intégration une allure régulière ou une singularité suffisamment élevée, on peut choisir la fonction *donnée* d'une manière essentiellement arbitraire ou seulement fixer une suite infinie mais *discrète* des valeurs qu'elle doit prendre. Il ne serait probablement pas sans intérêt d'approfondir cette distinction par l'emploi des noyaux itérés.

REMARQUES DIVERSES

SUR

L'ÉQUATION DE FREDHOLM [1]

Acta mathematica, t. 33, 1910, p. 57-86.

I. — Formules fondamentales.

Nous écrirons l'équation de Fredholm sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int f(x, y)\varphi(y)\,dy = \psi(x);$$

$\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $\psi(x)$ une fonction donnée, $f(x, y)$ le noyau (les limites de l'intégrale étant deux constantes). La solution du problème nous est donnée par la formule de Fredholm

$$(2) \qquad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N(\lambda; x, y)}{D(\lambda)}\,dy,$$

où $D(\lambda)$ est le $D_{-\lambda f}$ de Fredholm, tandis que $N(\lambda; x, y)$ s'écrit d'après les notations de Fredholm

$$-\frac{1}{\lambda} D_{-\lambda f}\binom{x}{y}.$$

Nous aurons donc

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\dots dx_n = 1 - \lambda \int f(x_1, x_1)\,dx_1 + \dots.$$

Je n'écris qu'un signe $\int$ pour une intégration multiple.

Nous aurons de même

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda^n)}{n!} \int f\begin{pmatrix} x, & x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y, & x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\dots dx_n$$
$$= f(x, y) - \lambda \int f\begin{pmatrix} x, & x_1 \\ y, & x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \dots.$$

[1] Imprimé le 12 septembre 1909.

Nous sommes ainsi conduits à examiner la formation du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix}.$$

Un des termes de son développement sera de la forme

$$\Pi f(x_i, x_k),$$

$\Pi f(x_i, x_k)$ représentant le produit d'un certain nombre de facteurs de la forme $f(x_i, x_k)$. Ces facteurs doivent satisfaire à la condition suivante : chacune des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devra figurer une fois et une seule *comme* x_i, c'est-à-dire comme premier argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. Elle devra figurer une fois et une seule *comme* x_k, c'est-à-dire comme second argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. A chacun des termes du déterminant correspondra ainsi une permutation des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$; à savoir celle qui change chacune des lettres x_i en la lettre x_k correspondante. Il y aura autant de termes dans le déterminant qu'il y a de semblables permutations, c'est-à-dire $n!$; et le produit Π devra être du signe $+$ si la permutation appartient au groupe alterné et du signe $-$ dans le cas contraire.

On peut répartir les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en un certain nombre de *cycles* de telle façon que la permutation S envisagée permute circulairement entre elles les lettres d'un même cycle. Si nous désignons par T(S) celui des termes $\pm \Pi f(x_i, x_k)$ de notre déterminant qui correspond à la permutation S, et si nous posons, pour abréger,

$$f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha),$$

nous pourrons écrire

$$T(S) = \pm \Pi f(x_i, x_k) = \pm \Pi f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu).$$

Le dernier membre représente un produit de facteurs de la forme

$$f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu).$$

Chacun de ces facteurs correspond à un des *cycles* de la permutation S et les lettres

$$x_\alpha, \quad x_\beta, \quad \ldots, \quad x_\lambda, \quad x_\mu$$

sont les lettres de ce cycle, qui sont permutées circulairement par S.

Quant au signe, on l'obtient en faisant le produit de différents facteurs ± 1 correspondant aux différents facteurs $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu)$, ces facteurs étant

égaux à $+1$ pour les cycles d'un nombre impair de lettres et à -1 pour les cycles d'un nombre pair de lettres.

Nous poserons

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a_n = \int f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \qquad a(S) = \int T(S)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \\ b_k = \int f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu)\, dx_\alpha\, dx_\beta \ldots dx_\lambda\, dx_\mu. \end{array}\right.$$

Dans cette dernière égalité, l'indice k de b_k représente le nombre des lettres du cycle x_α, x_β, $\ldots$, x_λ, x_μ; l'intégrale ne dépend évidemment que de ce nombre, puisque, quelles que soient les lettres x_α, $\ldots$, x_μ envisagées, on les fera toujours varier entre les mêmes limites.

Cela posé l'intégrale $a(S)$ va se décomposer en un produit d'intégrales b_k, puisque chacun des facteurs de $T(S)$ ne contient qu'un certain nombre de lettres x_α, $\ldots$, x_μ qui ne figurent pas dans les autres facteurs; nous pourrons écrire

$$a(S) = \Pi b_k$$

ou pour préciser le signe

$$(4)\qquad a(S) = \Pi[(-1)^{k+1} b_k].$$

Si par exemple $n = 17$ et que S comprenne 1 cycle de 4 lettres, 2 de 3 lettres, 3 de 2 lettres et 2 d'une lettre, nous aurons

$$a(S) = (-b_4)(b_3)^2(-b_2)^3(b_1)^2 = b_4 b_3^2 b_2^3 b_1^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$a_n = \Sigma a(S),$$

la sommation étant étendue aux différentes permutations S de n lettres. Nous devons donc rechercher combien il y a de permutations comprenant a cycles de α lettres, b cycles de β lettres, c cycles de γ lettres, d cycles de δ lettres, etc. En d'autres termes, de combien de manières peut-on répartir n lettres en a groupes de α lettres, b de β, c de γ, d de δ lettres, etc.? On rangera les lettres dans les différents ordres possibles qui sont au nombre de $n!$; on prendra ensuite les α premières lettres qui nous donneront le premier groupe, puis les α suivantes qui nous donneront le second, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait les a groupes de α lettres; on prendra ensuite les β lettres suivantes pour former le premier groupe de β lettres, et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi $n!$ solutions, mais elles ne sont pas distinctes; on obtient la même répartition en permutant *circulairement* les lettres d'un même groupe, ce qui nous oblige

à diviser par $\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots$; on obtient la même répartition en permutant d'une manière quelconque les divers groupes qui sont formés d'un même nombre de lettres, ce qui nous oblige à diviser par $a!\,b!\,c!\,d!\ldots$; le nombre cherché est donc

$$\frac{n!}{\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots a!\,b!\,c!\,d!\ldots}.$$

On aura donc

$$a_n = \sum \frac{n!}{\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \ldots a!\,b!\,c!\,d!\ldots} [(-1)^{\alpha+1} b_\alpha]^a [(-1)^{\beta+1} b_\beta]^b [(-1)^{\gamma+1} b_\gamma]^c [(-1)^{\delta+1} b_\delta]^d \ldots.$$

Les entiers α, β, γ, δ, ..., a, b, c, d, ... sont assujettis à la condition

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \ldots = n.$$

On a donc

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots} \left(\frac{-b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-b_\beta}{\beta}\right)^b \left(\frac{-b_\gamma}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-b_\delta}{\delta}\right)^d.$$

Il vient ensuite

$$(5) \quad D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!}$$
$$= \sum \frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots} \left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d \ldots,$$

de sorte que $D(\lambda)$ se présente sous la forme d'un produit

$$D(\lambda) = \Pi \varphi_\alpha; \qquad \varphi_\alpha = \sum \left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \frac{1}{a!}.$$

Mais la sommation est immédiate et l'on trouve

$$\varphi_\alpha = e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}}; \qquad \log \varphi_\alpha = -\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

d'où

$$(6) \qquad \log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de $D(\lambda)$

$$(7) \qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{\alpha-1} b_\alpha.$$

Ces formules ne sont pas nouvelles, elles ont été énoncées par Fredholm qui les a découvertes par une voie différente (*Acta mathematica*, t. 27, p. 384).

Appliquons la même analyse au calcul de $N(\lambda)$ et du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix}.$$

Chaque terme se présentera sous la forme

$$\Pi f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu),$$

sauf que l'un des facteurs sera remplacé par

$$(8) \qquad f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda) = f(x, x_\alpha) f(x_\alpha, x_\beta) \ldots f(x_\lambda, y).$$

Si nous posons

$$\int f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)\, dx_\alpha\, dx_\beta \ldots dx_\lambda = f_{k+1}(x, y),$$

cette intégrale ne dépendra que du nombre k des variables $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ par rapport auxquelles on intègre; c'est ce nombre qui figure dans l'indice $k+1$. Cette fonction $f_{k+1}(x, y)$ n'est autre chose que ce qu'on appelle le *noyau itéré* d'ordre $k+1$. On aura d'ailleurs

$$b_k = \int f_k(x, x)\, dx.$$

Si alors, par analogie avec les notations adoptées plus haut, nous désignons par $T'(S)$ un quelconque des termes de notre nouveau déterminant et par $a'(S)$ l'intégrale de $T'(S)$, nous trouverons comme plus haut

$$a'(S) = \pm f_{h+1}(x, y) \Pi b_k,$$

avec la condition

$$h + \Sigma k = n.$$

Le facteur $f_{h+1}(x, y)$ provient de l'intégration du facteur (8) et les divers facteurs b_k de l'intégration des autres facteurs de la forme $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\gamma)$. Je puis encore écrire

$$a'(S) = (-1)^h f_{h+1} a(S'),$$

où S' est la substitution qui permute entre elles les lettres qui figurent dans les facteurs autres que le facteur (8) et de la façon indiquée par l'ordre de ces lettres dans ces divers facteurs. Si alors nous désignons par a'_n l'intégrale de notre déterminant lui-même, il viendra en remarquant qu'on obtient autant de fois le même terme qu'il y a de manières de choisir les h lettres $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\gamma$ qui figurent dans le facteur (8); c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'arrange-

ments de n lettres h à h; c'est-à-dire $\frac{n!}{(n-h)!}$,

$$a'_n = \sum (-1)^h f_{h+1} a_{n-h} \frac{n!}{(n-h)!}$$

ou

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} a'_n = \sum \lambda^h f_{h+1} (-\lambda)^{n-h} \frac{a_{n-h}}{(n-h)!} = D(\lambda) \sum \lambda^h f_{h+1},$$

d'où enfin

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \lambda^h f_{h+1}. \tag{9}$$

Cette formule s'obtiendrait immédiatement en cherchant à développer suivant les puissances de λ la solution de l'équation (1).

Bien que les séries (6), (7) et (9) ne convergent que pour les petites valeurs de λ, leur considération peut abréger le calcul des termes des séries $D(\lambda)$ et $N(\lambda)$, qui, elles, convergent toujours. Mais ce n'est pas là l'usage que je veux en faire.

II. — Cas où le noyau devient infini.

La fonction

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe de λ; mais elle peut être mise d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux fonctions entières. En effet, on pourrait écrire

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{N(\lambda)G(\lambda)}{D(\lambda)G(\lambda)},$$

$G(\lambda)$ étant une fonction entière quelconque de λ; et si l'on veut que la fraction du second membre reste irréductible, il suffit de prendre

$$G(\lambda) = e^{H(\lambda)},$$

$H(\lambda)$ étant une fonction entière. En particulier nous pouvons prendre

$$H(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}.$$

Alors le dénominateur $D(\lambda)\,G(\lambda)$ reste une fonction entière, et le développement de son logarithme est le même que celui de $\log D(\lambda)$ en supprimant les n premiers termes.

Ces considérations prennent surtout de l'intérêt dans les cas où la méthode de Fredholm ne s'applique pas immédiatement, et où il faut recourir à la généralisation exposée par Fredholm pages 384 et suiv., par le moyen des noyaux itérés.

La méthode de Fredholm s'applique immédiatement quand le noyau f reste partout fini; supposons maintenant que les premiers noyaux itérés

$$f,\quad f_2,\quad \ldots,\quad f_{n-1}$$

deviennent infinis, mais que f_n et les noyaux suivants $f_{n+1}, \ldots$ restent partout finis. Nous supposerons de plus que les intégrales

$$\int f_i(x, y)\psi(y)\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, \text{ad inf.})$$

restent finies. Toutes ces conditions sont remplies dans l'hypothèse faites par Fredholm dans son paragraphe 6, c'est-à-dire si le noyau $f(x, y)$ ne devient infini que pour $x = y$ et comme $(x - y)^\alpha$ où $\alpha < \frac{n-1}{n}$.

L'équation (1) du paragraphe 1 peut alors être remplacée par la suivante :

$$(1\ bis) \qquad \varphi(x) + \lambda^n \int f_n(x, y)\varphi(y)\,dy = \Theta(x),$$

où

$$\Theta(x) = \psi(x) - \int \psi(y)(\lambda f - \lambda^2 f_2 + \ldots \pm \lambda^{n-1} f_{n-1})\,dy$$

est une fonction connue. La méthode de Fredholm est alors immédiatement applicable à l'équation (1 *bis*) que l'on peut résoudre par une formule analogue à la formule (2) du paragraphe 1, où l'on remplace seulement λ par λ^n, f par f_n, et ψ par Θ. Si nous convenons d'écrire $N(\lambda, f)$ et $D(\lambda, f)$ au lieu de $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ pour mettre en évidence la fonction f, la nouvelle formule pourra s'écrire

$$(2\ bis) \qquad \varphi(x) = \Theta(x) - \lambda^n \int \Theta(y)\frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)}\,dy$$

ou bien encore

$$(2\ ter) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int \psi(y)\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}\,dy.$$

Pour définir $N_1(\lambda)$, nous poserons

$$f - \lambda f_2 + \ldots \pm \lambda^{n-2} f_{n-1} = F(x, y)$$

et nous aurons alors

$$N_1(\lambda) = F(x, y)D(\lambda^n, f_n) + \lambda^{n-1} N(\lambda^n, f_n) - \lambda^{n-1}\int N(\lambda^n, f_n; x, z)F(z, y)\,dz.$$

La fonction

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe; et nous sommes certains que le numérateur et le dénominateur sont des séries entières toujours convergentes. Mais il n'est pas certain que cette fraction soit irréductible; il est même aisé de se rendre compte qu'elle ne l'est pas en général. En effet la formule subsiste quand le noyau f est toujours fini; mais dans ce cas, la formule (2) est vraie également, de sorte qu'on a

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda, f)};$$

le dénominateur de la première fraction admet tous les zéros

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots$$

du dénominateur de la deuxième; mais il admet en outre tous les zéros

$$\alpha\lambda_1, \quad \alpha\lambda_2, \quad \ldots,$$

où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Cela montre que la première fraction n'est pas irréductible.

Le problème que je me propose maintenant, c'est dans le cas où les premiers noyaux itérés ne sont pas partout finis, *de trouver une formule analogue à la formule (2 ter), mais où figure une fraction irréductible.*

Je vais établir que le résultat est le suivant. Il suffira de remplacer dans la formule (2) N(λ) et D(λ) par

$$N(\lambda)e^{-H(\lambda)}, \quad D(\lambda)e^{-H(\lambda)},$$

où H(λ) est l'ensemble des $n-1$ premiers termes de log D(λ). Reprenons le développement de ce logarithme

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

b_1, b_2, ..., b_{n-1} peuvent être infinis, mais b_n, b_{n+1}, ... sont finis. Formons alors la série

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^n b_n}{n} - \frac{\lambda^{n+1} b_{n+1}}{(n+1)} - \frac{\lambda^{n+2} b_{n+2}}{(n+2)} - \ldots.$$

Nous montrerons que la série K(λ) est convergente pour les petites valeurs de λ; que $e^{K(\lambda)}$ est une fonction entière; que

$$e^{K(\lambda)} \Sigma \lambda^h f_{h+1}$$

est également une fonction entière, sauf pour $x = y$ auquel cas quelques-uns de ses coefficients deviennent infinis.

Revenons un instant au cas où f reste fini et reprenons la formule (9) du paragraphe 1

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h f_{h+1}.$$

Si nous revenons au cas où f_n est le premier noyau itéré qui reste fini, et si nous changeons λ en λ^n et f en f_n, cette formule deviendra

(3) $$\frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{nh} f_{nh+n},$$

ou en mettant en évidence les variables x et y

$$\frac{N(\lambda^n, f_n; x, y)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum \lambda^{nh} f_{nh+n}(x, y),$$

d'où en supprimant pour abréger les indications λ^n et f_n devenues inutiles

(4) $$\int \frac{N(x, x)}{D} dx = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n}$$

et

(5) $$\int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x)\, dx\, dy = \sum \lambda^{nh} \int f_{nh+n}(x, y) f_k(y, x)\, dx\, dy = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k}.$$

Reprenons notre fonction $K(\lambda)$, nous aurons

$$\frac{dK}{d\lambda} = \lambda^{n-1} b_n + \lambda^n b_{n+1} + \lambda^{n+1} b_{n+2} + \ldots;$$

le second membre peut s'écrire

$$\lambda^{n-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n} + \lambda^n \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+1} + \ldots$$
$$+ \lambda^{n+k-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k} + \ldots + \lambda^{2n-2} \sum \lambda^{nh} b_{nh+2n-1}$$

ou bien

(6) $$\lambda^{n-1} \int \frac{N(x, x)}{D} dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x)\, dx\, dy.$$

Comme $D = D(\lambda^n, f_n)$ et $N(x, y) = N(\lambda^n, f_n; x, y)$ sont des fonctions entières de λ, on voit que l'expression (6) et par conséquent $\frac{dK}{d\lambda}$ est une fonction méromorphe de λ et que les infinis de cette fonction méromorphe ne sont autre chose que les zéros de $D(\lambda^n, f_n)$.

Or, d'après Fredholm, si l'on a

$$D(\lambda_K^n, f_n) = 0$$

et si λ_K^n est un zéro simple, ce que je supposerai, il existera une fonction $\varphi_K(x)$ et une seule telle que

$$(7) \qquad \varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \varphi_K(y) f_n(x, y)\, dy.$$

En convenant de poser

$$\int \varphi(y) f_p(x, y)\, dy = S^p \varphi(x),$$

d'où

$$S^p S^q \varphi(x) = S^{p+q} \varphi(x),$$

cette relation peut s'écrire

$$(7\ bis) \qquad \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^n \varphi_K(x).$$

on en déduit

$$S \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^{n+1} \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^n [S \varphi_K(x)],$$

de sorte que $S\varphi_K(x)$ sera aussi une solution de l'équation (7) ou (7 *bis*); comme cette équation ne comporte qu'une solution, on devra avoir

$$S \varphi_K(x) = \alpha \varphi_K(x),$$

α étant un coefficient constant.

On en tire

$$S^n \varphi_K(x) = \alpha^n \varphi_K(x),$$

d'où en comparant avec (7 *bis*)

$$\alpha^n = \frac{1}{\lambda_K^n},$$

ce qui revient à dire que α est égal à $\frac{1}{\lambda_K}$, à une racine $n^{\text{ième}}$ près de l'unité. Nous pourrons toujours choisir λ_K de telle façon que cette racine $n^{\text{ième}}$ soit égale à 1 et que l'on ait

$$\varphi_K(x) = \lambda_K S \varphi_K(x).$$

On obtiendrait un résultat analogue dans le cas d'une racine multiple; je ne reproduis pas ici l'analyse complète qui a déjà été faite bien des fois. Cela posé reprenons notre fonction méromorphe $\frac{dK}{d\lambda}$ et proposons-nous de déterminer le *résidu* de cette fonction méromorphe pour le pôle $\lambda = \lambda_K$ et pour les pôles correspondants $\lambda = \alpha\lambda_K$, α étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Cherchons d'abord ce résidu pour

$$\int \frac{N(x, x)}{D}\, dx = \sum \lambda''^{h} b_{nh+n}.$$

Cette expression n'est autre chose que

$$-\frac{d \log D(\lambda'', f_n)}{d\lambda''}.$$

Son résidu est donc -1, si l'on considère λ'' comme la variable indépendante, c'est-à-dire que le terme infini sera de la forme

$$-\frac{1}{\lambda'' - \lambda''_K},$$

et le résidu correspondant, si l'on reprend λ comme variable, est

$$-\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}},$$

c'est-à dire, $\frac{1}{n}\lambda_K^{1-n}$ pour le pôle λ_K et $-\frac{1}{n}(\alpha\lambda_K)^{1-n}$ pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Pour le premier terme de l'expression (6), le résidu est donc $\frac{1}{n}$ tant pour le pôle λ_K que pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Considérons maintenant le terme général de l'expression (6), c'est-à-dire

$$\lambda^{n+p-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\, dx\, dy.$$

Le résidu de $\frac{N(x, y)}{D}$ pour $\lambda'' = \lambda''_i$, en considérant de nouveau λ'' comme la variable indépendante, sera une fonction de x et de y de la forme $\varphi_K(x)\psi_K(y)$, en vertu d'un théorème connu, d'après ce qui précède : le résidu par rapport à λ'' de

$$\int \frac{N(x, x)}{D}\, dx$$

devra être

$$-1 = \int \varphi_K(x)\psi_K(x)\, dx$$

et celui de

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\, dx\, dy$$

sera

$$\int \varphi_K(x)\psi_K(y) f_p(y, x)\, dx\, dy.$$

Mais on a, d'après l'équation (8),

$$\int \varphi_K(x) f(y, x)\, dx = S\varphi_K(y) - \frac{1}{\lambda_K}\varphi_K(y)$$

et plus généralement

$$\int \varphi_K(x) f_p(y, x)\, dx = S^p \varphi_K(y) = \frac{1}{\lambda_K^p} \varphi_K(y).$$

Le résidu cherché sera donc

$$\frac{1}{\lambda_K^p} \int \varphi_K(y) \psi_K(y)\, dy = \frac{1}{\lambda_K^p}$$

et par rapport à λ

$$-\frac{1}{n \lambda_K^p \lambda^{n-1}} = -\frac{1}{n} \lambda_K^{1-n-p} \alpha^{1-n}$$

pour le pôle $\lambda = \alpha\lambda_K$. Pour le terme correspondant de l'expression (6), qui est affecté du facteur λ^{n+p-1}, il faudra multiplier par

$$\lambda^{n+p-1} = (\alpha\lambda_K)^{n+p-1},$$

de sorte qu'on trouvera

$$-\frac{1}{n} \alpha^p.$$

Nous avions trouvé pour le premier terme de l'expression (6)

$$-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \alpha^n,$$

de sorte que le résidu total de l'expression (6) est

$$-\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p.$$

Cela fait -1 pour le pôle $\lambda = \lambda_K$, c'est-à-dire pour $\alpha = 1$, et 0 pour le pôle $\lambda = \alpha\lambda_K$ quand α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, différente de 1.

Ainsi, l'expression

$$\frac{dK}{d\lambda} - \lambda^{n-1} b_n - \lambda^n b_{n+1} - \dots$$

est une fonction méromorphe de λ dont tous les résidus sont égaux à 1. Donc l'expression

$$e^{K\lambda}$$

sera une fonction entière de λ. C. Q. F. D.

Il resterait à établir que

$$\sum \lambda^h f_{h+1} e^{K\lambda} \tag{9}$$

est également une fonction entière de λ.

En effet, nous avons d'après la formule (2 *ter*)

$$\sum \lambda^h f_{h+1} = \frac{\mathrm{N}_1(\lambda)}{\mathrm{D}(\lambda^n, f_n)},$$

ce qui nous prouve que l'expression (9) est une fonction méromorphe de λ, qui ne pourrait devenir infinie que pour $\mathrm{D}(\lambda^n, f_n) = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda = \lambda_{\mathrm{K}}$ et pour $\lambda = \alpha\lambda_{\mathrm{K}}$. Comme $e^{\mathrm{K}\lambda}$ s'annule pour $\lambda = \lambda_{\mathrm{K}}$, nous voyons que l'expression (9), c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{N}_1(\lambda)}{\mathrm{D}} e^{\mathrm{K}\lambda},$$

où j'ai écrit D au lieu de $\mathrm{D}(\lambda^n, f_n)$, reste finie pour $\lambda = \lambda_{\mathrm{K}}$; il me reste à montrer que $\mathrm{N}_1(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = \alpha\lambda_{\mathrm{K}}$; ou que le résidu correspondant de $\frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{D}}$ est nul. Nous avons donc à évaluer le résidu de

$$(10) \qquad \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{D}} = \mathrm{F} + \lambda^n \frac{\mathrm{N}(x, y)}{\mathrm{D}} + \lambda^{n+1} \int \frac{\mathrm{N}(x, z)}{\mathrm{D}} \mathrm{F}\, dz.$$

Le premier terme du second membre de (10) ne devient pas infini; le second a pour résidu

$$\lambda_{\mathrm{K}}^n \varphi_{\mathrm{K}}(x) \psi_{\mathrm{K}}(y) \frac{1}{n\lambda_{\mathrm{K}}^{n-1}}$$

et le troisième

$$\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{K}}^{n-1}} \alpha\lambda_{\mathrm{K}}^{n+1} \int \varphi_{\mathrm{K}}(x) \psi_{\mathrm{K}}(z) \mathrm{F}(z, y)\, dz = \frac{1}{n\lambda_{\mathrm{K}}^{n-1}} \sum \alpha^p \lambda_{\mathrm{K}}^{n-p} \int \varphi_{\mathrm{K}}(x) \psi_{\mathrm{K}}(z) f_p(z, y)\, dz.$$

Nous sommes donc amenés à calculer

$$\int \psi_{\mathrm{K}}(z) f_p(z, y)\, dz.$$

Nous démontrerons bientôt que l'on a

$$(11) \qquad \int \psi_{\mathrm{K}}(z) f_p(z, y)\, dz = \lambda_{\mathrm{K}}^{p} \psi_{\mathrm{K}}(y),$$

de sorte qu'il viendra pour notre résidu

$$\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{K}}^{n-1}} \sum_{p=1}^{n-1} \alpha^p \lambda_{\mathrm{K}}^n \varphi_{\mathrm{K}}(x) \psi_{\mathrm{K}}(y)$$

et pour le résidu total de l'expression (10)

$$\frac{1}{n\lambda_{\mathrm{K}}^{n-1}} \lambda_{\mathrm{K}}^n \varphi_{\mathrm{K}}(x) \psi_{\mathrm{K}}(y) \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^p, \quad \text{c'est-à-dire zéro.}$$

Donc l'expression (9) ne devenant infinie ni pour $\lambda = \lambda_K$ ni pour $\lambda = \alpha\lambda_K$ est une fonction entière. C. Q. F. D.

Il nous reste à démontrer l'égalité (11). A cet effet, remarquons que $N(y, x)$ et $f_p(y, x)$ sont à $f(y, x)$, ce que $N(x, y)$ et $f_p(x, y)$ sont à $f(x, y)$. Le résidu de $\frac{1}{D}N(x, y)$ étant $\varphi_K(x)\psi_K(y)$ et par conséquent celui de $\frac{1}{D}N(y, x)$ étant $\varphi_K(y)\psi_K(x)$, nous voyons que $\psi_K(x)$ est à $f(y, x)$ ce que $\varphi_K(x)$ est à $f(x, y)$. Alors de même que l'on a

$$(12) \qquad \varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \varphi_K(y) f_n(x, y)\, dy$$

et que $\varphi_K(x)$ est la seule solution de cette équation; de même on aura

$$(12\ bis) \qquad \psi_K(x) = \lambda_K^n \int \psi_K(y) f_n(y, x)\, dy$$

et $\psi_K(x)$ sera la seule solution de cette équation. De l'équation (12) nous avons déduit

$$(13) \qquad \varphi_K(x) = \beta\lambda_K \int \varphi_K(y) f(x, y)\, dy,$$

β étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, de même de (12 *bis*) nous déduirons

$$(13\ bis) \qquad \psi_K(x) = \beta'\lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy,$$

β' étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; et il reste à faire voir que $\beta = \beta' = 1$. Pour cela remarquons que f_{n+1} étant toujours fini comme f_n, nous pouvons raisonner sur l'un de ces noyaux comme sur l'autre. Il existera donc des fonctions $\varphi'_K(x)$ et $\psi'_K(x)$ satisfaisant aux équations

$$(14) \qquad \varphi'_K(x) = \gamma\lambda_K \int \varphi'_K(y) f(x, y)\, dy,$$

$$(14\ bis) \qquad \psi'_K(x) = \gamma'\lambda_K \int \psi'_K(y) f(y, x)\, dy,$$

γ et γ' étant deux racines $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Il est aisé de voir que φ'_K est égal à φ_K, et ψ'_K à ψ_K; sans quoi on aurait

$$\varphi'_K(x) = \gamma^n \lambda_K^n \int \varphi'_K(y) f_n(x, y)\, dy,$$

$$\psi'_K(x) = \gamma'^n \lambda_K^n \int \psi'_K(y) f_n(y, x)\, dy,$$

et nous devrions conclure que $D(\lambda^n, f_n)$ admet outre la racine λ_K^n les racines $\gamma^n\lambda_K^n$ et $\gamma'^n\lambda_K^n$, c'est-à-dire plusieurs racines (deux au moins, ou une racine

double) de même module que λ_K^n. Cela n'arrivera pas en général (et il est aisé de voir comment on devrait raisonner dans les cas d'exception).

Il faut donc que

$$\varphi'_K = \varphi_K, \quad \psi'_K = \psi_K, \quad \gamma = \beta, \quad \gamma' = \beta',$$
$$\gamma^n = \beta^n = 1, \quad \gamma'^n = \beta'^n = 1, \quad \gamma^n = \gamma^{n+1} = 1, \quad \gamma'^n = \gamma'^{n+1} = 1,$$

d'où enfin

$$\gamma = \gamma' = 1.$$

L'équation (13 *bis*) s'écrit alors

$$\psi_K(x) = \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy,$$

et il est aisé d'en déduire

$$\psi_K(x) = \lambda_K^n \int \psi_K(y) f_n(y, x)\, dy,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11) qu'il fallait démontrer.

III. — Formation de la fonction méromorphe.

On peut tirer de là une façon de calculer les divers termes du développement du numérateur et du dénominateur de notre fonction méromorphe. Nous avons trouvé plus haut

$$\text{(1)} \qquad \log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

formule que nous avons déduite de la suivante :

$$\text{(2)} \qquad D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!}$$
$$= \sum \frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots} \left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d \ldots$$

Comment pourrons-nous passer de ces développements à ceux de notre nouveau dénominateur $e^{K(\lambda)}$ et de son logarithme $K(\lambda)$. Pour passer du développement (1) à celui de $K(\lambda)$, il suffit de supprimer les $n-1$ premiers termes, c'est-à-dire de remplacer $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par 0; on obtiendra de même le développement de e^K en partant du développement (2) et en y remplaçant $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par zéro. Soit donc

$$\text{(2 bis)} \qquad e^{K} = \sum \frac{(-\lambda)^n \alpha_n}{n!}.$$

Nous avons trouvé plus haut

$$a_n = \Sigma a(S) = \Sigma \pm b_\alpha^a b_\beta^b b_\gamma^c b_\delta^d \ldots.$$

Pour obtenir a'_n, il suffira dans le troisième membre de cette double égalité de remplacer $b_1, \ldots, b_{n-1}$ par zéro. Mais $a(S)$ provient de l'intégration d'un des termes $T(S)$ du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

et b_a de celle de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_a)$. D'où la règle suivante :

Quand le noyau deviendra infini pour $x = y$ de la même façon que $(x - y)^\alpha$ où $\alpha < \frac{n-1}{n}$, on pourra former le dénominateur de notre fonction méromorphe en appliquant la règle générale de Fredholm; et par conséquent en partant des déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix},$$

seulement il faudra supprimer tous ceux des termes de ces déterminants qui contiennent un facteur de la forme

$$f(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots, x_\lambda, x_\mu) - f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha)$$

les lettres x_α, x_β, x_γ $\ldots$, x_λ, x_μ formant un cycle de moins de n lettres.

La même règle s'applique à la formation du numérateur.

Dans le cas de $n = 2$, il suffira donc de supprimer les facteurs de la forme $f(x_i, x_i)$, c'est-à-dire de remplacer dans nos déterminants tous les termes de la diagonale principale par zéro. Cette règle, dans ce cas particulier, avait déjà été trouvée par une autre voie par Hilbert dans le dernier paragraphe de son premier Mémoire (*Göttinger Nachrichten*, 1904).

IV. — La question du genre.

Fredholm a démontré que les coefficients de la fonction entière $D(\lambda)$ décroissent comme $(n^n)^{-\frac{1}{2}}$; et que la décroissance est plus rapide encore quand le noyau $f(x, y)$ satisfait à certaines conditions de continuité. Si par exemple

on a

$$(1)\quad \begin{cases} |f(x,y)-f(x,y')| < A|y-y'|^{\alpha}, \\ |f(x,y)-f(x',y)| < A|x-x'|^{\alpha}, \end{cases}$$

A et α étant des constantes, les coefficients a_n décroîtront comme $(n'')^{-\alpha-\frac{1}{2}}$.

D'un autre côté Hadamard a démontré que si le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'une fonction entière est de l'ordre de $(n'')^{-\frac{1}{\lambda}}$, le genre de cette fonction entière sera E, en désignant par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur à λ. Si λ est entier, il peut y avoir doute et le genre peut être égal à λ ou à $\lambda-1$.

Donc le genre de la fonction $D(\lambda)$ dépendra de l'exposant α qui figure dans les inégalités (1); il sera zéro pour $\alpha > \frac{1}{2}$, il sera au plus égal à 1 pour $\alpha > 0$, $\alpha \leqq \frac{1}{2}$; et enfin au plus égal à 2 pour $\alpha = 0$. Si donc le noyau a des dérivées premières finies de sorte que $\alpha = 1$, le genre de $D(\lambda)$ sera certainement nul.

Nous pouvons nous demander ce que devient l'exposant α quand on passe du noyau $f(x,y)$ aux noyaux itérés successifs. Supposons que $f(x,y)$ soit de la forme

$$f(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} \qquad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right),$$

$\psi(x,y)$ étant holomorphe. On peut alors établir l'inégalité

$$|f_2(x',y)-f_2(x,y)| < A|x-x'|^{1-2\alpha},$$

A étant une constante. La fonction

$$D(\lambda^2, f_2)$$

sera donc une fonction entière de genre zéro par rapport à λ^2 pourvu que l'exposant $(1-2\alpha)$ soit plus grand que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pourvu que

$$\alpha < \frac{1}{4}.$$

Si alors le noyau $f(x,y)$ n'est pas partout fini, la fonction $D(\lambda, f)$ n'existe pas en général, mais nous pouvons, comme dans le paragraphe II, former les deux fonctions entières

$$e^{K(\lambda)}, \quad \Sigma\lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)};$$

on a d'ailleurs

$$D(\lambda^2, f_2) = e^{K(\lambda)} e^{K(-\lambda)}.$$

La fonction $e^{K(\lambda)}$ sera en général dans ce cas de genre 1, de sorte que $e^{K(\lambda)}$

sera le produit d'un certain nombre de facteurs primaires de la forme

$$e^{\beta\lambda}(1-\gamma_i\lambda).$$

Le facteur primaire correspondant de $e^{K(-\lambda)}$ sera alors

$$e^{-\beta\lambda}(1+\gamma_i\lambda)$$

et celui de $D(\lambda^2, f_2)$ sera

$$1-\gamma_i^2\lambda^2,$$

ce qui explique que la fonction $D(\lambda^2, f_2)$ soit de genre zéro.

Les résultats des trois premiers paragraphes s'appliquent sans changement lorsque les intégrales et les fonctions connues ou inconnues qui figurent dans l'équation de Fredholm sont des intégrales doubles ou triples, et des fonctions de deux et de trois variables, au lieu d'être des intégrales simples, et des fonctions d'une seule variable. Mais il n'en est pas de même des résultats relatifs au genre, que nous venons d'exposer. Le genre ne s'abaisse plus quand les inégalités (1) sont satisfaites, ou plutôt il s'abaisse moins rapidement. Un résultat subsiste toutefois, et c'est le seul qui nous importe, *le genre de* D(λ) *reste toujours au plus égal à* 2.

Comme d'ailleurs nous avons

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\Sigma\lambda^{n-1}b_n$$

et que l'on peut écrire en décomposant D(λ) en facteurs primaires

$$D(\lambda) = \Pi\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)e^{P_i},$$

λ_i étant les *valeurs propres* de l'équation de Fredholm, c'est-à-dire les racines de $D(\lambda) = 0$ et P_i étant un polynome du second degré au plus; on en déduit

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum\frac{1}{\lambda-\lambda_i} + \Sigma P'_i = -\sum\sum\frac{\lambda^n}{\lambda_i^{n+1}} + \Sigma P'_i,$$

d'où en identifiant les deux développements de $\frac{D'}{D}$ et remarquant que $\Sigma P'_i$ ne peut donner que des termes de degré 0 et 1 :

(2) $$b_n = \Sigma\lambda_i^{-n},$$

égalité qui est exacte pour $n > 2$.

V. — Tentative de généralisation.

Au paragraphe II, nous avons donné une règle pour former notre fonction méromorphe de λ quand le noyau $f(x, y)$ peut devenir infini, tandis que l'un des noyaux itérés successifs $f_n(x, y)$ reste partout fini.

On est naturellement amené à penser que la même règle restera applicable dans des cas beaucoup plus généraux, à savoir :

1° Si les intégrales

$$\int f(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

sont finies, sauf pour des valeurs èxceptionnelles de x.

2° Si en même temps à partir d'un certain rang, les nombres que nous avons appelés b_n sont finis.

Il est clair que cela peut arriver dans des cas où tous les noyaux $f_n(x, y)$ présentent encore des infinis, et l'on peut se demander si les règles des paragraphes II et III peuvent néanmoins être appliquées.

Je me bornerai au cas où toutes les *valeurs propres* λ_i sont réelles et positives. Les théorèmes de Hilbert nous permettent de reconnaître dans quel cas cela a certainement lieu. Ainsi, si le noyau est *symétrique*, les λ_i sont certainement réels; ils seront positifs quand la forme quadratique qui correspond à ce noyau sera définie; et par exemple, si $f(x, y)$ est un noyau symétrique, les valeurs propres relatives au noyau redoublé $f_2(x, y)$ seront réelles et positives.

Cela posé, nous supposons que notre noyau $f(x, y)$ symétrique devient infini pour certaines valeurs de x et de y; par exemple en certains points singuliers ou sur certaines lignes singulières du plan des xy. Nous emploierons le même artifice que M. Hilbert à la fin de son premier Mémoire. Nous subdiviserons la partie du plan des xy à laquelle s'étend l'intégration (c'est-à-dire par exemple le carré $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, si les limites d'intégration de l'intégrale de Fredholm sont 0 et 1). Ce carré sera ainsi divisé en deux aires A et A' que nous assujettirons aux conditions suivantes : 1° Tous les points et lignes singulières devront se trouver dans A'. 2° Chacune des deux aires A et A' devrait être symétrique par rapport à la droite $x = y$. Nous définirons ensuite un noyau symétrique $f'(x, y)$ de la façon suivante :

$$f'(x, y) = f(x, y) \quad (\text{dans A}), \qquad f'(x, y) = 0 \quad (\text{dans A}').$$

Nous désignerons par λ_i et b_n les valeurs de ces quantités qui correspondent à $f(x, y)$ et par λ'_i et b'_n les valeurs des quantités correspondantes pour $f'(x, y)$.

Nous ferons ensuite tendre l'aire A′ vers zéro, de telle sorte que λ'_i tende vers λ_i et b'_i vers b_n. Le noyau $f'(x, y)$ étant symétrique, les λ'_i seront tous réels, et nous pouvons nous arranger de façon qu'ils soient tous positifs. Comme le noyau $f'(x, y)$ est partout fini, les résultats du paragraphe IV seront applicables et nous aurons

$$b'_n = \Sigma \lambda'^{-n}_i. \tag{1}$$

Nous supposerons les λ'_i rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons ensuite

$$b_n = \lim b'_n.$$

Je dis d'abord que $\sqrt[n]{b_n}$ tend vers une limite pour $n = \infty$. En effet, les λ'_i étant réels positifs, les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ sont positives; de plus on a

$$b'_{n+1} < b'_n \lambda'^{-1}_1, \qquad b'_n > \lambda'^{-n}_1,$$

d'où

$$b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n+1}}_n \lambda'^{\frac{-1}{n+1}}_1, \qquad \lambda'^{-1}_1 < b'^{\frac{1}{n}}_n$$

et enfin

$$\lambda'^{\frac{-1}{n+1}}_1 < b'^{\frac{1}{n(n+1)}}_n, \qquad b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n}}_n.$$

Les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ vont donc en décroissant quand n croît; il en résulte qu'à la limite les quantités $\sqrt[n]{b_n}$ iront en décroissant quand n croît (ou du moins ne pourront croître) et comme ces quantités sont positives, elles tendront vers une limite pour $n = \infty$; cette limite, je l'appelle λ^{-1}_1.

Je dis maintenant que l'on a

$$\lambda_1 = \lim \lambda'_1.$$

Observons d'abord que, *au moins si n est pair*, b'_n va en décroissant quand n étant constant, l'aire A′ diminue; on a en effet

$$b'_{2n} = \int f'_n(x, y) f'_n(y, x)\, dx\, dy.$$

Mais le noyau étant symétrique, cela peut s'écrire

$$b'_{2n} = \int f'^2_n(x, y)\, dx\, dy$$

et d'après sa définition $f'^2_n(x, y)$ ne peut que croître quand l'aire A′ diminue; on aura donc si n est pair

$$b'_n < b_n.$$

De plus pour $n > p$, d'après notre hypothèse, les quantités b_n sont finies; nous aurons donc si p est un nombre pair suffisamment grand

$$b'_p = \Sigma \lambda_i'^{-p} < b_p.$$

Les quantités

$$\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$$

vont en croissant quand n croît; il en est donc de même des limites vers lesquelles tendent ces quantités quand l'aire A′ tend vers zéro, c'est-à-dire de

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les quantités $\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tendent pour $n = \infty$, vers les mêmes limites que les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$, $\sqrt[n]{b_n}$, c'est-à-dire vers $\lambda_1'^{-1}$ et λ_1^{-1}; mais elles tendent vers ces limites en croissant, tandis que $\sqrt[n]{b_n}$, $\sqrt[n]{b'_n}$ tendent vers ces limites en décroissant. On aura donc

$$\sqrt[n]{b'_n} > \lambda_1'^{-1} > \frac{b'_{n+1}}{b'_n}, \quad \sqrt[n]{b_n} > \lambda_1^{-1} > \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

d'où

$$\frac{b'_{n+p}}{b'_n} < \lambda_1'^{-p}, \quad \frac{b_{n+p}}{b_n} < \lambda_1^{-p}.$$

On tire de là

$$\lambda_1'^{-n} < b'_n < b'_p \lambda_1'^{p-n} < b_p \lambda_1'^{p-n},$$
$$\lambda_1^{-n} < b_n < b_p \lambda_1^{p-n};$$

(2) $$\frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-p}} < b_p^{\frac{1}{n-p}} \lambda_1^{\frac{p}{n-p}}; \quad \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n}} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Nous ne savons pas encore si λ'_1 tend vers une limite quand l'aire A′ tend vers zéro; mais nous pouvons parler de la limite supérieure et de la limite inférieure de λ'_1; je veux dire que λ'_1 oscillera entre deux limites, dont l'une tendra vers $\lim\sup \lambda'_1$ et l'autre vers $\lim\inf \lambda'_1$ quand A′ tendra vers zéro; à la limite les inégalités (2) deviendront donc puisque ($\lim b'_n = b_n$) :

(3) $$\frac{\lim\sup \lambda'_1}{\lambda_1} \leq b_p^{\frac{1}{n-p}} \lambda_1^{\frac{p}{n-p}}; \quad \frac{\lim\inf \lambda'_1}{\lambda_1} \geq b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Mais comme nous pouvons prendre n assez grand pour que les seconds membres de l'inégalité (3) soient aussi voisins de 1 que nous voudrons, nous pouvons écrire

$$\frac{\lim\sup \lambda'_1}{\lambda_1} \leq 1; \quad \frac{\lim\inf \lambda'_1}{\lambda_1} \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$\lim \lambda'_1 = \lambda_1.$$ C. Q. F. D.

On verrait comme plus haut que les quantités

$$(b'_n - \lambda_1'^{-n})^{\frac{1}{n}} = (\lambda_2'^{-n} + \lambda_3'^{-n} + \dots)^{\frac{1}{n}}$$

vont en décroissant quand n croît indéfiniment, et que l'aire A' demeure constante. D'autre part on a

$$\lim (b'_n - \lambda_1'^{-n}) = b_n - \lambda_1^{-n}$$

quand n restant constant, A' tend vers zéro. On voit qu'à la limite

$$(b_n - \lambda_1^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

décroît quand n croît. Cette expression pour $n = \infty$ tend donc vers une limite que j'appelle λ_2^{-1}.

On verrait ensuite que les expressions

$$\frac{b'_{n+1} - \lambda_1'^{-n-1}}{b'_n - \lambda_1'^{-n}}$$

et par conséquent

$$\frac{b_{n+1} - \lambda_1^{-n-1}}{b_n - \lambda_1^{-n}}$$

vont en croissant avec n et l'on en déduirait les inégalités

$$\lambda_2'^{-n} > b'_n - \lambda_1'^{-n} > (b'_p - \lambda_1'^{-p})\lambda_2'^{p-n} > b'_p\lambda_2'^{p-n} > b_p\lambda_2'^{p-n},$$
$$\lambda_2^{-n} > b_n - \lambda_1^{-n} > (b_p - \lambda_1^{-p})\lambda_2^{p-n} > b_p\lambda_2^{p-n},$$

et en raisonnant ensuite sur $b_n - \lambda_1^{-n}$, $b'_n - \lambda_1'^{-n}$, λ'_2 et λ_2 comme nous l'avons fait sur b_n, b'_n, λ'_1 et λ_1, nous verrions que

$$\lim \lambda'_2 = \lambda_2.$$

Et ainsi de suite.

Je dis maintenant que si nous considérons la fonction

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^p b_p}{p} - \frac{\lambda^{p+1} b_{p+1}}{p+1} - \dots,$$

c'est le logarithme d'une fonction entière de λ. Soit en effet

$$K_1(\lambda) = K(\lambda) - \sum_{i=1}^{i=h} \log\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = -\sum \frac{c_q \lambda^q}{q}.$$

Nous aurons pour $q > p$

$$c_q = b_q - \lambda_1^{-q} - \lambda_2^{-q} - \dots - \lambda_h^{-q}$$

et par conséquent

$$\lim \sqrt[q]{c_q} = \lambda_{h+1}^{-1}.$$

La fonction $K_1(\lambda)$ est donc holomorphe pour $|\lambda| < |\lambda_{h+1}^{-1}|$ et il en est de

même de e^{K_1} ou de

$$e^{K_1}\prod_{i=1}^{i=h}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)=e^{K_h}.$$

Mais nous pouvons prendre h assez grand pour que λ_{h+1} soit aussi grand que l'on veut. On a en effet

$$b_p > \lambda_1^{-p} + \lambda_2^{-p} + \ldots + \lambda_h^{-p} > h\,\lambda_{h+1}^{-p},$$

d'où

$$\lambda_{h+1} > \left(\frac{b_p}{h}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Donc e^K reste holomorphe pour un module de λ aussi grand que l'on veut. C'est donc une fonction entière. C. Q. F. D.

Il faudrait, pour compléter le résultat, démontrer le même théorème en ce qui concerne le numérateur de la fonction méromorphe; je me propose de revenir ultérieurement sur cette question.

VI. — Équations intégrales de première espèce.

Il y a des cas où la méthode de Fredholm permet presque immédiatement l'intégration des équations intégrales de première espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int f(x, y)\varphi(y)\,dy = \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est donnée et $\varphi(y)$ inconnue, les limites de l'intégrale étant des constantes.

Soit par exemple

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)[e^{ixy}+\lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x).$$

Dans le cas de $\lambda = 0$, elle se réduit tout simplement à l'équation de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{ixy}\,dy = \psi(x),$$

d'où l'on tirerait

$$2\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)e^{-ixy}\,dy.$$

Posons alors

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)e^{-izy}\,dz,$$

d'où

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\, dy;$$

l'équation (1) deviendra

(2) $$2\pi\Phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x, y) e^{-izy}\, dz\, dy = \psi(x)$$

et prend ainsi la forme d'une équation de Fredholm, où $\Phi(x)$ est la fonction inconnue et où le noyau est

$$K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-izy}\, dy.$$

Quelle est la condition pour que la méthode de Fredholm soit applicable à l'équation (2) qui peut s'écrire

$$2\pi\Phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) K(x, z)\, dz = \psi(x).$$

L'intégrale étant prise entre des limites infinies, il faut chercher d'abord à la ramener à des limites finies; c'est ce qui est possible si $K(x, z)$ s'annule pour $z = \pm\infty$, et pour $|z|$ très grand est de l'ordre de $|z|^{-h}$, où $h > 1$. Si nous posons en effet

$$x = \operatorname{tang}\xi, \qquad z = \operatorname{tang}\zeta,$$

l'équation prend la forme

$$2\pi\Phi(\operatorname{tang}\xi) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \Phi(\operatorname{tang}\zeta)\, K(\operatorname{tang}\xi, \operatorname{tang}\zeta) \frac{d\zeta}{\cos^2\zeta} = \psi(\operatorname{tang}\xi);$$

ou mieux encore si nous posons

$$x = \operatorname{tang}^k\xi, \qquad z = \operatorname{tang}^k\zeta,$$

k étant un nombre suffisamment grand pour que

$$\frac{k}{k+1} > \frac{1}{h},$$

ce qui est toujours possible si $h > 1$, notre équation deviendra

$$2\pi\Phi(\operatorname{tang}^k\xi) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} k\,\Phi(\operatorname{tang}^k\zeta) K(\operatorname{tang}^k\xi, \operatorname{tang}^k\zeta) \operatorname{tang}^{k-1}\zeta \frac{d\zeta}{\cos^2\zeta} = \psi(\operatorname{tang}^k\xi).$$

Nous voyons que le nouveau noyau

$$k\, K(\operatorname{tang}^k\xi, \operatorname{tang}^k\zeta) \operatorname{tang}^{k-1}\zeta \frac{1}{\cos^2\zeta}$$

se comporte pour $\zeta = \pm \frac{\pi}{2}$ comme

$$\operatorname{tang}^{-kh}\zeta \operatorname{tang}^{k-1}\zeta \frac{1}{\cos^2\zeta},$$

c'est-à-dire comme

$$(\cos\zeta)^{kh-k-1}$$

et par conséquent reste fini puisque

$$kh - k - 1 > 0.$$

Pour préciser davantage nous supposerons que

$$|K(x, z)| < A z^{-h},$$

A étant une constante indépendante de x et de z, et l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de x et de z depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

A quelles conditions cela correspond-il pour $f(x, y)$. Il faut d'abord que la méthode de Fourier puisse être appliquée à $f(x, y)$, c'est-à-dire :

1° Que $f(x, y)$ considérée comme fonction de y n'admette qu'un nombre fini de maxima et de minima (quelle que soit la valeur constante attribuée à x);

2° Que $f(x, y)$ tende uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini, et cela quel que soit x.

Si nous supposons de plus que $f(x, y)$ admet des dérivées des deux premiers ordres; que $\frac{df}{dy}$ tend uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini et que

$$\left|\frac{d^2f}{dy^2}\right| < M \frac{1}{1+y^2},$$

et qu'enfin $\frac{d^2f}{dy^2}$ n'ait comme f qu'un nombre fini de maxima et de minima, on aura en intégrant par parties :

$$\int f e^{-izy}\,dy = \frac{i}{z} f e^{-izy} + \frac{df}{dy}\frac{1}{z^2} e^{-izy} - \frac{1}{z^2}\int \frac{d^2f}{dy^2} e^{-izy}\,dy$$

ou en prenant pour limites $y = \pm\infty$

$$K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-izy}\,dy = -\frac{1}{z^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2f}{dy^2} e^{-izy}\,dy,$$

d'où

$$|K(x, z)| < \left|\frac{1}{z^2}\right| M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{M\pi}{|z|^2}.$$

Et comme d'ailleurs $|K(x, z)|$ reste fini même pour $z = 0$, on voit que les conditions sont remplies pour que la méthode de Fredholm soit applicable.

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'elle le serait dans des cas beaucoup plus généraux et qu'il serait aisé de déterminer.

Cherchons à appliquer le même principe à des séries analogues à celles de Fourier et écrivons

$$(3)\qquad \psi(x) = \Sigma A_m \left[e^{imx} + \lambda\theta_m(x)\right].$$

Partons de la formule de Fourier, en posant

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{-imz}\, dz; \qquad \varphi(z) = \Sigma A_m e^{imz},$$

notre équation deviendra

$$(4)\qquad \psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\Sigma e^{-imz}\theta_m(x)\, dz.$$

Dans l'équation (3), il s'agissait de déterminer les coefficients A_m, connaissant les fonctions $\psi(x)$ et $\theta_m(x)$, c'est-à-dire de développer la fonction donnée $\psi(x)$ en série procédant suivant les fonctions $e^{imx} + \lambda\theta_m(x)$. Dans l'équation transformée (4), il s'agit de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ connaissant la fonction $\psi(x)$. Les deux problèmes sont manifestement équivalents, mais le second se ramène à une équation intégrale, et la méthode de Fredholm y sera applicable pourvu que le noyau

$$\Sigma e^{-imz}\theta_m(x)$$

soit toujours fini.

C'est ce qui arrivera évidemment si la série

$$\Sigma\ \theta_m(x)$$

est absolument et uniformément convergente.

Soit par exemple à développer $\psi(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2π, suivant les exponentielles

$$e^{i\mu_m x}.$$

Nous pourrons ramener ces exponentielles à la forme

$$e^{imx} + \lambda\theta_m$$

en posant

$$\lambda = 1, \qquad \theta_m = e^{i\mu_m x} - e^{imx}.$$

Or on a

$$|\theta_m| < |\mu_m - m|\, x$$

puisque

$$\theta_m = i\int_{mx}^{\mu_m x} e^{it}\, dt$$

et que $e^{it} = 1$. Comme x varie de 0 à 2π, on aura

$$|\theta_m| < 2\pi|\mu_m - m|.$$

Il suffit donc que la série

$$\Sigma|\mu_m - m|$$

soit absolument et uniformément convergente. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on a

$$\mu_m = m + \frac{1}{m^2}.$$

Ici encore, il serait aisé d'étendre le résultat à des cas beaucoup plus étendus.

Soit maintenant l'équation

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y)[e^{ixy} - \lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x), \tag{5}$$

qui diffère de (1) parce que les limites ne sont plus infinies. Nous ne pouvons pas nous proposer de déterminer la fonction inconnue φ, connaissant la fonction ψ; et cette fonction étant quelconque; le problème serait en général impossible. Il suffit pour s'en convaincre de faire $\lambda = 0$; on voit alors que, quelle que soit la fonction $\varphi(y)$, la fonction ψ sera une fonction entière qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini, avec un argument compris entre 0 et π; et telle que $\psi e^{-2i\pi x}$ tende vers zéro quand x tend vers l'infini avec un argument compris entre π et 2π. La fonction ψ ne peut donc pas être choisie arbitrairement.

Ce que nous nous donnerons, ce sont les valeurs $\psi(m)$ que prend la fonction ψ quand x prend une valeur entière positive ou négative. Il est aisé d'ailleurs de se rendre compte que ces valeurs $\psi(m)$ suffisent pour déterminer une fonction entière satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Posons encore

$$\varphi(z) = \Sigma A_m e^{-imz}, \qquad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{imz}\,dz.$$

L'équation (5) devient alors

$$2\pi A_m - \lambda \int_0^{2\pi} \Sigma A_p e^{-ipy} f(m, y)\,dy = \psi(m). \tag{6}$$

Cette équation doit permettre de déterminer les coefficients A et par conséquent la fonction inconnue φ, quand on connaît les quantités $\psi(m)$.

Cette équation n'a plus la forme d'une équation intégrale, mais celle d'un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, tel que ceux qui

ont fait l'objet des études de M. von Koch. L'analogie des deux théories est d'ailleurs évidente.

Pour que la méthode soit applicable, il faut et il suffit que le déterminant infini converge; il suffit donc qu'il soit *normal* au sens de M. von Koch, c'est-à-dire que la série double en m et p

$$\sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f(m, y)\,dy \tag{7}$$

converge absolument. Si $f(m, y)$ est une fonction périodique de y avec une dérivée seconde, nos intégrales peuvent se transformer par une intégration par parties et la série (7) devient

$$-\sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f''(m, y)\,dy.$$

Les termes en sont plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{|f''|}{p^2} = \sum \frac{1}{p^2} \sum |f''|.$$

Il suffit donc que la série

$$\sum |f''(m, z)|$$

converge absolument et uniformément, ou encore que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x, z)|\,dz$$

converge absolument et uniformément.

On voit par cet exemple quelles différences il y a, en ce qui concerne les équations intégrales de première espèce, entre le cas où les limites sont finies et celui où elles sont infinies, cas auquel se rattacherait d'ailleurs celui où le noyau présenterait des singularités entre les limites d'intégration. Je me réserve de revenir sur cette question par des méthodes fondées sur l'itération des noyaux et qui mettront en évidence d'une autre manière les mêmes particularités.

NOTES ET ERRATA.

1. Pages 6 et 14. *Sur les équations à points critiques fixes :*

I. L'extension des recherches de Fuchs et de Poincaré a donné lieu à des travaux importants, maintenant classiques, dus essentiellement à MM. Émile Picard et Paul Painlevé [1] et à leurs élèves. Nous en donnons ici une *bibliographie* sommaire, les questions soulevées étant loin d'être épuisées. M. P. Painlevé a d'abord observé que les raisonnements de Fuchs et de Poincaré doivent être complétés : ils sous-entendent des propriétés des solutions de l'équation du premier ordre, non encore établies, qui ne sont plus vraies pour les ordres supérieurs.

Fuchs exprime que toute solution de l'équation $F(y', y, x) = 0$ qui prend, pour un point *arbitraire* $x = x_0$, une valeur *déterminée* y_0, est uniforme dans le domaine de x_0. Painlevé démontre (Thèse; *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Paris, 1887, p. 38, et *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1888, p. 38-57) que toute solution $y(x)$ d'une équation $F(y', y, x) = 0$, où F est un polynome en y', y à coefficients analytiques en x, ne peut admettre comme points singuliers *non algébriques* que certains points *fixes*, $x = \xi$, mis en évidence sur l'équation. Si les coefficients sont algébriques en x, ces points sont en nombre limité. Il n'y a donc pas pour une solution $y(x)$ de point *variable* x_0 pour lequel $y(x)$ ne tendrait vers aucune valeur déterminée quand x tend vers x_0.

Au contraire, dès le second ordre, les solutions $y(x)$ peuvent présenter des points *transcendants* ou *essentiels mobiles,* c'est-à-dire variant avec les constantes d'intégration. Il suffit, par exemple, de remplacer dans l'équation précédente x par $x + c$ et d'éliminer c entre l'équation et sa dérivée pour obtenir une équation du second ordre en y, indépendante de x, dont les solutions possèdent les points transcendants $x = \xi - c$, variables avec c.

La méthode de Poincaré s'appuie sur l'existence d'une correspondance *birationnelle* entre les valeurs $y(x)$, $y'(x)$ et les valeurs initiales y_0, y'_0, mais il démontre seulement que cette correspondance est *biuniforme.* S'il était prouvé que la correspondance n'admet que des points singuliers *isolés*, on en conclurait aisément qu'elle est birationnelle, mais *a priori* elle peut admettre des singularités plus compliquées; cela arrive pour les ordres supérieurs. Si dans la rela-

[1] Les pages qui suivent étaient écrites au moment de la mort de l'illustre géomètre; elles peuvent tout juste faire pressentir l'importance de son œuvre dans la théorie des équations différentielles.

tion $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ on regarde x et x_0 comme fixes. Painlevé montre que si leurs valeurs diffèrent des valeurs ξ, *pour une équation à points critiques fixes* la fonction φ de la seule variable y_0 ne présente dans le plan complexe, même à l'infini, que des singularités *algébriques*. Il suit de là, sans restriction, que la correspondauce entre y, y' et y_0, y'_0 est *birationnelle*.

Ces propositions ont permis à Painlevé d'étudier les équations du premier ordre $F(y, y', x) = 0$, où F est un polynome en y', y à coefficients analytiques en x, dont *la solution générale $y(x)$ n'acquiert que n déterminations quand x tourne autour des points critiques mobiles* (nécessairement algébriques). [La variable x ne tourne donc pas autour des points transcendants ξ, c'est-à-dire que la variation de l'argument de $x - \xi$, pour tous les points ξ, est nulle pour tous les contours fermés envisagés.]

Le résultat est simple : *ces équations se ramènent algébriquement à des équations à points critiques fixes*. (Cf. *Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm en* 1895. Paris, 1897, p. 23-60 et 443-462, et *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 23 et 30 juillet, 5 novembre 1888.)

La recherche des équations $F(y', y, x) = 0$, algébriques en y, y' à coefficients uniformes en x dont la solution générale $y(x)$ est *uniforme*, ou à *un nombre fini de branches*, est un problème beaucoup plus difficile lorsque x figure dans l'équation. Le cas simple de l'équation de Riccati n'est pas encore traité. (Cf. P. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 219-238 et une *Note* étendue dans l'ouvrage de Pierre Boutroux : *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*. Paris.)

La question a été reprise, avec les méthodes de P. Boutroux, par J. Malmquist (*Acta mathematica*, **36**, 1910, p. 297-343) pour les équations où y' est rationnel en x et y. Cf. aussi les résultats curieux obtenus par M. Petrovitch (*Comptes rendus Acad. Sciences*, **118**, 1894, p. 1190, et *Thèse*, Paris, 1895; aussi E. Picard, *Traité d'Analyse*, III, 3e édition, p. 378).

II. Les mêmes questions se posent pour les équations du second ordre, *algébriques* en y'', y', y, *analytiques* en x. Quelles sont les équations *à points critiques fixes?* Parmi celles-là, quelles sont celles dont la solution générale $y(x)$ est une fonction *uniforme* ou à *un nombre fini de branches?* Peut-on les intégrer à l'aide de fonctions uniformes déjà définies ou déterminent-elles des transcendantes nouvelles?

M. E. Picard a consacré à ces questions entre 1880 et 1895 plusieurs Mémoires et de nombreuses Notes (cf. *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **91**, 1880, p. 724; **103**, 1886, p. 549; **104**, 1887, p. 41; **114**, 1892, p. 1310; **116**, 1893, p. 365; **117**, 1893, p. 472 et 603; **120**, 1895, p. 402). Citons en particulier : *Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une équation algébrique et sur une classe d'équations différentielles* (*Bulletin Sc. math.*, **4**, 1880, p. 416-432); *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, **5**, 1889, p. 223-249 et 263-319); *Remarques sur les équations différentielles* (*Acta mathematica*, **17**, 1893, p. 296-300); *Sur une classe de transcendantes nouvelles*, **18**, 1894, p. 133-154; **23**, 1900, p. 333-337; *Sur l'inversion des inté-*

grales à multiplicateurs (*American Journal*, **16**, 1894, p. 111-122), et *Traité d'Analyse*, t. III, 3ᵉ édition, 1927, p. 67-81.

M. Picard s'occupe d'abord des équations algébriques de la forme $F(y'', y) = 0$, puis de $y'' = y'^2 A(y)$ et détermine tous les cas où la solution générale y est uniforme en x; on n'a pas ainsi de fonctions nouvelles.

Passant aux équations $y'' = R(y', y)$, où R est rationnel en y' et y, M. Picard a donné des conditions *suffisantes* pour que $y(x)$ n'ait ni points critiques algébriques, ni points transcendants d'une certaine espèce; la solution $y(x)$ est à *apparence uniforme*, elle n'est pas toujours uniforme. (Cf. les applications particulières de Forsyth, *Theory of differential equations*, III, p. 276-306; Wallenberg, *Journal de Crelle*, **119**, 1898, p. 87-113; **120**, 1899, p. 113-131.)

Lorsque x figure dans l'équation et qu'elle a la forme

$$y'' = y'[a(x)y + b(x)] + A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y - D(x),$$

M. E. Picard a donné deux conditions pour que $y(x)$ présente des pôles mobiles; Painlevé (*Acta mathematica*, **25**, 1902, § **30**) a montré que ces conditions, non nécessaires, sont suffisantes et qu'on peut former toutes les équations qui y satisfont. Dans le cas où les coefficients a, ..., A, ... sont constants, Mittag-Lœffler (*Acta mathematica*, **18**, 1894, p. 233-245) et Fransén ont prouvé que les conditions de M. Picard entraînent l'intégrabilité de l'équation par les fonctions uniformes élémentaires.

La grande difficulté de l'étude des équations du second ordre à points critiques fixes, reconnue par M. E. Picard, est dans l'existence de points transcendants ou essentiels *mobiles*. La solution de l'équation

$$y'' = \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')},$$

définie par les valeurs initiales : y_0, y'_0 pour $x = x_0$ présente en général un point transcendant quand ces valeurs initiales annulent à la fois P et Q.

Pour l'équation

$$y'' = y'^2 \frac{(2y - 1)}{(1 + y^2)}$$

dont la solution générale est

$$y = \text{tang} \log A(x - \alpha),$$

lorsque x tend vers α dans une direction quelconque, y est indéterminé : ce point est essentiel et critique.

L'équation, rencontrée par M. E. Picard, retrouvée et étudiée plus tard par Painlevé,

$$\Delta y'' = y'^2 \left\{ y(2k^2 y^2 - (1 + k^2)) + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\Delta} \right\},$$

où $\Delta = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$ et λ est une constante, est telle que $y(x)$ n'a comme point singulier algébrique que des pôles; toute solution y qui tend vers une valeur déterminée, finie ou non, quand x tend vers x_0 est holomorphe ou méromorphe

pour $x = x_0$. Cependant, comme

$$y = sn_{k^2}[\lambda \log \lambda(x - a)],$$

le point $x = a$ est un point d'indétermination complète pour y; sur un chemin donné tendant vers a, quel qu'il soit, y ne tend vers aucune limite et une infinité de déterminations de y se permutent autour de ce point, *à moins que* $2i\pi\lambda$ *ne soit une période ou fraction de période de* sn_{k^2}. Pour que y soit à points critiques fixes (ici *uniforme*), il faut et suffit que cette condition soit remplie : $2i\pi\lambda$ est période de sn_{k^2}; on ne sait pas le reconnaître, λ et k étant donnés, par un nombre limité de calculs.

M. E. Picard a obtenu enfin (*Acta mathematica*, 18, 1894, p. 133), en partant de fonctions uniformes définies directement, des équations différentielles à solution générale uniforme, mais il a reconnu que cette solution *dépend algébriquement des constantes*. Ces équations sont alors réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires (cf. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 351-394).

La méthode par laquelle P. Painlevé a obtenu de *nouvelles conditions nécessaires* à la fixité des points critiques est très simple en principe : elle consiste à introduire dans les coefficients, supposés holomorphes, du système différentiel étudié, par une transformation des éléments (variable et fonctions) qui conserve cette holomorphie, un paramètre variable α, tel que les coefficients soient aussi holomorphes en α. Si le système a ses points critiques fixes pour α quelconque, non nul, il en sera de même pour $\alpha = 0$ et le développement des solutions suivant les puissances de α aura pour coefficients des fonctions de la variable à points critiques fixes.

Un choix convenable de la transformation amène pour $\alpha = 0$ à des équations *simplifiées* pour lesquelles on sait exprimer la fixité des points critiques ou l'uniformité de la solution.

Cette méthode est susceptible d'applications variées (cf. Painlevé, *Acta mathematica*, 25, 1902, p. 82-85). Les équations différentielles qui peuvent être à points critiques fixes, ou à solution générale uniforme, étant, par la méthode précédente, réduites à un petit nombre de types, il s'agit, *pour celles que l'on ne peut intégrer à l'aide de fonctions uniformes définies par des équations du premier ordre ou des équations linéaires*, de décider si les points critiques sont réellement fixes, ou si la solution est uniforme. La méthode, imaginée par M. Painlevé pour le second ordre, s'étend au troisième et aux ordres supérieurs, mais la difficulté de son application croît avec l'ordre de l'équation.

Les résultats essentiels de Painlevé sont résumés dans un Mémoire étendu : *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme* (*Acta mathematica*, 25, 1902, p. 1-86); la détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes, du type

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

et la démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

qui est la plus simple de celles qui définissent des fonctions uniformes (méromorphes) nouvelles, sont données en détail au *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, **28**, 1900, p. 201-261).

Une omission dans les tableaux publiés aux *Acta mathematica* a conduit M. Gambier à reprendre l'application de la méthode de Painlevé (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **143**, 1906, p. 741, et *Acta mathematica*, **33**, 1910, p. 1-55); c'est ainsi qu'a été trouvée l'équation

$$(\mathrm{VI})\qquad y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{x}{y^2}+\gamma\frac{x-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

(α, β, γ, δ constantes). Painlevé montre alors (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **143**, 1906, p. 1111) que cette équation (VI) donne par dégénérescence les cinq équations :

$$(\mathrm{V})\qquad y''=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)y'^2-\frac{y'}{x}+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma y}{x}+\delta\frac{y(y+1)}{y-1},$$

$$(\mathrm{IV})\qquad y''=\frac{y'^2}{2y}+\frac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y},$$

$$(\mathrm{III})\qquad y''=\frac{y'^2}{y}-\frac{y'}{x}+\frac{\alpha y^2+\beta}{x}+\gamma y^3+\frac{\delta}{y},$$

$$(\mathrm{II})\qquad y''=2y^3+xy+\alpha,$$

$$(\mathrm{I})\qquad y''=6y^2+x.$$

Ces six équations sont les *types* auxquels se ramènent, *algébriquement*, *toutes les équations*

$$y''=\mathrm{R}(y',\,y,\,x),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x *dont les points critiques sont fixes* et qui ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions *uniformes* classiques (données par des équations du premier ordre ou par des équations linéaires).

La solution générale de (VI) est méromorphe, *sauf aux trois points homologues* ($x=0$, 1, ∞) qui sont des singularités transcendantes. M. R. Garnier a étudié $y(x)$ au voisinage de ces singularités par l'emploi des approximations successives de M. E. Picard (*Ann. Éc. Norm.*, **34**, 1917, p. 239-253).

La solution générale de (I) est *partout méromorphe;* les égalités

$$y=\varphi(x,\,x_0,\,y_0,\,y'_0),\qquad y'=\frac{d\varphi}{dx},$$

qui la déterminent, expriment entre y, y' et leurs valeurs initiales une correspondance *biuniforme*. On peut écrire

$$y=\frac{z'^2-zz''}{z^2},$$

où $\zeta(x)$ est une fonction *entière* définie par le système

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \eta_1, \qquad \frac{\eta_1''^2}{2} + 2\eta_1'^3 + x\eta_1' - \eta_1 = 0.$$

P. Boutroux a étudié en détail l'allure des solutions $y(x)$ quand x croît indéfiniment; une transformation simple le conduit à les regarder comme *asymptotes* aux fonctions doublement périodiques (*Ann. Éc. Norm.*, 30, 1913, p. 265-375, et 31, 1914, p. 99-159).

La solution générale de (II) est encore méromorphe et s'exprime comme quotient de deux fonctions entières qui satisfont à une équation du troisième ordre.

Quand on passe à (III), y a un point transcendant pour $x = 0$, mais si l'on pose $x = e^u$, y est *méromorphe* en u et P. Painlevé a montré qu'on pouvait aussi l'obtenir comme quotient de deux fonctions *entières* qui satisfont à un système du troisième ordre.

Les fonctions méromorphes (ou entières) définies ainsi ont été nommées *fonctions de Painlevé*. La raison profonde de leur *nouveauté* doit être cherchée dans la théorie du *groupe de rationalité* (au sens de M. Drach) de l'équation aux dérivées partielles correspondante :

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0.$$

Pour toutes les équations de Painlevé, ce groupe est le groupe *infini*, *primitif*, *simple*, de transformations, défini par l'équation

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = 1;$$

φ, ψ sont deux intégrales de $X(f) = 0$, formant un système fondamental et satisfaisant à une relation

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, y')} = M,$$

où M est un dernier multiplicateur de Jacobi, *rationnel* en x, y, y'. On parvient facilement à l'expression de M, pour (VI), en remarquant que cette équation peut être obtenue en annulant la *variation* de l'intégrale simple

$$\int F(x, y, y')\,dx,$$

où l'on a posé

$$F = \frac{x(x-1)}{y(y-1)(y-x)} y'^2 + \frac{2}{(x-1)}\left[\alpha y - \frac{\beta x}{y} - \gamma \frac{(x-1)}{(y-1)} - \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)}\right];$$

on peut prendre alors

$$M = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{2x(x-1)}{y(y-1)(y-x)}.$$

Pour (I) et (II), on a simplement

$$M = 1.$$

Toutes les fonctions uniformes définies antérieurement à l'aide d'équations différentielles correspondaient à des *groupes de rationalité finis* (projectifs ou

linéaires); il y a donc lieu de regarder les transcendantes uniformes de Painlevé comme de nature essentiellement nouvelle (cf. P. Painlevé, *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **135**, 27 octobre 1902 et **1902-1903**, *passim*; J. Drach, *Bulletin Sc. math.*, **39**, 1915, p. 149).

Une autre « correspondance » allait accroître leur intérêt. Alors que M. Gambier trouvait l'équation (VI), M. Richard Fuchs poursuivant les recherches de son père L. Fuchs et de M. Schlesinger sur les groupes des équations linéaires, la rencontrait aussi (cf. *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **141**, 1905, p. 555, et *Math. Ann.*, **63**, 1906, p. 301). Si l'on considère l'équation différentielle linéaire (E_1) à coefficients rationnels, réguliers, possédant les quatre points singuliers 0, 1, x, ∞ et un point singulier *apparent* y,

$$(E_1) \qquad \frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{(t-1)^2} + \frac{\gamma}{(t-x)^2} + \frac{\delta}{t(t-1)} + \frac{3}{4(t-y)^2} + \frac{a}{t(t-1)(t-x)} + \frac{b}{t(t-1)(t-y)},$$

et si l'on cherche à déterminer y et les coefficients en fonction de x, de manière que le groupe de monodromie de (E_1) soit indépendant du paramètre x, on trouve que y doit vérifier l'équation (VI), α, β, γ, δ ayant les mêmes valeurs, constantes, et que a et b s'expriment rationnellement à l'aide de y', y, x.

L'équation (VI) est ainsi mise en relation avec le *problème de Riemann* qui consiste à déterminer les arbitraires d'une équation différentielle linéaire, où les points singuliers sont fixés, de manière qu'elle admette un groupe donné.

On déduit de là une interprétation des intégrales premières de (VI) au moyen des transformations linéaires que subissent les solutions fondamentales de (E_1) quand t tourne autour des points singuliers (cf. R. Garnier, *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **159**, 1914, p. 296).

Tout ceci s'étend à un ordre quelconque, c'est-à-dire qu'en partant d'une équation différentielle linéaire, ou mieux d'un système linéaire et homogène à n inconnues dont les coefficients n'ont que des pôles simples, comme le fait L. Schlesinger, l'étude du problème de Riemann conduit à des systèmes différentiels qui définissent des transcendantes dont les points critiques sont fixes, les pôles seuls étant mobiles (cf. L. Schlesinger, *Journal für die reine Math.*, **123**, 1901, p. 138, et *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig und Berlin, 1908, p. 7).

Pour le développement des recherches de Painlevé sur les équations du second ordre, on doit citer encore J. Malmquist (*Archiv for Math.*, **17**, **22**, et *Comptes rendus du* 5e *Congrès des Math. scandinaves*, 1922, p. 233-253) et F. Tricomi (*Atti della r. Acc. dei Lincei*, V, **32**, 1923) qui étudie les équations du second degré en y''.

L'étude des équations du troisième ordre à points critiques fixes, commencée par M. Painlevé (*Acta mathematica*, **25**, 1902, p. 67), a été continuée par MM. J. Chazy et R. Garnier. M. J. Chazy (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **145**, 1907, p. 305, et *Acta mathematica*, **34**, 1910, p. 316-386) a étudié en détail la *simplifiée* correspondante

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\,y'y'' + c(y)\,y'^3,$$

où $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels et où n est un entier positif ou négatif, ou infini mais différent de -1 et de zéro, dont la solution générale est uniforme.

Pour $n = -2$, $b(y) = 0$, on trouve les fonctions fuchsiennes ou kleinéennes de Poincaré. Lorsque $n \neq -2$, M. Painlevé avait annoncé que $b(y)$ et $c(y)$ étaient de genre *zéro* ou *un*, sauf si les points singuliers de $y(x)$ forment un ensemble parfait, et que y s'obtenait avec les fonctions uniformes classiques.

M. R. Garnier reprenant le cas $b(y)$, $c(y)$ rationnels a traité en outre (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **145**, 1907, p. 308, et **147**, 1908, p. 915) le cas où ces fonctions sont de genre un.

M. Chazy a formé une équation à points critiques fixes qui donne par dégénérescence les six équations du second ordre de M. Painlevé, mais son étude n'est pas terminée. Il a également étudié quelques équations du quatrième ordre.

M. E. Borel avait observé (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **138**, 1904, p. 337) que l'ensemble des termes de poids le plus élevé par rapport aux indices de dérivation, dans certaines équations dont la solution générale est *entière*, est identique à un *invariant* d'une forme binaire

$$u^{(n)} + n\lambda u^{(n-1)} + \ldots + n\lambda^{n-1}u' + \lambda^n u.$$

Par exemple, les trois invariants

$$uu'' - u'^2, \quad uu^{\text{iv}} - 4u'u''' + 3u''^2, \quad uu^{\text{vi}} - 6u'u^{\text{v}} + 15u''u^{\text{iv}} - 10u'''^2$$

donnent des équations dont les solutions respectives sont les fonctions entières :

$$e^{ax+b}, \quad e^{ax+b}\sigma(x+c, 0, d), \quad e^{ax+b}\sigma(x-c; 0, e)\sigma(x+d; 0, -e),$$

où la dernière ne dépend que de cinq constantes. M. Chazy a développé ces remarques, sans aboutir à des conclusions définitives; toutefois l'équation obtenue en annulant l'invariant de la suite qui correspond à $n > 6$ a des points critiques transcendants.

Un autre travail de M. Chazy (*Acta mathematica*, **41**, 1926, p. 1-69) est essentiellement consacré à la limitation des degrés dans la fonction rationnelle R, pour que l'équation *d'ordre n*

$$y^{(n)} = R(y^{(n-1)}, \ldots, y, x)$$

ait ses points critiques fixes.

M. R. Garnier, dans sa Thèse (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3[e] série, **29**, 1912, p. 34-160), a généralisé l'équation (E_1) qui conduit à (VI) en portant à $(n+3)$ le nombre des points essentiellement singuliers; dans l'équation, régulière au sens de Fuchs,

$$(E_n) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right],$$

qui possède avec les points singuliers t_i, les points *apparents* λ_j, simples et en même nombre n, il s'agit de déterminer les λ_j et α_i (et par suite les c_i, β_j qui en résultent) en fonction des n variables $t_1, \ldots, t_n$ de manière que les coefficients des transformations du groupe de monodromie G, soient indépendantes de $t_1, \ldots, t_n$. M. R. Garnier obtient pour les λ_i un système (f_n, F_n) comprenant $\frac{n(n-1)}{2}$ équations du premier ordre (f_n) et n équations du second ordre (F_n), complètement intégrable, qui donne par dégénérescence un système hyperelliptique jacobien de genre n.

Il montre que les fonctions *symétriques* des λ_i, considérées comme fonctions de l'un des arguments t_i, ont *leurs points critiques fixes* $(t_i = t_j, 0, 1, \infty)$ et sont méromorphes en dehors de ces points.

Dans la suite (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, **43**, 1926), M. R. Garnier a étendu ses recherches au problème de Riemann général, en étudiant *autour de leurs singularités essentielles* [comme il l'avait fait pour (VI)] les solutions du système (A) par lequel L. Schlesinger définit les résidus des pôles simples des coefficients de son système linéaire (S) au moyen des affixes de ces pôles quand on fixe le groupe G de monodromie de (S). Ce système (A) est d'ordre $(4n+8)$, il possède $(2n+7)$ intégrales premières algébriques, dont $(n+3)$ quadratiques; M. R. Garnier a réussi à le remplacer par un système plus simple d'ordre $2n$, auquel il applique la méthode des approximations successives de M. E. Picard.

2. Pages 95 et 101. *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires :*

Cette question a été l'objet de nombreux travaux à la fin du siècle dernier. H. Valentiner (*Mémoires de l'Académie de Copenhague*, 6e série, V, 1889), recherchant à nouveau les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire homogène à trois variables d'ordre 360, a découvert un nouveau groupe, qui avait échappé à C. Jordan.

E. Goursat (*Ann. de l'École Norm.*, 3e série, II, 1885) relie l'étude des intégrales algébriques de l'équation du second ordre à la transformation de cette équation, par changement de variable et de fonction, en une équation hypergéométrique (de Gauss) dont l'intégrale est algébrique.

Le passage aux équations du troisième ordre, et aux systèmes vérifiés par deux fonctions de deux variables dont toutes les déterminations se déduisent de l'une d'elles par un nombre fini de transformations projectives, a été fait par E. Goursat (*Comptes rendus*, **104**, 16 mai 1887) et P. Painlevé (*Comptes rendus*, **104**, 31 mai 1887), qui ont formé des invariants différentiels I et J analogues à celui de Cayley-Schwarz pour le groupe projectif à une variable. Pour l'application particulière au troisième et au quatrième ordre, on peut consulter P. Painlevé (*Comptes rendus*, **104**, 27 juin 1887; **105**, 4 juillet 1887) dont les indications ont été développées par A. Boulanger (*Thèse*, Paris, juin 1897) avec une application au groupe de Hesse d'ordre 216.

La voie nouvelle ouverte par M. Émile Picard (*Comptes rendus*, **96**, 1883; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **1**, 1887), qui l'a conduit à la notion du *groupe de rationalité* pour une équation différentielle linéaire dont les

coefficients appartiennent à un certain *domaine de rationalité* [R], amène à rechercher, dans un domaine de rationalité *donné* [R], les équations dont le groupe de rationalité est formé d'un nombre limité de transformations linéaires. La définition précise de [R] pose alors chaque fois un problème spécial. (Cf. Émile Picard, *Comptes rendus*, **119**, 1894; **121**, 1895, et *Traité d'Analyse*, III, 3e édition, Chap. XVII, Paris, 1927, et aussi E. Vessiot, *Ann. de l'École Norm. sup.*, IX, 1892, et L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, II, Leipzig, 1897.)

Il faut encore citer Wallenberg (*Journal für die reine Math.*, **113**, 1893, p. 1-41) qui s'est occupé des équations d'ordre n dont les solutions satisfont à $(n-2)$ relations homogènes de degré supérieur au premier, et l'exposé d'ensemble, avec historique, de G. Fano (*Math. Annalen*, 53, 1899, p. 493-590), où l'on aborde, en particulier, l'étude des équations du 5e et du 6e ordre dont les solutions sont liées entre elles par des relations algébriques.

3. Page 98. Sous le radical, deuxième ligne, *lire* $\frac{dF}{d\xi}$, barre omise.

4. Page 99. Deuxième ligne, dans le déterminant, *lire* $\frac{d^2 t_3}{dx^2}, \frac{d^3 t_3}{dx^3}$.

5. Page 106. Neuvième ligne, *lire* isomorphe sans *s*.

6. Page 112. Ligne 14, *lire* $\frac{2\pi}{n_{p-1}}$, barre omise.

7. Page 170. Ligne 22, au dénominateur du troisième terme, *lire* 2!

8. Page 174. Ajouter *à* au début de la dernière ligne.

9. Page 177. Ligne 10, *lire* $\frac{dx'_1}{dt}$, accent omis.

10. Page 189. Ligne 4 en partant du bas, *lire* $X_i(f)$, i omis.

11. Page 225. Ces formules peuvent s'obtenir directement. Une rotation continue de grandeur 1, autour de l'axe de cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, produit dans le temps dt, la même variation des coordonnées x, y, z d'un point fixe du trièdre que la rotation infiniment petite

$$t_1 = \alpha_1\,\delta t, \qquad t_2 = \beta_1\,\delta t, \qquad t_3 = \gamma_1\,\delta t.$$

On a donc pour le déplacement d'*entraînement*

$$\delta x = t_2 z - t_3 y, \qquad \delta y = t_3 x - t_1 z, \qquad \delta z = t_1 y - t_2 x.$$

Si l'on applique ceci au point

$$x = \mu = \alpha \sin\theta, \qquad y = \nu = \beta \sin\theta, \qquad z = \rho = \gamma \sin\theta,$$

représentatif de la rotation finie, en observant que si θ varie avec t, ce point varie dans le trièdre, on aura

$$\delta\mu = \delta\alpha \sin\theta + \alpha\cos\theta\,\delta\theta, \qquad \dots$$

les seconds termes donnant le déplacement *relatif*. Donc, en tenant compte du

déplacement d'entraînement $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$,

$$\begin{aligned}\delta\mu &= t_2\rho - t_3\nu + \lambda\alpha\,\delta\theta,\\ \delta\nu &= t_3\mu - t_1\rho + \lambda\beta\,\delta\theta,\\ \delta\rho &= t_1\nu - t_2\mu + \lambda\gamma\,\delta\theta.\end{aligned}$$

On déduit de là $\delta\lambda$ par l'identité

$$\lambda\,\delta\lambda + \mu\,\delta\mu + \nu\,\delta\nu + \rho\,\delta\rho = 0,$$

d'où

$$\delta\lambda = -(\mu\alpha\,\delta\theta + \nu\beta\,\delta\theta + \rho\gamma\,\delta\theta) = -\sin\theta\,\delta\theta.$$

Ces formules, plus générales que celles de H. Poincaré, donnent la variation des quantités λ, μ, ν, ρ pour une rotation infiniment petite *quelconque*. Elles redonnent celles du texte, si l'on suppose

$$\alpha\,\delta\theta + \alpha_1\,\delta t = 0, \qquad \beta\,\delta\theta + \beta_1\,\delta t = 0, \qquad \gamma\,\delta\theta + \gamma_1\,\delta t = 0,$$

c'est-à-dire, en particulier,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = \gamma \qquad \text{avec} \quad \delta t = -\delta\theta.$$

La théorie *analytique* des groupes continus finis, dans la voie adoptée par H. Poincaré, ne semble pas avoir été poursuivie. L'étude de ces groupes, plus particulièrement celle des groupes *simples* ou *semi-simples* de M. E. Cartan, a donné lieu à de nombreux travaux. On doit citer particulièrement : H. Weyl (*Math. Zeitschrift*, **23**, 1925, p. 271-309; **24**, 1926, p. 328-395); de très nombreux Mémoires de E. Cartan (*Bulletin Sc. math.*, 2e série, **49**, 1925; *Journal de Math. pures et appl.*, **6**, 1927; **8**, 1929; *Annali di Mat.*, 4e série, **5**, 1928, etc.) rappelés au fascicule **42** du *Mémorial des Sciences mathématiques :* E. Cartan, *La Théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs, 1930; enfin O. Schreier (*Abh. math. Seminar Hamburg*, **4**, 1926; **5**, 1927). Cf. aussi l'exposé d'ensemble du fascicule **33** du *Mémorial des Sciences mathématiques :* A. Buhl, *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis*, 1928, où l'on trouvera une bibliographie étendue.

12. Page 484-492. *Réduction des intégrales abéliennes. Intégrales doubles :*

La réduction des intégrales abéliennes, l'étude des résidus et des périodes des intégrales doubles, celle des intégrales différentielles totales algébriques par rapport à deux variables complexes x, y, et les questions connexes, ont, comme le fait remarquer H. Poincaré, occupé M. Émile Picard pendant plus de dix ans. On ne peut aborder ce domaine sans étudier à la fois les travaux des deux savants. Nous ne pouvons ici que grouper quelques indications bibliographiques pour aider à cette étude.

Sur la réduction des intégrales abéliennes, voir E. Picard, *Comptes rendus,* **93**, 1881, p. 696 et 1126; **94**, 1882, p. 1704; **95**, 1882, p. 898; *Bulletin Soc. math. de France*, **11**, 1882, p. 25-53; **12**, 1884, p. 153-155.

Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles ou de fonctions algébriques, voir E. Picard, *Comptes rendus,* **102**, 1886, p. 349

et 410; **124**, 1897, p. 433; **125**, 1897, p. 1068; **126**, 1898, p. 1116; **129**, 1899, p. 539; **132**, 1901, p. 18 et 929; **133**, 1901, p. 795; **134**, 1902, p. 69; **137**, 1903, p. 594; **140**, 1905, p. 915; *Annales Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, **19**, 1902, p. 65-87; **20**, 1903, p. 531-584; **22**, 1905, p. 69-100; *Journal de Math. pures et appl.*, 5ᵉ série, **5**, 1899, p. 5-59; *Bull. Sciences math.*, 2ᵉ série, **26**, 1902. Un certain nombre des résultats sont exposés dans le *Traité d'Analyse* de M. Émile Picard, II, 1925, Chap. IX; pour d'autres, particulièrement pour ceux relatifs aux *Intégrales de différentielles totales, algébriques par rapport à deux variables x, y*, dont la considération est due à M. E. Picard, on trouvera un exposé d'ensemble dans l'ouvrage de E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, I, 1897; II, 1900.

Le Tome II contient également un résumé des résultats obtenus par voie géométrique en Italie, et qui n'avaient pas trouvé place dans l'Ouvrage, par MM. G. Castelnuovo et F. Enriques, avec une bibliographie étendue où l'on doit relever les noms de G. Castelnuovo, F. Enriques et F. Severi. Cf. aussi F. Severi, *Rom. Acc. L. Rend.*, **13**, 1904, p. 253-258, etc.

13. Page 493. Le Mémoire *Sur les cycles des surfaces algébriques* est attribué à un autre volume des *Œuvres;* la pensée de H. Poincaré présente une complexité — et, dirons-nous, une « connexion » — telle qu'il n'est pas possible que chaque travail ne se rapporte qu'aux publications déjà faites. Cela ne serait vrai que si l'on adoptait l'ordre chronologique, ce qui est impossible.

14. Page 553, titre, *lire* la date 1910 *au lieu de* 1901.

15. Page 571, ligne 6. L'exposant de n^n est $-\frac{1}{\lambda}$.

16. Page 540-578. *Sur les équations de Fredholm :*

La théorie des équations intégrales de Fredholm a donné lieu à de nombreux travaux, avant et après 1909, époque où H. Poincaré s'en est occupé. On rappellera seulement ici les recherches fondamentales de D. Hilbert, *Göttinger Nachr.*, 1904-1910; E. Schmidt, *Math. Ann.*, **63**, 1907, p. 433-476, et **64**, 1907, p. 161-174; E. Goursat, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2ᵉ série, **10**, 1908, p. 5-98; H. Lebesgue, *Annales de la Faculté de Toulouse*, **1**, 1910, p. 25-128, et *Bulletin Soc. math. France*, **36**, 1908, p. 3-19.

Pour les travaux récents sur les équations intégrales à noyau singulier, Cf. E. Picard, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 1911, p. 313; F. Weyl, *Math. Annalen*, **66**, 1909, et T. Carleman, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **1**, 1931, p. 401-430, où l'on trouvera une bibliographie plus complète. Cf. aussi V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913.

Jules Drach.

FIN DU TOME III.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME III.

PREMIÈRE SECTION. — ANALYSE PURE.

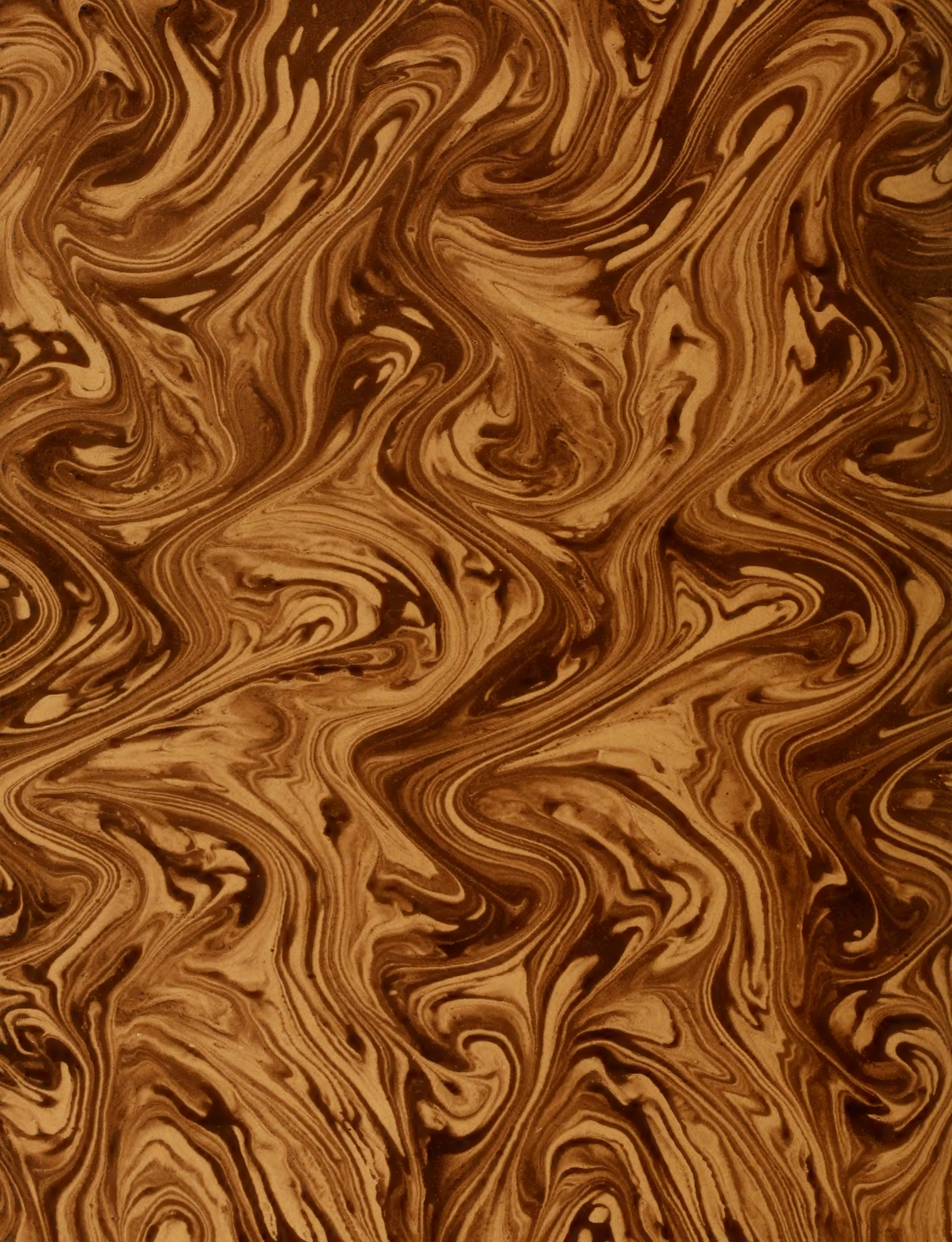
PREMIÈRE PARTIE. — *Équations différentielles* (suite).

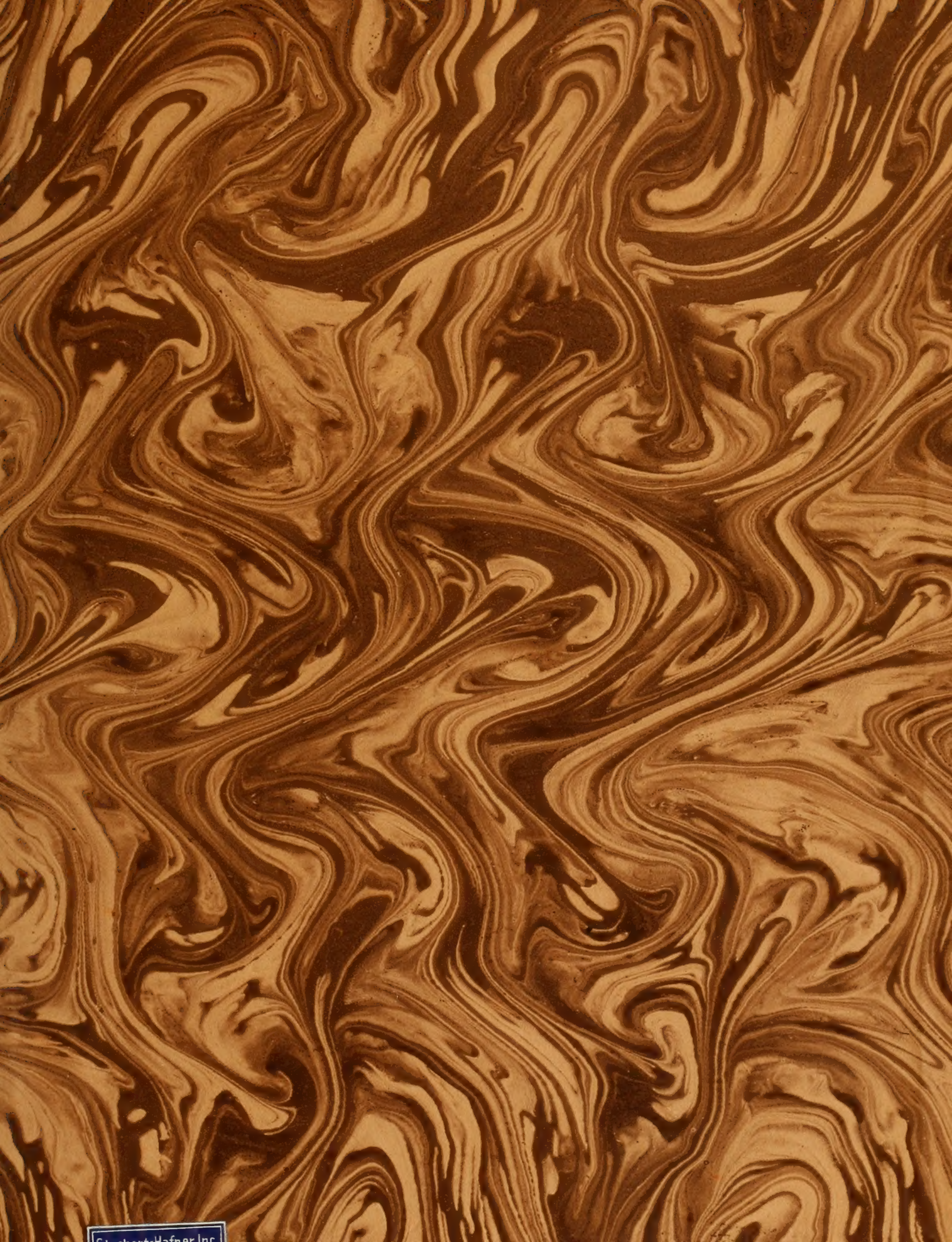
DEUXIÈME PARTIE. — *Théorie des fonctions.*

Intégrales simples et multiples.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

84505 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.




Stechert-Hafner Inc